

УДК: 537.874

В.В. Зимин

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В НЕИЗОЛИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

Дзержинский политехнический институт (филиал) НГТУ им. Р.Е. Алексеева

Исследованы граничные условия в неизолированной системе на примере углового конденсатора. Проведено сравнение граничных условий в конденсаторе с диэлектриком для случаев фиксированного заряда на обкладках (изолированная система) и фиксированной разности потенциалов на них (неизолированная система). Показано, что в неизолированной системе при введении диэлектрика имеет местонепрерывность нормальной составляющей и разрыв тангенциальной составляющей вектора напряженности электрического поля, увеличение напряженности электрического поля и энергии в ней. Получены аналитические зависимости, описывающие поведение вектора электрического поля на границе раздела двух сред в неизолированной системе и, в частности, особенности преломления электрического поля в такой системе. Доказано значительное увеличение тангенциальной составляющей вектора напряженности электрического поля в неизолированной системе. Наличие в электрическом поле углового конденсатора большой тангенциальной составляющей позволяет использовать такие конденсаторы в широком спектре радиотехнических устройств.

Ключевые слова: граничные условия, конденсаторы, электрическое поле, изолированные системы, неизолированные системы, тангенциальная составляющая, нормальная составляющая.

Введение

Рассмотрение вопросов прохождения волны из одной среды в другую требует использования граничных условий по нормальной и тангенциальной составляющей электрического поля.

Традиционно считается, что на границе раздела двух диэлектриков сохраняется неизменной плотность свободных зарядов, что подразумевает сохранение значения напряженности электрического поля $E_0 = 4\pi\sigma_0$ [1, 2].

Другими словами, предполагается, что в системе нет источников энергии, которые могли бы внести изменения в эти начальные условия. Система считается изолированной от внешних влияний.

Однако имеются практические случаи, когда в системе появляется внешний источник энергии, что приводит к изменению граничных условий в системе. Граничные условия, которые были выведены для изолированных систем, в новой постановке прохождения электромагнитной волны через границу двух сред не работают.

Простейшим примером неизолированной системы может служить конденсатор, на котором от внешнего источника поддерживается напряжение, которое было на нём до введения в воздушный зазор диэлектрика. В такой среде поведение нормальной и тангенциальной составляющей вектора электрического поля после преломления не могут описываться стандартными граничными условиями.

Учет этих обстоятельств открывает новые перспективы применения неизолированных систем.

Граничные условия в конденсаторе

Пусть мы имеем плоский конденсатор емкостью C_0 с воздушным промежутком между обкладками ($\epsilon_0 = 1$), зарядом Q_0 , напряжением u_0 , расстоянием между обкладками d и электрическим полем $E_0 = \frac{u_0}{d}$.

Поместим между обкладками конденсатора диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 и рассмотрим, как изменится электрическое поле в конденсаторе при внесении диэлектрика. Рассмотрение будем проводить для двух случаев:

- зафиксируем заряд Q на обкладках конденсатора (обкладки конденсатора отключены от источника напряжения);
- зафиксируем напряжение u на емкости (обкладки конденсатора подключены к источнику напряжения).

1. *Зафиксируем заряд Q на обкладках конденсатора (обкладки конденсатора отключены от источника напряжения).*

Известно, что при введении в конденсатор диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_1 его емкость увеличивается также в ε_1 раз [1]. Следовательно, емкость конденсатора с диэлектриком становится равной $C_1 = \varepsilon_1 C_0$. Но, с другой стороны, $C = \frac{Q}{u}$ и, если мы будем поддерживать постоянным заряд на конденсаторе, то увеличение емкости может произойти только за счет уменьшения в ε_1 раз напряжения на нем, т.е. $u_1 = \frac{u_0}{\varepsilon_1}$. Электрическое

поле в конденсаторе $E_1 = \frac{u_1}{d} = \frac{E_0}{\varepsilon_1}$ при этом уменьшится в ε_1 раз.

В общем случае, напряженность поля в однородном диэлектрике *при условии неизменности свободных зарядов на нём* в ε раз меньше напряженности поля тех же зарядов в пустоте.

Теоретическое рассмотрение вопросов непрерывности линий вектора индукции приводит к выводу, что на границе раздела двух диэлектриков с диэлектрическими постоянными ε_0 и ε_1 линии напряженности электрического поля будут иметь разрыв, причем разрыв терпит нормальная составляющая электрического поля, поскольку электрическое поле внутри конденсатора уменьшается в ε_1 раз. Непрерывность сохраняет тангенциальная составляющая электрического поля, поэтому $\frac{E_{1t}}{E_{0t}} = 1$.

