

УДК 621.314

А.И. Байков

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРАНСФОРМАТОРОВ ПРИ АНАЛИЗЕ СИЛОВОЙ ЧАСТИ ЭЛЕКТРОПРИВОДОВ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Представлены математические описания и схемы замещения трансформаторов для характерных случаев моделирования силовой части электроприводов. Возможное насыщение магнитопроводов учтено с применением аналитической аппроксимации кривых намагничивания. Рассмотрены различные варианты вывода дифференциальных уравнений, воспроизводящих токи и напряжения, а также магнитный поток в стержне однофазного двухобмоточного трансформатора. Выражения для нелинейных собственных и взаимных индуктивностей обмоток схемы замещения трёхфазного трансформатора получены на основе матричного анализа электрических и магнитных цепей. Приведён пример вывода схемы замещения мощного однофазного многообмоточного трансформатора по данным опытов коротких замыканий пар обмоток с использованием взаимоиндуктивностей.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, трансформатор, схема замещения, кривая намагничивания, аналитическая аппроксимация.

Анализ силовой части электропривода обычно производится с использованием схем замещения, которые разрабатываются на основе математических соотношений, или моделей, отражающих протекание процессов в элементах оборудования с учётом существенных физических особенностей. Особое значение имеют трансформаторы, соединяющие отдельные части схем посредством электромагнитного взаимодействия без гальванического соединения. Плотно расположенные обмотки связываются основными магнитными потоками в ферромагнитных стержнях и потоками рассеяния. В отдельных режимах магнитопроводы могут насыщаться, из-за чего увеличиваются намагничивающие составляющие в токах обмоток, изменяя их величину и форму.

В паспортных данных на трансформаторы приводятся номинальные токи и напряжения обмоток, КПД, схемы соединения, габаритные размеры и масса. Обычно даются результаты опытов холостого хода и короткого замыкания обмоток. Для получения дополнительной информации приходится обращаться к заводским материалам и специальной справочной литературе. Полные данные по материалам и конструкции обмоток и магнитопроводов практически недоступны. Так что разработка математических описаний и схем замещения трансформаторов выполняется с учётом ограниченного объёма сведений.

Общий подход к разработке схем замещения трансформаторов можно представить на простейшем примере однофазного двухобмоточного трансформатора. Существо подхода не изменится при переходе к многообмоточным трансформаторам и схемам, содержащим несколько трансформаторных элементов. Процесс передачи энергии трансформатором в упрощённом случае представляется на основе применения уравнений электрического равновесия напряжений обмоток, сформированных на основе закона электромагнитной индукции, и уравнения намагничивания магнитопровода на основе закона полного тока:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{d\psi_1}{dt} + i_1 r_1, \\ u_2 &= \frac{d\psi_2}{dt} + i_2 r_2, \\ hl &= i_1 w_1 + i_2 w_2, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\Psi_1, \Psi_2, i_1, i_2, r_1, r_2$  – потокосцепления, токи, активные сопротивления и числа витков обмоток,  $h$  – напряжённость в равномерно распределённом основном потоке намагничивания;  $l$  – длина средней силовой линии магнитопровода.

Потокосцепления обмоток разделяются на две части – по основному потоку  $\Psi_\mu$  и потокам рассеяния  $\Psi_\sigma$ :

$$\Psi_1 = \Psi_{1\mu} + \Psi_{1\sigma}, \Psi_2 = \Psi_{2\mu} + \Psi_{2\sigma}$$

Потокосцепления по основному магнитному потоку представляются произведениями чисел витков обмоток на основной магнитный поток  $\Phi$ , а потокосцепления рассеяния – как произведения соответствующих токов на индуктивности и взаимоиндуктивности рассеяния

$$\Psi_{1\mu} = w_1 \Phi, \Psi_{2\mu} = w_2 \Phi, \Psi_{1\sigma} = L_{1\sigma} i_1 + L_{12\sigma} i_2, \Psi_{2\sigma} = L_{12\sigma} i_1 + L_{2\sigma} i_2$$

В опыте короткого замыкания пренебрегается малым основным потоком намагничивания и напряжение питаемой обмотки  $\Delta u_k$  приравнивается сумме падений напряжений от рассеяния и на активных сопротивлениях обмоток при протекании номинального тока. В случае питания первичной обмотки

$$\Delta u_{k1} = \left( L_{1\sigma} - 2 \frac{w_1}{w_2} L_{12\sigma} + \left( \frac{w_1}{w_2} \right)^2 L_{2\sigma} \right) \frac{di_1}{dt} + \left( r_1 + \left( \frac{w_1}{w_2} \right)^2 r_2 \right) i_1 = L'_k \frac{di_1}{dt} + r'_k i_1$$

где  $L'_k, r'_k$  – индуктивность и активное сопротивление короткого замыкания.

Индуктивность короткого замыкания с достаточной точностью учитывает падение напряжения на трансформаторе, обусловленное магнитными полями рассеяния. Во всяком случае, у разработчика силовой части электропривода нет данных, позволяющих уточнить значения индуктивностей рассеяния. В опыте короткого замыкания не проявляются потери в магнитопроводе от вихревых токов из-за малой величины магнитного потока. Поэтому имеет смысл увеличить это сопротивление до некоторой эквивалентной величины  $r_{ecv}$ , исходя из условия выделения дополнительных потерь при протекании рабочего тока, соответствующих потерям в опыте холостого хода.

