ПРОБЛЕМЫ КОРАБЛЕСТРОЕНИЯ И ОКЕАНОТЕХНИКИ

УДК 533.6.011.5

Е.А. Косолапов[1], М.Д. Соленников[2]

КВАЗИОДНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В КАНАЛАХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева[1],
Опытное конструкторское бюро машиностроения им. И.И. Африкантова[2]

На основе общих интегральных уравнений законов сохранения получена математическая модель для течений сплошных сред в одномерном приближении для каналов переменного сечения. Это приближение позволяет учитывать различные явления на стенках канала, например, изменение геометрии канала с течением времени, впрыск или отсос газа через стенки и т.д.

Ключевые слова: течение газа, специальное одномерное приближение, каналы переменного сечения, интегральные и дифференциальные уравнения, явления на стенках.

В технических науках важное значение имеют предварительные упрощенные расчеты. С одной стороны, они требуют минимальных затрат, а с другой - позволяют получить приближенные значения основных параметров. Это дает возможность уже на первоначальном этапе, либо отказаться от задуманных конструктивных решений, либо идти дальше – применять более сложные расчетные алгоритмы или переходить к экспериментальным конструкциям. Для расчетов течений сплошных сред (газов, жидкостей, двухфазных сред и т.д.) используется так называемое одномерное приближение [1], которое в сущности не является таковым. В частности, для одномерного приближения из стационарного уравнения неразрывности должно бы следовать

$$div\rho\vec{\upsilon} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(\rho\upsilon) = 0 \Rightarrow \rho\upsilon = \mathrm{const}, \tag{1}$$

где ρ - плотность, $\vec{\upsilon}$ и υ - скорость и ее проекция на ось x.

В монографии [1] аналогом этого уравнения является закон постоянства расхода

$$\rho\upsilon S = \mathrm{const}, \tag{2}$$

где S - площадь поперечного сечения канала.

Очевидно, что выражения (1) и (2) противоречат друг другу. В дальнейшем будем называть приближение, из которого, в частности, следует формула (2) – подобным одномерному или *квазиодномерным* приближением (КОП). Заметим, что при $S = \mathrm{const}$ эти приближения совпадают. Таким образом, несмотря на то, что в КОП все параметры зависят от одной пространственной координаты, это приближение как бы «чувствует» наличие стенок канала, их влияние на газ и изменение их геометрии. В связи с этим возникают вопросы, можно ли в этом приближении учитывать: изменение геометрии канала с течением времени, впрыск или отсос газа через стенки, теплообмен через них и т.п.

В данной работе делается попытка ответить на эти и другие вопросы в положительном смысле.

Интегральные уравнения

Исходными уравнениями для описания течения газа являются интегральные уравнения законов сохранения для произвольного выделенного объема [2]:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int \rho dV = \oint \rho(\vec{\upsilon}\vec{n})dS, & (3) \\ -\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int \rho\vec{\upsilon} dV = \oint \rho\vec{\upsilon}(\vec{\upsilon}\vec{n})dS + \oint p\vec{n}dS, & (4) \\ -\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int \rho e dV = \oint \rho e(\vec{\upsilon}\vec{n})dS + \oint p(\vec{\upsilon}\vec{n})dS, & (5) \end{cases}$$

где p – давление; $e = \upsilon^2/2 + u$ - удельная полная энергия; u - удельная внутренняя энергия; $\vec{n}$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности; t – время; V – объем; S - площадь.

Поверхностные интегралы в (3)…(5) берутся по замкнутой поверхности вокруг выделенного объема.

Для упрощения в этих уравнениях не учитываются: вязкость, перенос тепла излучением и теплопроводностью и сила тяжести. Это является естественным для быстрых невысокотемпературных течений газа.

Так как неизвестных параметров в приведенных уравнениях четыре (ρ, $\vec{\upsilon}$, p, e), то для замыкания этой системы используется уравнение состояния. Для идеального газа оно имеет вид

$$p = (k-1)\rho\left(e - \frac{\upsilon^2}{2}\right), \qquad (6)$$

где k – показатель адиабаты.

Отметим, что интегральные уравнения (3)–(5) являются более общими, чем дифференциальные. В частности, для разрывных течений газа дифференциальные уравнения вообще теряют смысл. Кроме того, интегральные уравнения являются более удобными для численного решения [3, 4]. Дифференциальные уравнения получаются из интегральных при стремлении выделенного объема к нулю. Правда, устремлять объём к нулю можно поразному, как это будет показано далее.

Предлагаемое КОП будем применять для течений газа в плоско- или осесимметричных каналах (рис. 1) со слабо изменяющейся образующей.