Выражение для нормальной составляющей вектора электрического поля на границе раздела двух сред *при неизменности свободных зарядов в диэлектрике* определяется следующим соотношением:

$$\varepsilon_0 E_{0n} = \varepsilon_1 E_{1n}. \quad (1)$$

2. *Зафиксируем напряжение u_1 на емкости (обкладки конденсатора подключены к источнику напряжения).*

Рассуждая аналогичным образом, нетрудно заметить, что увеличение емкости конденсатора в ε_1 раз при выполнении условия *неизменности напряжения на конденсаторе при введении диэлектрика* $u_1 = u_0$ возможно только при возрастании в ε_1 раз заряда Q_0 на пластинах конденсатора за счет энергии внешнего источника питания ($Q_1 = \varepsilon_1 Q_0$).

При этом напряженность электрического поля в конденсаторе с диэлектриком ($\varepsilon_1 > 1$) будет совпадать с полем конденсатора с воздушным промежутком ($\varepsilon_0 = 1$). Действительно,

$E_{0n} = \frac{u_0}{d}$, а $E_{1n} = \frac{u_1}{d}$. Однако $u_0 = u_1$, следовательно,

$$E_{1n} = \frac{u_1}{d} = \frac{u_0}{d} = E_{0n}. \quad (2)$$

Из выражения (2) следует, что на границе раздела двух сред с диэлектрическими постоянными ε_0 и ε_1 *при неизменности напряжения на конденсаторе после введения диэлектрика* $u_1 = u_0$, то есть увеличении свободных зарядов в ε_1 раз, нормальные составляющие электрического поля разрыва не имеют.

В данном режиме работы конденсатора сохраняется непрерывность нормальной составляющей вектора электрического поля

$$E_{0n} = E_{1n}. \quad (3)$$

Выражение для вектора напряженности электрического поля в конденсаторе $E = \frac{u}{d}$ справедливо для любого конденсатора как с воздушным промежутком, так и с любым другим диэлектриком.

При неизменности напряжения на конденсаторе после введения диэлектрика, т.е. при $u_1 = u_0$, нормальная составляющая вектора электрического поля не меняется и совпадает с нормальной составляющей вектора электрического поля в этом конденсаторе с воздушным промежутком.

Вектор напряженности электрического поля в конденсаторе с диэлектриком

Известно, что при введении в конденсатор диэлектрика энергия конденсатора увеличивается. Энергия конденсатора – это энергия электрического поля. Для того чтобы энергия конденсатора возросла, необходимо увеличивать напряженность электрического поля в нем.

Энергия конденсатора W определяется соотношением [1]:

$$W = \frac{1}{2} Q u, \quad (4)$$

где Q – заряд на пластинах конденсатора; u – разность потенциалов на его пластинах.

Если напряжение на конденсаторе после введения диэлектрика поддерживается постоянным, то $Q_1 = \varepsilon_1 Q_0$, поскольку $u_1 = u_0$. Следовательно, энергия конденсатора при заполнении его диэлектриком возрастает в ε_1 раз:

$$W_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_1 Q_0 u_0 = \varepsilon_1 W_0 \quad (5)$$

Увеличение энергии конденсатора обусловлено действием внешнего источника, поддерживающего неизменной разность потенциалов на обкладках при введении диэлектрика.

После несложных преобразований выражение для энергии конденсатора можно записать в следующем виде:

$$W_1 = \frac{1}{2} Q_1 u_1 = \frac{\varepsilon_1}{8\pi} E_0^2 S d = \varepsilon_1 W_0. \quad (6)$$

где S – площадь поверхности конденсатора; d – расстояние между обкладками.

Сравнение выражений для конденсатора с воздушным промежутком и диэлектриком (6) позволяет утверждать, что вектор напряженности электрического поля \vec{E}_1 в конденсаторе с диэлектриком при выполнении условия $u_1 = u_0$ будет равен

$$\vec{E}_1 = \sqrt{\varepsilon_1} \vec{E}_0. \quad (7)$$

Тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля в угловом конденсаторе с диэлектриком

Из выражения (7) следует, что в конденсаторе с диэлектриком увеличивается величина напряженности электрического поля. Ранее было показано, что на границе раздела двух сред при фиксированной разности потенциалов на обкладках конденсатора должна сохраняться нормальная составляющая электрического поля $E_{0n} = E_{1n}$.