Использование индуктивности рассеяния и активного сопротивления, определяемых в опытах короткого замыкания и холостого хода, позволяет заменить трансформатор с двумя разделёнными цепями односвязной схемой, предусматривающей объединение первичной и вторичной сторон с учётом коэффициента трансформации [1]. Однако более важно при рассмотрении силовых схем с вентильными преобразователями, электродвигателями и трансформаторными элементами сохранить гальваническое разделение электрических цепей в схеме замещения таким же, как в принципиальной схеме. С этой целью предлагается распределить эти компоненты между первичной и вторичной цепями так, чтобы их влияние согласовывалось с данными опытов. Например, в случае однофазного двухобмоточного трансформатора представить эти параметры в виде сумм:

$$R_1 = 0,5r'_{ecv}, R_2 = \left( \frac{w_1}{w_2} \right)^2 0,5r'_{ecv}, L_1 = 0,5L'_k, L_2 = 0,5 \left( \frac{w_1}{w_2} \right)^2 L'_k \quad (2)$$

В таком случае уравнения электрического равновесия обмоток трансформатора и намагничивания его магнитопровода с выражением величины магнитного потока и напряжённости через индукцию  $b$ :

$$\Phi = Sb, h = \frac{b}{\mu} \quad (3)$$

где  $S$  – площадь сечения магнитопровода;  $\mu$  – абсолютная магнитная проницаемость, могут быть представлены:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= w_1 S \frac{db}{dt} + L_1 \frac{di_1}{dt} + i_1 R_1, \\ u_2 &= w_2 S \frac{db}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 R_2, \\ \frac{l}{S\mu} b &= i_1 w_1 + i_2 w_2, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Величина и форма токов обмоток существенно изменяются при насыщении магнитопровода трансформатора, которое проявляется как нелинейная зависимость индукции от напряжённости магнитного поля (кривая намагничивания). Она получается из данных опыта холостого хода и может представляться различными способами. Удобно применение аналитической аппроксимации, например, с помощью гиперболической функции:

$$h = \alpha \sinh(\beta b) = \frac{\alpha (\exp(\beta b) - \exp(-\beta b))}{2}, \quad (5)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – коэффициенты аппроксимации кривой намагничивания. Можно отметить, что уменьшением  $\alpha$  можно достичь более резкого колена у формируемой кривой, а уменьшением  $\beta$  можно приподнять эту кривую в область больших значений.

Например, коэффициенты  $\alpha=30$  А/м и  $\beta=3.5$  1/Тл определены для однофазного трансформатора с параметрами:  $l = 0,59$  м;  $S = 0,0025$  м<sup>2</sup>;  $w_1=370$ ;  $w_2 = 180$ ;  $L_1= 0,0016$  Гн;  $L_2 = 0,0004$  Гн;  $R_1=1$  Ом;  $R_2=3,6$  Ом. Они обеспечивают практически приемлемое представление его кривой намагничивания (рис. 1).

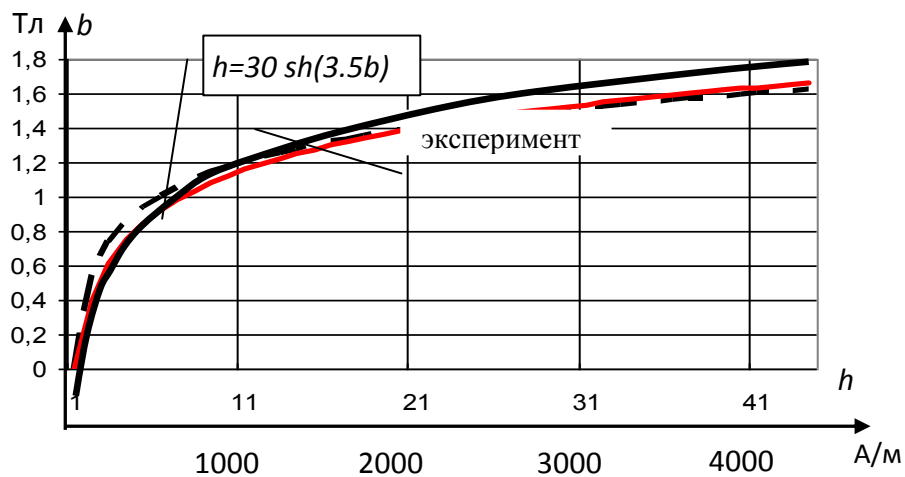


Рис. 1. Аппроксимация кривой намагничивания однофазного трансформатора гиперболическим синусом

Применение аналитической аппроксимации кривой намагничивания трансформатора позволяет вывести на основании (2) дифференциальные уравнения относительно независимых токов обмоток либо индукции и одного из токов. Так, ток первичной индукции выражается через индукцию и ток вторичной обмотки с использованием третьего уравнения (2). При подключённом к зажимам первичной обмотки источнике синусоидальной ЭДС получается уравнение (3) относительно напряжения  $u_2$  на зажимах вторичной обмотки:

$$\begin{bmatrix} w_1 S + \frac{L_1 l \alpha \beta}{w_1} \cosh(\beta b) & -\frac{L_2 w_2}{w_1} \\ w_2 S & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} b \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m \sin(\omega t) - \frac{R_1 l \alpha}{w_1} \sinh(\beta b) + \frac{R_1 w_2}{w_1} i_2 \\ u_2 - R_2 \cdot i_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