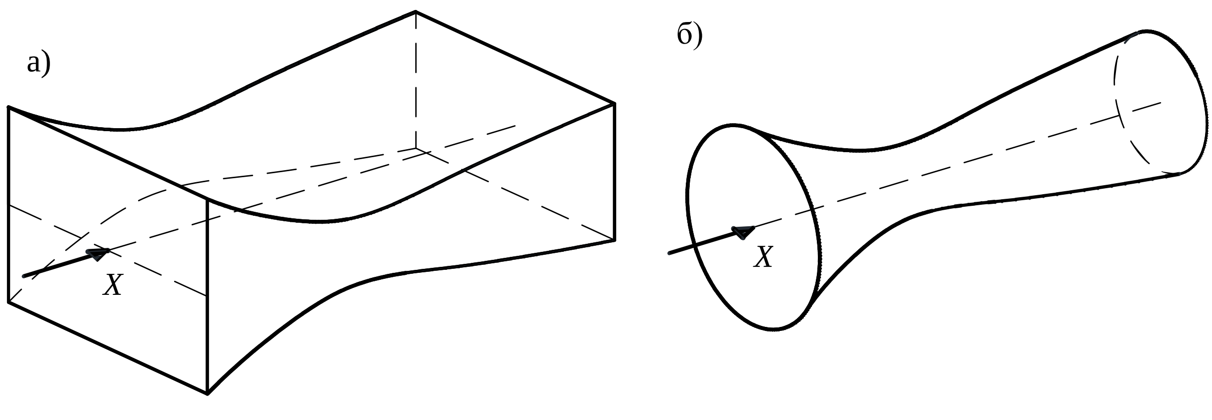

Рис. 1. Геометрия каналов для применения КОП
а, б - плоско- и осесимметричные каналы соответственно

Основным определением КОП является допущение, что все параметры газа в любом поперечном сечении канала (перпендикулярном оси X на рис. 1) остаются постоянными.

Понятно, что чем плавнее изменяется образующая, тем точнее будет это приближение.

Процедура спрямления каналов, т.е. преобразования изогнутых каналов к виду, показанному на рис. 1, описана в работе [5]. В этом случае точность КОП снижается, но по-прежнему остается приемлемой.

Отметим еще одну особенность, следующую из определений КОП, постоянство по сечению векторной величины – скорости. Из этого следует, что она постоянна не только по величине, но и по направлению. Следовательно, вектор скорости коллинеарен оси *X*. Это кажется не соответствующим действительности на стенках канала, но именно правильная интерпретация интегральных уравнений позволяет устранить кажущиеся противоречия.

Для вывода уравнений КОП рассмотрим уравнения (3)–(5) не для произвольного объёма, а для объёма между двумя торцевыми плоскостями (ТП), состоящими из левой (ЛТП) и правой (ПТП) и боковой поверхностью (БП) стенки, как показано на рис. 2.

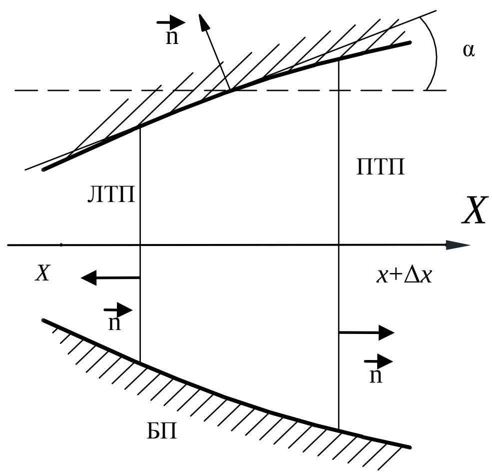

Рис. 2. Выделенный объём канала с условными обозначениями

Интегралы по замкнутой поверхности в (3)…(5) можно представить в виде

$$\oint dS = \int_{\text{ТП}} dS + \int_{\text{БП}} dS = \int_{\text{ЛТП}} dS + \int_{\text{ПТП}} dS + \int_{\text{БП}} dS\,. \quad (7)$$

Рассмотрим физический смысл поверхности интегралов в уравнениях (3) – (5). Первые интегралы в правых частях проставляют собой потоки массы, импульса и энергии, связанные с перетеканием газа через границы объема. Если перетекания через стенки канала нет, что чаще всего и бывает, то интегралы по БП надо приравнять к нулю.

Второй интеграл в правой части уравнения (4) представляет собой силу, с которой внешняя среда действует на газ с давлением *p*. Так как стенка остается неподвижной, следовательно, она действует на газ с такой же силой, как и газ действует на нее. Таким образом, второй поверхностный интеграл в (4) надо брать и по БП.