Поэтому можно утверждать, что в такой системе будет увеличиваться тангенциальная составляющая электрического поля. Поле внутри конденсатора с диэлектриком при поддержании неизменной разности потенциалов на обкладках при введении диэлектрика увеличивается в $\sqrt{\varepsilon_1}$ раз, хотя нормальная составляющая поля при этом остается неизменной.

Найдем связь $\frac{E_{1t}}{E_{0t}} = f(\varepsilon_1, \varphi)$ между тангенциальными составляющими полей в уг-

ловом конденсаторе с воздушным промежутком и в конденсаторе с диэлектриком как функции диэлектрической проницаемости заполнения ε_1 и угла падения φ вектора напряженности электрического поля относительно нормали к плоскости, симметричной пластинам углового конденсатора.

Чтобы обеспечить отклонение вектора электрического поля от нормали к поверхности пластин конденсатора, выполним пластины под углом φ друг к другу. Поскольку вектор электрического поля выходит по нормали к поверхности обкладки, то угол φ показывает отклонение угла падения вектора электрического поля относительно нормали к плоскости, симметричной пластинам конденсатора.

На рис. 1 φ – угол падения вектора электрического поля \vec{E}_0 в угловом конденсаторе с воздушным промежутком, а θ – угол вектора электрического поля \vec{E}_1 в угловом конденсаторе с диэлектриком.

Угол отклонения пластин конденсатора φ невелик, и поэтому тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля в конденсаторе с воздушным промежутком E_{0t} также весьма мала. Однако для удобства изображения на рис.1 угол φ выбран большим.

Для изолированных систем работает закон преломления Снеллиуса, связывающий угол падения падающей волны с углом преломленной (прошедшей) волны в зависимости от отношения диэлектрических проницаемостей сред [3, 4].

В соответствии с этим законом, угол θ будет меньше, чем φ , если диэлектрическая проницаемость второй среды больше, чем первой. Для неизолированной системы результаты будут другими.

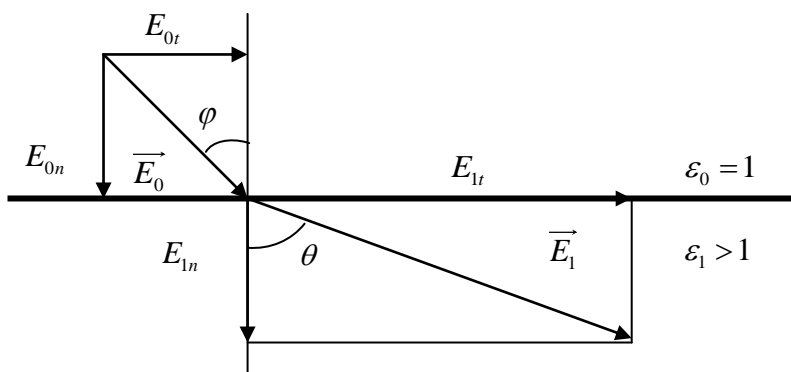


Рис. 1 Преломление волны в неизолированной системе

Учитывая равенство нормальных составляющих электрического поля в угловых конденсаторах с воздушным промежутком и диэлектриком $E_{0n} = E_{1n}$ и рис. 1, можно написать несколько равенств, связывающих значения полей, углы и диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

$$\frac{E_{0t}}{E_0} = \sin \varphi \quad (8)$$

$$\frac{E_{0n}}{E_0} = \cos \varphi \quad (9)$$

$$\frac{E_{1t}}{\sqrt{\varepsilon_1} E_0} = \sin \theta \quad (10)$$

$$\frac{E_{0n}}{E_0 \sqrt{\varepsilon_1}} = \cos \theta \quad (11)$$

Поле несложных преобразований из (8) и (10) получаем

$$\frac{E_{1t}}{E_{0t}} = \sqrt{\varepsilon_1} \frac{\sin \theta}{\sin \varphi} = \frac{\tan \theta}{\tan \varphi}. \quad (12)$$

Аналогично, используя выражения (9) и (11), можно записать

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \theta} = \sqrt{\varepsilon_1}. \quad (13)$$

Равенство (13) является аналогом закона Снеллиуса для неизолированных систем, где одна среда представляет собой воздух ($\varepsilon_0 = 1$). Выражение показывает, как связан угол падения φ вектора электрического поля \vec{E}_0 в конденсаторе с воздушным промежутком с углом преломления θ вектора \vec{E}_1 в конденсаторе с диэлектриком.