где учтено выражение тока первичной обмотки:

$$i_1 = \frac{l}{w_1} \alpha \cdot \sinh(\beta \cdot b) - \frac{w_2}{w_1} i_2, \tag{7}$$

а также дифференцирование (3) по правилу вычисления производной сложной функции:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{l \alpha}{w_1} \sinh(\beta \cdot b) - \frac{w_2}{w_1} i_2 \right) = \frac{l \alpha}{w_1} \frac{d(\sinh(\beta \cdot b))}{d(\beta \cdot b)} \frac{d(\beta \cdot b)}{dt} - \frac{w_2}{w_1} \frac{di_2}{dt} = \frac{l \alpha \beta}{w_1} \cosh(\beta \cdot b) \frac{db}{dt} - \frac{w_2}{w_1} \frac{di_2}{dt}.$$

В уравнении (6) производная напряжения индукции по основному потоку используется без дополнительных преобразований и интегрирования аппроксимирующих зависимостей, что является благоприятным фактором для численного интегрирования дифференциального уравнения. Дифференцирование же данной зависимости касается определения падения напряжения от рассеяния, которое по величине существенно меньше напряжения индукции по основному потоку. Однако наличие в числе независимых переменных индукции магнитного поля не вполне удобно для разрешения уравнений электрических цепей, поэтому более предпочтительно разрешать уравнения (4) относительно токов.

Из третьего уравнения (4) выражается индукция основного магнитного поля и дифференцируется

$$\frac{db}{dt} = \frac{w_1}{\beta \alpha l \cosh(\beta b)} \frac{di_1}{dt} + \frac{w_2}{\beta \alpha l \cosh(\beta b)} \frac{di_2}{dt},$$

что позволяет выразить напряжения обмоток трансформатора через токи как для обычной электрической цепи

$$U = L \frac{d}{dt} I + RI, \tag{8}$$

где

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_1 + \frac{w_1^2 S}{\beta \alpha l \cosh(\beta b)} & \frac{w_1 w_2 S}{\beta \alpha l \cosh(\beta b)} \\ \frac{w_1 w_2 S}{\beta \alpha l \cosh(\beta b)} & L_2 + \frac{w_2^2 S}{\beta \alpha l \cosh(\beta b)} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}.$$

При условии подключения уравнений электрического равновесия внешних цепей дифференциальное уравнение (8), отражающее электромагнитные процессы в рассматриваемом трансформаторе, становится разрешимым. Этому уравнению соответствует схема замещения (рис. 2) с нелинейными индуктивностями и взаимными индуктивностями, учитывающими степень насыщения магнитопровода по кривой намагничивания.

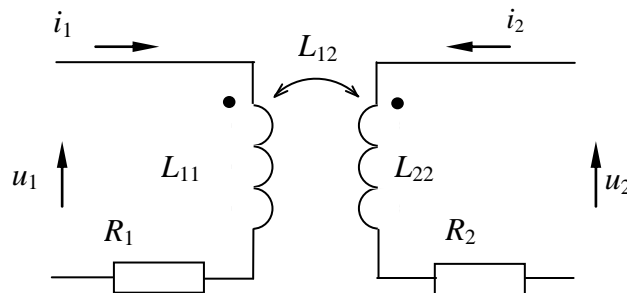


Рис. 2. Схема замещения двухобмоточного трансформатора

Параметры схемы замещения (рис. 2) определяются выражениями соответствующих матриц в (5) и, в том числе:

$$L_{11} = L_1 + \frac{w_1^2 S}{\beta \alpha l \cosh(\beta b)}, L_{12} = \frac{w_1 w_2 S}{\beta \alpha l \cosh(\beta b)}, L_{22} = L_2 + \frac{w_2^2 S}{\beta \alpha l \cosh(\beta b)} \quad (9)$$

Дифференциальное уравнение (8) имеет нелинейные коэффициенты, его интегрирование предусматривает последовательное определение сначала напряжённости  $h$  по третьему уравнению (1), затем индукции  $b$  с применением обратной гиперболической функции и функции **sign** определения знака величины

$$b = \frac{1}{\beta} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{h}{\alpha}\right) = \frac{\operatorname{sign}(h)}{\beta} \ln \left( \frac{|h|}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{|h|}{\alpha}\right)^2 + 1} \right), \quad (10)$$

далее вычисления и обращения матрицы  $L$  и получения величин правых частей уравнения

$$\frac{d}{dt} I = L^{-1}(U - RI) \quad (11)$$

Схема рис. 3 легко встраивается в общую схему замещения устройства. К её зажимам могут подключаться любые элементы цепей и, в том числе, силовые вентили. Первичная и вторичная цепи оказываются гальванически развязаны так же, как в принципиальной схеме.

Проверка достоверности этой модели на характерном примере однополупериодного выпрямителя с трансформатором, параметры которого приводились ранее. Воспроизведение процесса с глубоким постоянным подмагничиванием показало (рис. 3), что принятая аппроксимация не приводит к затруднениям при численном интегрировании. Расчётная диаграмма первичного тока в этом процессе совпадает в пределах точности определения исходных данных с экспериментальной кривой первичного тока в переходном процессе переключения трансформатора с режима холостого хода на режим однополупериодного выпрямления.