Второй поверхностный интеграл в уравнении (5) представляет собой работу силы, с которой стенка действует на газ. Так как перемещения стенки нет, то эта работа равна нулю и интеграл по БП в этом случае тоже равен нулю.

Найдем проекцию на ось *X* единственно остающегося интеграла по БП. Из рис. 2 видно, что $\text{Пр}_x \vec{n} = -\sin\alpha(x)$, где функция $\alpha(x)$ представляет собой острый угол между касательной к БП в данной точке и осью *X* (рис. 2). Тогда будет справедливо следующее равенство:

$$\text{Пр}_x \int_{\text{БП}} p\vec{n}dS = -\int_{\text{БП}} p\sin\alpha dS\,. \quad (8)$$

Таким образом, интегральные уравнения (3)–(5) для КОП можно записать в следующем виде

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = \int_{\text{ТП}} \rho\upsilon dS, & (9) \\ -\dfrac{\partial}{\partial t}\int \rho\upsilon dV = \int_{\text{ТП}} \rho\upsilon^2 dS + \int_{\text{ТП}} pdS - \int_{\text{БП}} p\sin\alpha dS, & (10) \\ -\dfrac{\partial}{\partial t}\int \rho edV = \int_{\text{ТП}} \rho e\upsilon dS + \int_{\text{ТП}} p\upsilon dS. & (11) \end{cases}$$

Учитывая направление внешней нормали (см. рис. 2), скалярные произведения в (3)–(5) на ЛТП будут иметь знак минус

$$\int\limits_{\text{ТП}} dS = \int\limits_{\text{ПТП}} dS - \int\limits_{\text{ЛТП}} dS\,. \tag{12}$$

Уравнения (9)–(12) вместе с уравнением (6) представляют собой замкнутую систему интегральных уравнений в КОП.

В случае меняющейся геометрии канала (например, при выгорании внутренней теплоизоляции в соплах двигателя), при впрыске или отсосе газа через стенки, при наличии теплообмена через них, в уравнения (9)…(11) надо вводить соответствующие интегралы по БП.

Дифференциальные уравнения

Для получения дифференциальных уравнений КОП из уравнений (9)–(12) будем полагать, что левая и правая торцевые плоскости проходят через точки x и $x+\Delta x$ соответственно (рис. 2). Далее будем сближать эти поверхности, т.е. $\Delta x \to 0$. Аппроксимируем входящие в (9) – (12) интегралы с точностью до Δx.

Очевидно, что объёмные интегралы от произвольной функции f с указанной точностью можно представить в следующем виде:

$$\int fdV \approx fS\Delta x\,, \tag{13}$$

где функция $S(x)$ имеет значение площади поперечного сечения канала в точке x.

Для интегралов по торцевым сечениям будет иметь

$$\int\limits_{\text{ЛТП}} fdS = f(x)S(x) \tag{14}$$

и

$$\int\limits_{\text{ПТП}} fdS = f(x+\Delta x)S(x+\Delta x). \tag{15}$$

Раскладывая выражение (15) в ряд Тейлора с точностью до Δx, получим

$$\int\limits_{\text{ПТП}} fdS \approx f(x)S(x) + \frac{\partial(fS)}{\partial x}\Delta x\,. \tag{16}$$

Учитывая формулы (12), (14) и (16), выражение для поверхностных интегралов по торцевым сечениям примет вид

$$\int\limits_{\text{ТП}} fdS \approx \frac{\partial(fS)}{\partial x}\Delta x\,. \tag{17}$$

Вычислим с точностью до Δx интеграл по БП в уравнении (10). Обозначим функцию, задающую образующую канала $F(x)$. С учетом того, что производная от нее есть tgα, можно найти выражение для sinα:

$$\sin\alpha = \frac{F'}{\sqrt{1+F'^2}}\,. \tag{18}$$

Рассмотрим два случая: плоско- и осесимметричный.