Вектор электрического поля \vec{E}_1 имеет составляющую вдоль диэлектрика, заполняющего конденсатор. Величина этой составляющей зависит от диэлектрической проницаемости заполнения и будет тем больше, чем больше ε_1 . Для выполнения условия (13) угол θ должен быть намного больше угла φ .

Поскольку угол $\varphi < \theta$, то из выражения (12) следует, что $\frac{E_{1t}}{E_{0t}} > 1$. Тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля в угловом конденсаторе с диэлектриком больше, чем в угловом конденсаторе с воздушным промежутком.

Если в равенстве (12) угол θ выразить через φ , то получим следующее соотношение:

$$\frac{E_{1t}}{E_{0t}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 - \cos^2 \varphi}}{\sin \varphi}. \quad (14)$$

Тангенциальная составляющая вектора электрического поля в конденсаторе с диэлектриком E_{1t} больше, чем в конденсаторе с воздушным промежутком.

Найдем отношение тангенциальной составляющей вектора электрического поля к значению электрического поля в конденсаторе с воздушным промежутком в зависимости от значений угла раскрыва конденсатора φ и диэлектрической проницаемости ε_1 . Из выражений (10) и (13) находим

$$\frac{E_{1t}}{E_0} = \sqrt{\varepsilon_1 - \cos^2 \varphi}. \quad (15)$$

Если конденсатор плоский, т.е. угол раскрыва равен нулю, а внутри конденсатора находится воздух, то тангенциальная составляющая вектора электрического поля становится равной нулю.

Если диэлектрическая проницаемость среды внутри конденсатора больше единицы, то тангенциальная составляющая электрического поля в угловом конденсаторе с диэлектриком, как это следует из выражения (15), может значительно превышать величину электрического поля в конденсаторе, где в качестве диэлектрика используется воздух.

Представляет интерес геометрическая иллюстрация зависимости угла наклона вектора электрического поля θ в угловом конденсаторе с диэлектриком в зависимости от угла раскрыва конденсатора φ .

На рис. 2 представлена зависимость $\theta(\varphi)$ для различных значений диэлектрической проницаемости ε_1 , выполненная по формуле (13).

Как видно из рис. 2, зависимость угла преломления от угла раскрыва конденсатора весьма слабая. Значительно большее влияние оказывает диэлектрическая проницаемость заполнения углового конденсатора.