Насыщение можно исключить из рассмотрения, задавшись некоторой постоянной величиной магнитной проницаемости  $\mu$ . Тогда выражения индуктивностей, отражающих электромагнитное взаимодействие обмоток, принимают привычный вид

$$L_{11} = L_1 + \frac{w_1^2 S \mu}{l}, L_{12} = \frac{w_1 w_2 S \mu}{l}, L_{22} = L_2 + \frac{w_2^2 S \mu}{l} \quad (12)$$

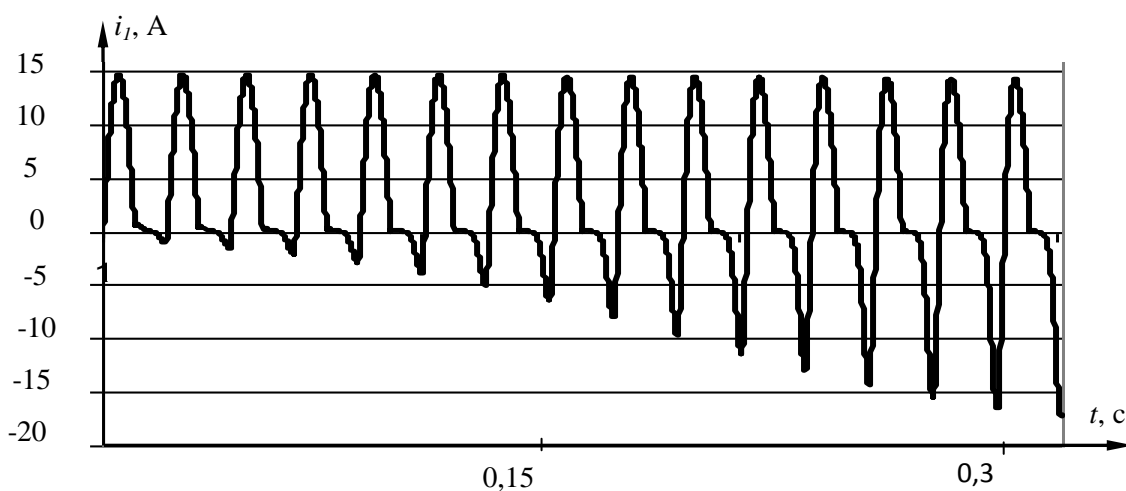


Рис. 3. Расчётная диаграмма первичного тока при включении однополупериодного выпрямления

Практический интерес имеет представление наиболее распространённых трёхфазных трансформаторов. Рассмотрим в качестве примера широко применяемый трёхфазный стержневой трансформатор с соединением обмоток “звезда-звезда“, у которого уравнения электрического равновесия фазных обмоток имеют вид

$$\begin{aligned} U_1 &= W_1 \frac{d}{dt} \Phi + L_{1\sigma} \frac{d}{dt} I_1 + R_{1e} I_1, \\ U_2 &= W_2 \frac{d}{dt} \Phi + L_{2\sigma} \frac{d}{dt} I_2 + R_{2e} I_2 \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$U_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{bmatrix}, I_1 = \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{12} \\ i_{13} \end{bmatrix}, I_2 = \begin{bmatrix} i_{21} \\ i_{22} \\ i_{23} \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix}, W_1 = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 & 0 \\ 0 & w_{12} & 0 \\ 0 & 0 & w_{13} \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} w_{21} & 0 & 0 \\ 0 & w_{22} & 0 \\ 0 & 0 & w_{23} \end{bmatrix},$$

При обозначении векторов и матриц первый индекс соответствует стороне трансформатора (первичная, вторичная), а второй – фазе или стержню. Влияние магнитных полей рассеяния учитывается приближённо, как и в предыдущем случае однофазного трансформатора: индуктивности короткого замыкания делятся между первичными и вторичными обмотками с учётом коэффициента трансформации. Они представляются диагональными матрицами индуктивностей рассеяния  $L_{1\sigma}$  и  $L_{2\sigma}$ , как и матрицы эквивалентных активных сопротивлений обмоток  $R_{1e}$  и  $R_{2e}$ , приведённые к числам витков соответствующих обмоток.

Для разрешения исходных уравнений (13) относительно напряжений на зажимах обмоток и независимых переменных применяется метод контурных токов. Выбираются независимые контура, представляемые матрицами

$$H_{e1} = H_{e2} = H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

т.е. токи первой и второй фаз составляют вектора контурных токов  $I_{1h}$  и  $I_{2h}$ . Через них с использованием транспонированных матриц независимых контуров выражаются вектора токов обмоток

$$I_1 = H' I_{1h}, I_2 = H' I_{2h}. \quad (15)$$

Уравнения (13) умножаются на матрицы независимых контуров, и с учётом (15) получаются контурные уравнения относительно линейных внешних напряжений  $U_{1X}$  и  $U_{2X}$  на зажимах обмоток

$$\begin{aligned} HW_1 \frac{d}{dt} \Phi + L_{1\sigma h} \frac{d}{dt} I_{1h} + R_{1h} I_{1h} &= U_{1X}, \\ HW_2 \frac{d}{dt} \Phi + L_{2\sigma h} \frac{d}{dt} I_{2h} + R_{2h} I_{2h} &= U_{2X}, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $L_{1\sigma h} = HL_{1\sigma}H'$ ,  $R_{1h} = HR_1H'$ ,  $L_{2\sigma h} = HL_{2\sigma}H'$ ,  $R_{2h} = HR_2H'$  - контурные индуктивности и активные сопротивления.

