

УДК 532.59:629.12

С.А. Химич, Ю.Ф. Орлов

**ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ КРЫЛА ЗА ДИСКОМ ДИПОЛЕЙ
НАД ТВЁРДОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Цель: Создание математической модели, описывающей движение крыла за диском диполей на малом отстоянии от твердой поверхности, и оценка особенностей их взаимного влияния.

Методология: В основе создаваемой математической модели лежит линейная задача о движении крыла за диском диполей на малом отстоянии от твёрдой поверхности. Линейная постановка и малость отстояния крыла от опорной поверхности позволяют эффективно использовать методы квадрупольной теории крыла вблизи экрана.

Результаты: Проведен анализ влияния диска диполей на характеристики потока под низколетящим крылом. Получены формулы для расчета вызванных диском диполей скоростей потока под крылом. Выполнены расчеты коэффициента влияния диска диполей на подъемную силу прямоугольного бестелесного крыла в зависимости от угла атаки крыла.

Область применения: Полученное решение позволило оценить на модельном примере, близком к реальному объекту, работоспособность предложенной математической модели и возможность ее использования при проектировании экранопланов.

Ключевые слова: экраноплан, низколетящее крыло, диск диполей, квадрупольная теория крыла, коэффициент подъемной силы.

Использование поддува под крыло является характерной особенностью всех компонентов экранопланов Р.Е. Алексеева [1]. Основная цель – увеличение подъемной силы на крыле на взлётных режимах. Физическая картина процесса движения крыла в струе от двигателя рассматривалась ранее [2], однако особенности работы комплекса «двигатель – крыло экраноплана» практически не изучены. Задачу можно разделить на полную постановку, когда рассматривается движение крыла за турбулентной струей от двигателей, и упрощенную – в рамках линейной модели для невязкой жидкости.

В свою очередь, полная постановка сейчас замкнулась на чисто экспериментальные исследования и полуэмпирические оценки, существенно обуженные связью с разработкой конкретных проектов. Кардинально решает проблему дискретизация задачи о движении в вязком потоке крыла и некоторого генератора турбулентной струи над свободной поверхностью тяжелой жидкости, но такая полная постановка сейчас видится маловероятной.

Рассмотрим задачу о движении системы «крыло – диск диполей» над твёрдой поверхностью. Пусть тонкое прямоугольное крыло, имеющее хорду $2a$ и размах $2b$, и диск диполей D , ось которого наклонена к направлению движения системы под углом β , движутся в направлении положительных значений оси x с постоянной скоростью v_0 на высоте h над опорной поверхностью (рис. 1).

Форма поверхности крыла задана уравнением $S(x, y, z) \equiv z - f^\pm(x, y) = 0$. Диск D - генератор известного скачка давления, имеет радиус R . Координаты его центра O_1 известны и заданы в системе координат, связанных с крылом (рис. 1): $x = a_d$, $y = b_d$, $z = c_d$.

Предполагая малость возмущений, вносимых системой в поток, и возможность в связи с этим оставаться в рамках линейной модели, для решения задачи будем использовать функцию потенциала ускорений $\theta(x, y, z)$, связанную с давлением $p(x, y, z) = \rho \cdot \theta(x, y, z)$, где ρ – плотность жидкости, которая предполагается невязкой и несжимаемой. Связь потенциала ускорений $\theta(x, y, z)$ с потенциалом скоростей $\varphi(x, y, z)$ в стационарных задачах дается соотношениями

$$\varphi = N_0\theta, \theta = N_0^{-1}\varphi,$$

где $N_0 = -\frac{1}{v_0} \int_{-\infty}^x [\] d\tau$, $N_0^{-1} = -v_0 \frac{\partial}{\partial x}$.