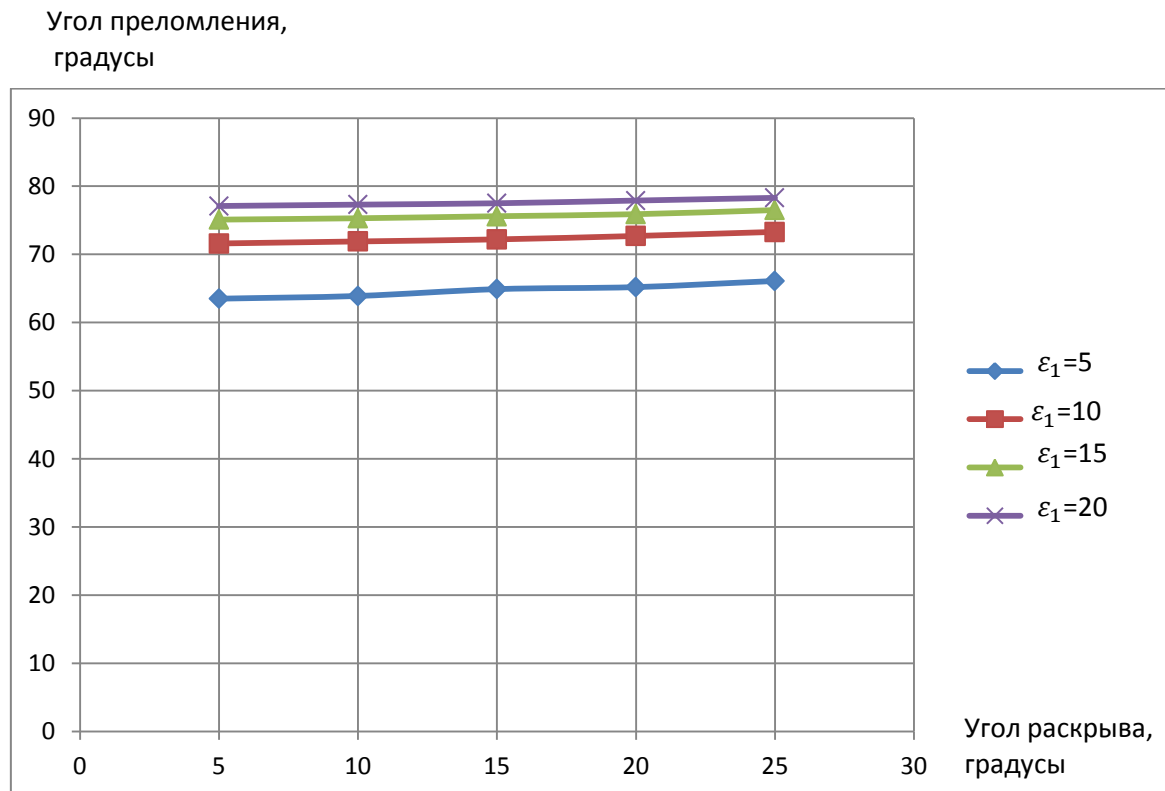


Рис. 2 Угол преломления вектора напряженности электрического поля в угловом конденсаторе с диэлектриком

При малых значениях φ угол преломления θ может возрасти в 12–15 раз, становясь близким к 90° . Появляется составляющая поля вдоль пластин конденсатора.

Тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля сильно возрастает. Поле вытягивается в сторону расширяющейся части углового конденсатора. Электрическое поле становится неоднородным.

Выводы

Теоретическое исследование работы углового конденсатора позволило выяснить особенности граничных условий в неизолированных системах.

При изучении вопросов прохождения, преломления и отражения электромагнитных волн на границе раздела двух сред предполагается отсутствие источников энергии в системе. [1, 2]. Вопросы эти хорошо изучены и описываются законом Снеллиуса.

Однако могут быть случаи, когда в системе появляется внешний источник энергии, что приводит к изменению граничных условий в системе. В частности, изменяется преломление электромагнитной волны на границе раздела двух сред.

В работе проведено исследование вопросов преломления в неизолированной системе и получены аналитические зависимости, описывающие поведение электрической волны на границе раздела двух сред.

Показано, что в неизолированной системе имеют место увеличение электрического поля и энергии при введении диэлектрика, сохранение нормальной составляющей и разрыв тангенциальной составляющей электрического поля.

Тангенциальная составляющая вектора электрического поля значительно возрастает.

С точки зрения применения полученных результатов, возрастание тангенциальной составляющей вектора электрического поля в угловом конденсаторе с диэлектриком позволяет использовать такие конденсаторы в широком спектре радиотехнических устройств.

Библиографический список

1. **Фриш, С. Э.** Курс общей физики. Т. 2. Электрические и электромагнитные явления / С.Э. Фриш, А.В. Тиморева. – 11-е изд. – СПб.: Изд-во «Лань», 2007. – 528 с.
2. **Литвинов, О.С.** Электромагнитные волны и оптика / О.С. Литвинов, В.С. Горелик. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 448 с.
3. **Марков, Г.Т.** Электродинамика и распространение радиоволн / Г.Т. Марков, Б.М. Петров, Г.П. Грудинская. – М.: Советское радио, 1979. – 376 с.
4. **Грудинская, Г.П.** Распространение радиоволн / Г.П. Грудинская. – М.: Высш. шк., 1975. – 280 с.

*Дата поступления
в редакцию 04.02.2014*

V.V. Zimin

BOUNDARY CONDITIONS IN NOT ISOLATED SYSTEMS

Dzerzhinsk polytechnical institute NGTU n.a. R.E. Alexeev,
Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Boundary conditions in not isolated system are investigated by the example of the angular condenser. Comparison of boundary conditions in the condenser with диэлектриком for cases of the fixed charge on facings (isolated system) and the fixed potential difference on them (not isolated system) is lead. It is shown, that in not isolated system at introduction isolator the continuity of a normal component and break of a tangential component of a vector of intensity of an electric field, increase in intensity of an electric field and energy in it takes place. The analytical dependences describing behaviour of a vector of an electric field on border of the unit of two environments in not isolated system and, in particular, of feature of refraction of an electric field in such system are received. Substantial growth of a tangential component of a vector of intensity of an electric field in not isolated system is proved. Presence in an electric field of the angular condenser of the big tangential component allows to use such condensers in a wide spectrum of radio engineering devices.

Key words: boundary conditions, condensers, the electric field, the isolated systems, not isolated systems, a tangential component, a normal component.