Напряженности магнитного поля в стержнях и токи обмоток связываются, согласно обходам магнитных контуров, по закону полного тока:

$$H_{cc} L_{cc} H_{\mu} = H_{cc} (W_1 I_1 + W_2 I_2), \quad (17)$$

где  $H_{cc} = H$  - матрица магнитных контуров трёхстержневого трансформатора,

$L_{cc} = \begin{bmatrix} L_{cc.1} & 0 & 0 \\ 0 & L_{cc.2} & 0 \\ 0 & 0 & L_{cc.3} \end{bmatrix}$  - диагональная матрица длин силовых линий стержней;  $H_{\mu}$  - вектор напряжённостей магнитного поля стержней. Следует отметить, что в данном случае совпа-

дают конфигурации электрических схем обмоток и магнитной цепи трансформатора, что обеспечивает соответствие размеров векторов и матриц. При различиях в топологии этих схем потребуется ряд дополнительных матричных преобразований.

При дифференцировании уравнения полного тока (17) оказываются связаны производные напряжённостей и токов обмоток

$$HL_{cc} \frac{d}{dt} H_{\mu} = HW_1 \frac{d}{dt} I_1 + HW_2 \frac{d}{dt} I_2 \quad (18)$$

Для выражения взаимозависимости производных магнитных потоков стержней и токов обмоток в контурных уравнениях (18) следует перейти от производных напряжённостей к производным индукций и затем магнитных потоков. Это выполняется с использованием понятия дифференциальной магнитной проницаемости  $\mu_{\delta}$  [2]:

$$\mu_a = \frac{b}{h}, \mu_{\delta} = \frac{db}{dh}, \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\mu_{\delta}} \frac{db}{dt} \quad (19)$$

Магнитные потоки стержней

$$\Phi = S_{cc} B_{\mu} \quad (20)$$

$$S_{cc} = \begin{bmatrix} S_{cc,1} & 0 & 0 \\ 0 & S_{cc,2} & 0 \\ 0 & 0 & S_{cc,3} \end{bmatrix}$$

где  $S_{cc}$  - диагональная матрица площадей поперечных сечений стержней;  $B_{\mu}$  - вектор индукций стержней.

Магнитные потоки выражаются через контурные потоки

$$\Phi = H' \Phi_h \quad (21)$$

Из (18) с учётом (15, 19, 20, 21) получается соотношение, связывающее производные потоков стержней и контурных токов обмоток

$$\frac{d}{dt} \Phi = H' \frac{d}{dt} \Phi_h = H' R_{\delta h}^{-1} \left( HW_1 H' \frac{d}{dt} I_{1h} + HW_2 H' \frac{d}{dt} I_{2h} \right) \quad (22)$$

$$R_{\delta h} = H \begin{bmatrix} \frac{l_{cc1}}{S_1 \mu_{\delta 1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_{cc2}}{S_2 \mu_{\delta 1}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_{cc3}}{S_3 \mu_{\delta 3}} \end{bmatrix} H'$$

где  $R_{\delta h}$  - матрица контурных дифференциальных магнитных сопротивлений стержней.

С учётом (22) уравнения (16) преобразуются к виду

$$L_{T\delta.h} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{1h} \\ I_{2h} \end{bmatrix} + R_{Th} \begin{bmatrix} I_{1h} \\ I_{2h} \end{bmatrix} = U_{Xh}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} L_{1k\delta.h} &= L_{1kh} + HW_1 H' R_{\delta h}^{-1} HW_1 H', \quad L_{12k\delta.h} = HW_2 H' R_{\delta h}^{-1} HW_1 H', \\ L_{1k\delta.h} &= L_{2kh} - HW_2 H' R_{\delta h}^{-1} HW_2 H' \\ L_{T\delta.h} &= \begin{bmatrix} L_{1\delta.h} & L_{12\delta.h} \\ L_{12\delta.h} & L_{2\delta.h} \end{bmatrix}, \quad R_{Th} = \begin{bmatrix} R_{1h} & 0 \\ 0 & R_{2h} \end{bmatrix}, \quad U_{Xh} = \begin{bmatrix} U_{1X} \\ U_{2X} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Уравнению (16) трансформатора соответствует схема замещения, представленная на рис.4. Параметры на приведённой схеме определяются дифференциальной магнитной проницаемостью материала и геометрическими размерами стержней, числами витков обмоток и

данными опыта короткого замыкания обмоток трансформатора. Во многих переходных и аварийных режимах работы стержни магнитопровода трансформатора насыщаются и магнитные проницаемости, а соответственно и матрицы индуктивностей в (19) в отдельный момент времени следует считать зависящими от магнитного состояния каждого из стержней. Это состояние определяется либо напряжённостью, либо индукцией в стержне. При условии пренебрежения гистерезисом одна из этих величин однозначно выражается через другую.

Особенностью схемы замещения трёхфазного трансформатора (рис. 4) является возможность её применения для анализа силовых схем с гальванически не связанными частями – подсхемами. При совместном рассмотрении подсхем удаётся осуществлять расчёт сложной многоконтурной схемы без приведения токов и напряжений силовых цепей к одному общему уровню.