Таблица 1

<table>
<tr><th>Плоскосиметричный</th><th>Осесимметричный</th></tr>
<tr><td>Площадь боковых поверхностей можно выразить через длину дуги:
$$2l\int_{x}^{x+\Delta x}\sqrt{1+F'^2}dx,$$
где l – размер канала в направлении, перпендикулярном плоскости рис. 2.</td><td>Площадь боковой поверхности, образованная вращением графика функции F(x) вокруг оси x:
$$2\pi\int_{x}^{x+\Delta x}F\sqrt{1+F'^2}dx.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">С учетом (18) можно записать выражение для интеграла $\int\limits_{БП} p\sin\alpha dS$ в следующей форме:</td></tr>
<tr><td>$$2l\int_{x}^{x+\Delta x}pF'dx$$</td><td>$$2\pi\int_{x}^{x+\Delta x}pFF'dx$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Раскладывая эти выражения в ряд Тейлора с точностью до Δx, получим</td></tr>
<tr><td>$2lpF'\Delta x$</td><td>$2\pi pFF'\Delta x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Учитывая что функция $F(x)$ может быть выражена через функцию $S(x)$:</td></tr>
<tr><td>$$F(x)=\frac{S(x)}{2l}$$</td><td>$$F(x)=\sqrt{\frac{S(x)}{\pi}}$$</td></tr>
</table>

Окончательно получаем для обоих случаев

$$\int\limits_{БП} p\sin\alpha dS \approx p\frac{dS}{dx}\Delta x. \tag{19}$$

Таким образом, с учетом выражений (13), (17) и (19), система интегральных уравнений (9)…(11) перейдет в следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial t}(\rho S)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho\upsilon S)=0, & (20)\\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho\upsilon S)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho\upsilon^2 S)+S\frac{\partial p}{\partial x}=0, & (21)\\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e S)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho\upsilon e S)+\frac{\partial}{\partial x}(p\upsilon S)=0. & (22)\end{cases}$$

Если геометрия канала не меняется с течением времени $\partial S/\partial t=0$, то после преобразования получим систему дифференциальных уравнений для нестационарных течений в КОП для этого случая:

$$\begin{cases}S\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho\upsilon S)=0, & (23)\\ \frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0, & (24)\\ \frac{\partial e}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial e}{\partial x}+\frac{1}{\rho S}\frac{\partial}{\partial x}(p\upsilon S)=0. & (25)\end{cases}$$

Системы уравнений (20)…(22) и (23)…(25) должны быть дополнены уравнением состояния (6).

Стационарные течения

Для стационарных течений все параметры газа не зависят от времени $\partial/\partial t = 0$ и становятся функцией только *x*. Тогда, с введением функции обобщенного давления

$$\Re = \int \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}dx\,, \tag{26}$$

систему уравнений (23)…(25), (6) можно записать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\rho \upsilon S\right) = 0, & (27)\\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\upsilon^2}{2} + \Re\right) = 0, & (28)\\ \dfrac{d}{dx}\left(e + \dfrac{p}{\rho}\right) = 0, & (29)\\ e = \dfrac{\upsilon^2}{2} + \dfrac{1}{k-1}\dfrac{p}{\rho}. & (30) \end{cases}$$

Уравнение (27), являющееся следствием закона сохранения массы, представляет собой уравнение сохранения расхода. Следствие закона сохранения импульса, уравнение (28), называют *обобщенным уравнением Бернулли*. В научной и учебной литературе очень часто ошибочно его считают следствием закона сохранения энергии.

Преобразуем уравнение (29), являющееся следствием закона сохранения энергии. Для этого воспользуемся уравнением (28) и выражениями (26), (30). Тогда получим

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = 0\,. \tag{31}$$

После дифференцирования первого члена этого уравнения и дополнительных преобразований будем иметь

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\frac{p}{\rho^k}\right) = 0\,. \tag{32}$$

Из выражения (32) следует уравнение адиабаты Пуассона:

$$\frac{p}{\rho^k} = \mathrm{const}\,. \tag{33}$$

Отметим, что уравнение (33) является следствием закона сохранения энергии, хотя при его выводе использовались выражения и для других законов сохранения.

Применяя (33), можно вычислить обобщенное давление (26):

$$\Re = \frac{1}{k-1}\frac{p}{\rho}\,. \tag{34}$$

Имея в виду (33), (34), система уравнений (27)–(30) может быть записана в алгебраическом виде

$$\begin{cases} \rho \upsilon S = \mathrm{const}, & (35)\\ \dfrac{\upsilon^2}{2} + \dfrac{1}{k-1}\dfrac{p}{\rho} = \mathrm{const}, & (36)\\ \dfrac{p}{\rho^k} = \mathrm{const}. & (37) \end{cases}$$

Неизвестными в системе уравнений (35)–(37) являются параметры ρ, υ, p. Если необходимо найти какую-либо энергетическую характеристику, например, температуру, то для этого надо использовать уравнение состояния (30).

Система уравнений (35)–(37) известна [1]. Она является трансцендентной, и решить её можно только численными методами. Чаще всего её сводят к одному трансцендентному уравнению для числа Маха или скоростного коэффициента, решения которого давно затабулированы. Все остальные параметры выражаются через газодинамические функции.