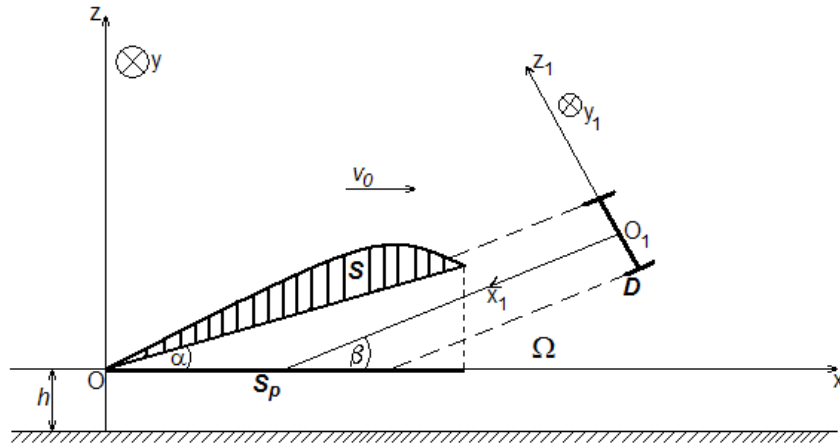


Рис. 1. Геометрия и постановка задачи

Пусть относительная толщина δ крыла мала: $\delta = [f] = (f^+ - f^-) / 2a \ll 1$. Местные углы атаки крыла также малы: $\alpha(x, y) = f^\alpha = (\frac{\partial f^+}{\partial x} + \frac{\partial f^-}{\partial x}) / 2 \ll 1$. Тогда рассматриваемая задача может быть сформулирована как краевая для уравнения Лапласа от функции потенциала ускорений с соответствующими краевыми условиями:

$$\Delta\theta = 0, \quad q \in \Omega; \tag{1}$$

где $\theta_n = F(q)$, $q \in S_p$; $\frac{\partial}{\partial z}\theta = 0$, $z = -h$; $[\theta] = 0$, $x = 0$, $z = 0$; $[\theta] = \frac{P_d}{\rho}$, $q \in D$; $\nabla\theta \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$,

где $q = (x, y, z)$, Ω – пространство, занятое жидкостью (рис. 1); $F(q) = N_0^{-1}(F_1(q))$, где $F_1(q)$ – нормальная составляющая скорости точек на крыле; S_p – проекция поверхности S на плоскость xu ; P_d – скачок давления в диске D .

Пусть $\varphi(x, y, z)$ – потенциал скорости возмущенного движения жидкости, полученный при решении краевой задачи (1.1). Так как рассматривается линейная задача, то его можно представить в виде двух составляющих

$$\varphi(x, y, z) = \varphi^s(x, y, z) + \varphi^d(x, y, z), \tag{2}$$

где $\varphi^s(x, y, z)$ – потенциал скорости обтекания крыла, $\varphi^d(x, y, z)$ – потенциал скорости обтекания диска диполей. Почти всюду в окрестности комплекса «крыло – диск диполей» предполагаются справедливыми оценки

$$\begin{aligned} \|\nabla\varphi^s\|_{C^2(\Omega)} &\sim O(\varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1; \\ \|\nabla\varphi^d\|_{C^2(\Omega)} &\sim O(1). \end{aligned}$$

Нормальная составляющая скорости точек крыла в абсолютном движении равна

$$\nabla(-v_0x + \varphi)\nabla S = 0, \quad q \in S,$$

откуда $\varphi_z = (-v_0 + \varphi_x)f_x + \varphi_y f_y$.

Тогда, учитывая (2) и пренебрегая произведением производных от φ^s и f как малы-ми более высокого порядка, получим

$$\varphi_z^s = F_1(q) \equiv (-v_0 + \varphi_x^d) f_x + \varphi_y^d f_y - \varphi_z^d. \quad (3)$$

Здесь $\varphi_x^d, \varphi_y^d, \varphi_z^d$ - соответственно, продольная, поперечная и вертикальная составляющие скорости на S_p , вызванной диском диполей.

Рассмотрим случай движения бестелесного крыла. Будем искать решение задачи (1) в виде суммы интегральных операторов типа потенциала двойного слоя:

$$\theta = A\gamma + A\gamma_d,$$

где

$$A\gamma_d = \frac{1}{4\pi} \int_D \gamma_d(p_1) \frac{\partial G(p_1, q_1)}{\partial x_1} ds_1, \quad (4)$$

$$A\gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{S_p} \gamma(p) \frac{\partial G(p, q)}{\partial z} ds, \quad G(p, q) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

$$r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta+2h)^2},$$

где $p = (\xi, \eta, \zeta) \in S_p$; γ, γ_d - скачки давления на поверхностях S_p и D соответственно; p_1, q_1 - координаты в системе координат, связанной с диском диполей с началом в его центре. Такая постановка избавляет от необходимости вводить условия для определения собственных функций, появляющихся в линейных задачах.