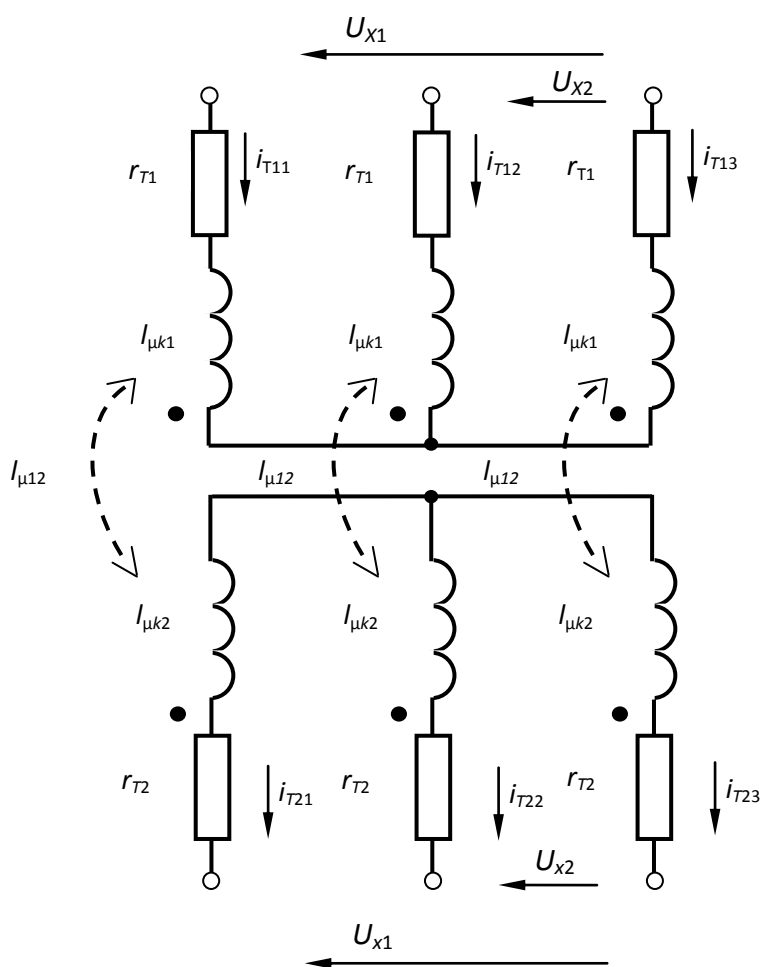


Рис. 4. Схема замещения трёхфазного стержневого трансформатора

В некоторых случаях не возникает необходимости в детальном анализе процессов на одной из сторон силового трансформатора. Тогда удобно исключить из рассмотрения эту сторону с соответствующим эквивалентным изменением структуры и параметров остающейся стороны. Осложнения возникают при анализе схем с многообмоточными трансформаторами, когда приходится учитывать распределение влияния исключаемых цепей на остающиеся цепи.

В качестве подобного примера взят многообмоточный трансформатор выпрямительно-инверторного преобразователя ВИП-2200 магистрального электровоза переменного тока [3]. Упрощенная схема силовых цепей одного из четырёх ВИПов, работающих симметрично и питаемых одним из двух трансформаторов, установленных на электровозе, представлена на рис. 5.



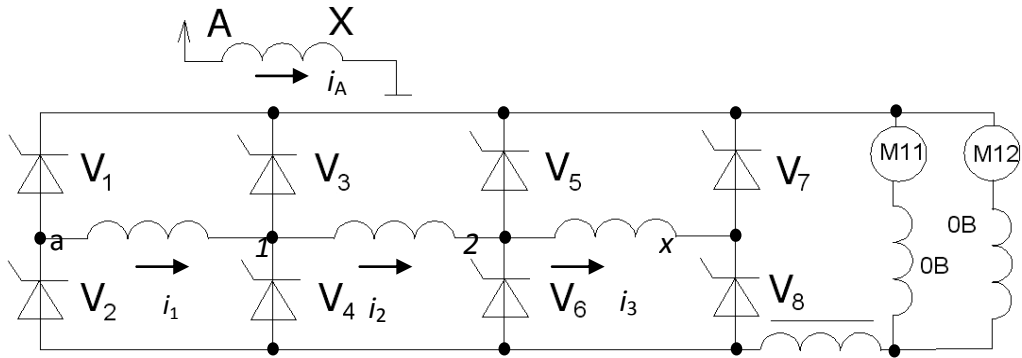


Рис. 5. Упрощенная схема силовых цепей ВИП-2200

Уравнения электрического равновесия пары обмоток: первичной  $A-X$  и первой секции вторичной  $a-1$ , аналогичные (1), будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} u_{AX} &= w_A S \frac{db}{dt} + L_{A\sigma} \frac{di_A}{dt} + L_{A1\sigma} \frac{di_1}{dt} + L_{A2\sigma} \frac{di_2}{dt} + L_{A3\sigma} \frac{di_3}{dt} + R_A i_A, \\ u_{a1} &= w_1 S \frac{db}{dt} + L_{1\sigma} \frac{di_1}{dt} + L_{1A\sigma} \frac{di_A}{dt} + L_{12\sigma} \frac{di_2}{dt} + L_{13\sigma} \frac{di_3}{dt} + R_1 i_1, \\ &\dots \\ hl &= w_A i_A + w_1 i_1 + w_2 i_2 + w_3 i_3, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где  $S, l, w_A, w_1, w_2, w_3$  – площадь сечения и длина средней силовой линии магнитопровода и числа витков отдельных обмоток;  $L_{A\sigma}, L_{A1\sigma}$  – индуктивности и взаимоиндуктивности по потоку рассеяния;  $R_A, R_1$  – активные сопротивления обмоток;  $b, h$  – индукция и напряжённость магнитного поля в сердечнике;  $u_{AX}, u_{a1}, i_A, i_1, i_2, i_3$  – напряжения на зажимах и токи обмоток.