Выводы

1. Из самых общих уравнений законов сохранения массы, импульса и энергии получены системы нестационарных интегральных и дифференциальных уравнений течения газа в КОП.

2. Полученные системы могут распространяться на случаи изменения геометрии канала с течением времени. Они могут использоваться для высокотемпературных многофазных течений в соплах ракетных двигателей с выгоранием заряда и внутренней теплозащиты.

3. Уравнение закона сохранения массы позволяет учитывать впрыск или отсос сплошной среды через стенки канала. Подобный эффект может учитываться при выпадении жидкой фазы на стенки [6].

4. Интегральная система уравнений дает возможность учитывать дополнительные процессы, например, такие как радиационный перенос энергии [7], фазовые переходы [8] и т.п.

5. Показано, что в стационарном случае уравнение Бернулли является следствием закона сохранения импульса, а не энергии, как это часто встречается в литературе. Следствием же закона сохранения энергии при принятых допущениях является уравнение адиабаты Пуассона.

Таким образом, КОП является мощным инструментом для первоначального расчета сложных течений в каналах с разнообразными дополнительными явлениями.

Работа выполнена при поддержке научно-технической программы Минобразования РФ «Научные исследования высшей школы по приоритетным направлениям науки и техники» [9].

Библиографический список

1. **Лойцянский, Л.Г.** Механика жидкости и газа / Л.Г. Лайцянский. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
2. **Ландау, Л.Д.** Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М Лифшиц // Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. Т. VI. – 736 с.
3. **Белоцерковский, О.М.** Метод крупных частиц в газодинамике / О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов. – М.: Наука, 1982. – 392 с.
4. **Давыдов, Ю.М.** Численное моделирование двухфазных течений в соплах методом крупных частиц / Ю.М. Давыдов, Е.А. Косолапов. – М.: Нац. академия прикладных наук, 1998. – 86 с.
5. **Абрамович, Г.Н.** Прикладная газовая динамика / Г.Н. Абрамович. – М.: Наука, 1969. – 824 с.
6. **Косолапов, Е.А.** Учет выпадения капель на стенки канала при математическом моделировании дисперсных течений в квазиодномерном приближении // Проблемы автоматизации исследований и проектных решений в судовой энергетике: межвуз. сб. науч. тр. / ГПИ. – Горький, 1990. С. 77–81.
7. **Клабуков, В.**Я. Численное исследование высокотемпературных дисперсных течений с излучением в соплах Лавля / В.Я. Клабуков**,** Е.А. Косолапов, Л.Т. Гребенщиков // Тепломассообмен – ММФ. Проблемные доклады. – Минск: Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова АН. БССР, 1988. С 153–164.
8. **Косолапов, Е.А.** Численное исследование двухфазного течения по тракту газотурбинного двигателя, форсированного впрыском воды / Е.А. Косолапов, А.В. Малахов, А.Г. Мореплавцев // Изв. вузов. Машиностроение, 1995. № 1–3. С. 40–43.

9. **Косолапов, Е.А.** Направления развития численного моделирования процессов в соплах ракетных двигателей на твердом топливе // Выставки подпрограммы 205 «Транспорт: тез. докл. отч. конф. Научно-технической программы Минобразования РФ «Научные исследования высшей школы по приоритетным направлениям науки и техники / Московский государственный авиационный институт. – М., 2002. С. 97–98.

Дата поступления
в редакцию 20.09.2013

E. Kosolapov[1], M. Solennikov[2]

QUASI ONE-DIMENSIONAL APPROACH GAS FLOWS CALCULATION IN POWER PLANT CHANNELS

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev[1],
OKBM Africantov[2]

Purpose: Special one-dimensional approximation to be called quasi-one is often used to describe the gas flow in channels with variable section. This approach takes into account the gas-penetration through the wall of the channel. The purpose of the paper is to derive more general equations using this approach with the possibility to account the other phenomena near channel walls.
Design/methodology/approach: The mathematical model equations are the laws of mass conservation, momentum and energy presented in integral form. These equations are written for the volume between two cross-sections and the walls of the channel.
Findings: The integral and differential equations to describe the gas flow in the quasi one-dimensional approximation for the transient and steady-state cases. These equations allow to take into account such effects as changing the channel geometry over time, the injection or suction gas through the channel wall. This approach can be extended to multi-phase flow.
Originality/value: The proposed approach allows to do preliminary calculations for a wider range of tasks.

Key words: gas flow, a special one-dimensional approximation, the channels of variable cross section, integral and differential equations, conditions at the walls.