При пренебрежении намагничивающим током выполняется следующее соотношение между токами первичной обмотки и токами секций вторичной обмотки

$$hl = w_A i_A + w_1 i_1 + w_2 i_2 + w_3 i_3 = 0.$$

Ток первичной обмотки выражается через токи секций вторичной обмотки

$$i_A = -\frac{w_1}{w_A} i_1 - \frac{w_2}{w_A} i_2 - \frac{w_3}{w_A} i_3. \quad (25)$$

Из уравнений электрического равновесия первой и последующих секций вторичной обмотки вычитается с учётом коэффициента трансформации уравнение первичной обмотки, в результате чего исключается ЭДС индукции по потоку намагничивания. С учётом (21) после ряда группировок и преобразований получаются уравнения

$$\begin{aligned} u_{a1} &= \frac{w_1}{w_A} u_{AX} + L_{1e} \frac{di_1}{dt} + L_{12e} \frac{di_2}{dt} + L_{13e} \frac{di_3}{dt} + R_{1e} i_1, \\ u_{a2} &= \frac{w_2}{w_A} u_{AX} + L_{2e} \frac{di_2}{dt} + L_{12e} \frac{di_1}{dt} + L_{13e} \frac{di_3}{dt} + R_{1e} i_1, \\ u_{a3} &= \frac{w_3}{w_A} u_{AX} + L_{3e} \frac{di_3}{dt} + L_{12e} \frac{di_1}{dt} + L_{13e} \frac{di_2}{dt} + R_{1e} i_1, \end{aligned} \quad (26)$$

которым соответствует схема замещения (рис. 6).

С принятием некоторых допущений, связанных в основном с отсутствием данных по опытам коротких замыканий некоторых частей обмоток трансформатора (табл. 1), получены выражения и численные значения параметров схемы замещения (рис. 6), приведённые в табл. 2. Здесь выполнено приведение параметров четырёх одинаковых цепей тяговых двигателей, питаемых от одного трансформатора ОДЦ7-5000/25, к одной цепи, эквивалентной по мощности. В схеме (рис. 6) функция  $u_{AX}$  изменения напряжения на зажимах первичной обмотки считается известной, т.е. напряжение в контактном проводе должно быть задано.

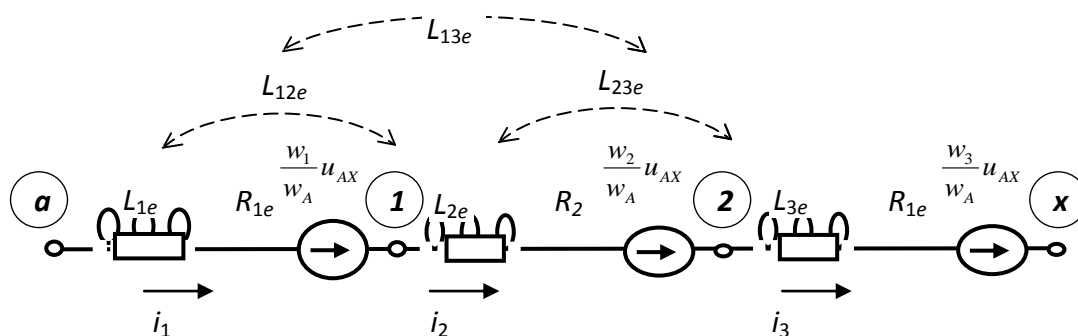


Рис. 6. Схема замещения вторичной стороны многообмоточного трансформатора

Таблица 1

Данные опытов короткого замыкания трансформатора ОДЦ7-5000/25

Питаемые обмотки	Замыкаемые секции	Выражения для приведённых индуктивностей	Индуктивности к.з., мГн	Активные сопротивления к.з., мОм
A-X	(a-1),(a-1)'	$\frac{w_1^2}{w_A^2} L_{A\sigma} - 2 \frac{w_1}{w_A} L_{A1\sigma} + L_{1\sigma}$	$L'_{кз\_A-1} = 0,024$	1,25
A-X	(1-2),(1-2)'	$\frac{w_2^2}{w_A^2} L_{A\sigma} - 2 \frac{w_2}{w_A} L_{A2\sigma} + L_{2\sigma}$	$L'_{кз\_A-2} = 0,024$	1,25
A-X	(2-x),(2-x)'	$\frac{w_3^2}{w_A^2} L_{A\sigma} - 2 \frac{w_3}{w_A} L_{A3\sigma} + L_{3\sigma}$	$L'_{кз\_A-3} = 0,042$	2,74
(a-1),(a-1)'	(1-2),(1-2)'	$L_{1\sigma} - 2 \frac{w_1}{w_2} L_{12\sigma} + \frac{w_1^2}{w_2^2} L_{2\sigma}$	$L'_{кз\_1-2} = 0,021$	1,42
(a-1),(a-1)'	(2-x),(2-x)'	$L_{1\sigma} - 2 \frac{w_3}{w_2} L_{13\sigma} + \frac{w_1^2}{w_3^2} L_{3\sigma}$	$L'_{кз\_1-3} = 0,036$	2,00
(1-2),(1-2)'	(2-x),(2-x)'	$L_{2\sigma} - 2 \frac{w_3}{w_2} L_{23\sigma} + \frac{w_2^2}{w_3^2} L_{3\sigma}$	$L'_{кз\_2-3} = 0,036$	2,00

Таблица 2

## Параметры схемы замещения трансформатора ОДЦ7-5000/25

Параметр	Выражение	Значение
$L_1$	$\frac{w_1^2}{w_A^2} L_{A\sigma} - 2 \frac{w_1}{w_A} L_{1A\sigma} + L_{1\sigma} = L''_{кз\_A-1}$	0.024 мГн
$L_{12}$	$\frac{1}{2} \left( L_{12\sigma} - 2 \frac{w_1}{w_A} L_{A2\sigma} + L_{12\sigma} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{w_1 w_2}{w_A^2} L_{A\sigma} - 2 \frac{w_2}{w_A} L_{1A\sigma} + \frac{w_1 w_2}{w_A^2} L_{A\sigma} \right) =$ $= \frac{1}{2} (L'_{кз\_1-2}) + \frac{1}{2} \frac{w_1}{w_2} (L''_{кз\_A-2})$	0.022 мГн
$L_{13}$	$\frac{1}{2} \left( L_{13\sigma} - 2 \frac{w_1}{w_A} L_{A3\sigma} + L_{13\sigma} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{w_1 w_3}{w_A^2} L_{A\sigma} - 2 \frac{w_3}{w_A} L_{1A\sigma} + \frac{w_1 w_3}{w_A^2} L_{A\sigma} \right) =$ $= \frac{1}{2} (L'_{кз\_1-3}) + \frac{1}{2} \frac{w_1}{w_3} (L''_{кз\_A-3})$	0.029 мГн
$L_2$	$\frac{w_2^2}{w_A^2} L_{A\sigma} - 2 \frac{w_2}{w_A} L_{2A\sigma} + L_{2\sigma} = L''_{кз\_A-2}$	0.024 мГн
$L_{23}$	$\frac{1}{2} \left( L_{23\sigma} - 2 \frac{w_2}{w_A} L_{A3\sigma} + L_{23\sigma} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{w_2 w_3}{w_A^2} L_{A\sigma} - 2 \frac{w_3}{w_A} L_{2A\sigma} + \frac{w_2 w_3}{w_A^2} L_{A\sigma} \right) =$ $= \frac{1}{2} (L'_{кз\_2-3}) + \frac{1}{2} \frac{w_2}{w_3} (L''_{кз\_A-3})$	0.029 мГн
$L_3$	$\frac{w_3^2}{w_A^2} L_{A\sigma} - 2 \frac{w_3}{w_A} L_{3A\sigma} + L_{3\sigma} = L''_{кз\_A-3}$	0.042 мГн
$R_1$	$R''_{кз\_A-1}$	1.25 мОм
$R_2$	$R''_{кз\_A-2}$	1.25 мОм
$R_3$	$R''_{кз\_A-3}$	1.42 мОм

Приведённые характерные примеры вывода математических описаний и схем замещения трансформаторов могут быть применены при анализе различных силовых схем электроприводов. Они позволяют учесть влияние процессов функционирования трансформаторов с различной степенью детализации и, в то же время, совместимы по токам и напряжениям на зажимах с математическими представлениями других элементов силового оборудования.

## Библиографический список

1. **Лейтес, Л.В.** Схемы замещения многообмоточных трансформаторов / Л.В. Лейтес, А.М. Пинцов. – М.: Энергия, 1974.
2. Основы теории цепей: учебник для вузов / Г.В. Зевеке, П.А.Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. – 5-е изд. перераб. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.

3. **Бочаров, В.И.** Магистральные электровозы переменного тока / В.И. Бочаров, В.И. Попов, Б.А. Гушканов. – М.: Транспорт, 1976.

*Дата поступления  
в редакцию 11.12.2013*

**A.I. Bayakov**

**MATHEMATICAL MODELS OF TRANSFORMERS  
WHEN ANALYZING POWER PART OF ELECTRIC DRIVES**

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

**Purpose:** the mathematical description and equivalent circuit transformers for specific cases modeling of the power part of the actuator are presented.

**Methods:** the possible saturation of the magnetic circuits is considered with the use of analytical approximation of magnetization curves, matrix analysis multi-loop electrical and magnetic circuits is applied.

**Finding (Results):** the output options for differential equations simulating currents and voltage together with a magnetic flux in the core of single-phase two-windings transformer are considered. The expressions are obtained for the nonlinear own and mutual inductances of windings of equivalent circuit in three-phase the transformer. An example of the equivalent circuit output of a powerful single-phase multi-winding transformer is given according to the experiments of short circuits pair windings usings mutual inductance.

**Application:** the analysis of quality indicators of electric drives performarnce is provided by power schemes mathematical simulation.

*Key words:* mathematical modeling, transformer, equivalent circuit, the magnetization curve, analytical approximation.