Для восстановления сингулярных решений в (1) следует перейти в пространство потенциала скоростей. Введя безразмерные величины по формулам $x = \bar{x} \cdot a, y = \bar{y} \cdot b, z = \bar{z} \cdot a, h = \bar{h} \cdot 2a, \lambda = b/a, R = \bar{R} \cdot b, P = \bar{P} \cdot \rho \cdot v_0^2, \gamma = \bar{\gamma} \cdot v_0^2$ (черточки далее опущены, кроме относительного отстояния \bar{h}), получим двумерное сингулярное по одной переменной интегральное уравнение, характерное в теории крыла

$$N_0 A_z \gamma = (-v_0 + \varphi_x^d) f_x^{cp} + \varphi_y^d f_y^{cp} - \varphi_z^d, \quad (5)$$

где $\varphi^d = N_0 A \gamma_d, f^{cp} = (f^+ + f^-)/2$.

Таким образом, влияние диска диполей на характеристики крыла в линейной задаче проявляется в изменении правой части интегрального уравнения и имеет смысл динамической кривизны потока жидкости перед крылом.

Вычислим в явном виде функцию

$$\varphi^d = N_0 A \gamma_d = -\frac{1}{v_0} \int_{-\infty}^x A \gamma_d(\tau, y, z, \xi, \eta, \zeta) d\tau.$$

Для этого представим интегральный оператор (4) в системе координат, связанной с крылом. Связь систем координат $Oxyz$ и $O_1x_1y_1z_1$ задается соотношениями

$$x = x_1 \cos \beta - z_1 \sin \beta + a_d;$$

$$y = y_1 + b_d;$$

$$z = x_1 \sin \beta + z_1 \cos \beta + c_d$$

и

$$x_1 = (x - a_d) \cos \beta + (z - c_d) \sin \beta;$$

$$y_1 = y - b_d;$$

$$z_1 = -(x - a_d) \sin \beta + (z - c_d) \cos \beta.$$

С учетом этих связей делаем в (4) замену переменных $p_1 \rightarrow p, q_1 \rightarrow q$. В результате получим

$$A\gamma_d = \frac{1}{4\pi} \int_{-R}^R \int_{-\lambda_0 \sqrt{R^2 - y_1^2}}^{\lambda_0 \sqrt{R^2 - y_1^2}} \gamma_d(p_1) \frac{\partial G(p_1, q_1)}{\partial x_1} d\zeta_1 d\eta_1 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{b_d - R}^{b_d + R} \int_{-\lambda_0 \sqrt{R^2 - (\eta - b_d)^2} \cos \beta + c_d}^{\lambda_0 \sqrt{R^2 - (\eta - b_d)^2} \cos \beta + c_d} \gamma_d(p) \times \right.$$

$$\times \left[\cos^2 \beta \frac{\partial G(p, q)}{\partial \xi} + \sin \beta \cos \beta \frac{\partial G(p, q)}{\partial \zeta} \right] d\zeta d\eta \Big|_{\xi=a_d+(c_d-\zeta)tg\beta} +$$

$$+ \int_{b_d-R}^{b_d+R} \int_{-\lambda_0\sqrt{R^2-(\eta-b_d)^2} \sin\beta+a_d}^{\lambda_0\sqrt{R^2-(\eta-b_d)^2} \sin\beta+a_d} \gamma_d(p) \times \left[\sin \beta \cos \beta \frac{\partial G(p, q)}{\partial \xi} + \sin^2 \beta \frac{\partial G(p, q)}{\partial \zeta} \right] d\xi d\eta \Big|_{\zeta=c_d+(a_d-\xi)ctg\beta} \Big\}.$$

Рассматривая далее случай постоянного скачка давления в диске D диполей, можно представить $N_0 A \gamma_d$ в виде

$$N_0 A \gamma_d = \frac{\gamma_d}{4\pi} \cdot \int_{b_d-R}^{b_d+R} [\cos^2 \beta \cdot J_1 + \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot (J_2 + J_3) + \sin^2 \beta \cdot J_4] d\eta, \quad (6)$$

где J_1, J_2, J_3, J_4 – комбинация рациональных, логарифмических и тригонометрических функций – результат вычисления двух внутренних интегралов по τ и ξ (из-за громоздкости выражений результат вычислений не приведён).

Используя полученную формулу (6), был выполнен расчет вызванных скоростей $\varphi_x^d, \varphi_y^d, \varphi_z^d$ от диска диполей в плоскости S_p в модельном примере для бестелесного прямоугольного крыла с параметрами $\lambda = 1, a_d = 3.0, b_d = 0.0, c_d = 0.3, \alpha = 5^\circ, \beta = 10^\circ, R = 0.267, \bar{h} = 0.015, Fr = 2.711, \gamma_d = -12.631$. Эти параметры близки к характеристикам судна на динамической воздушной подушке (СДВП) «Волга-2».

На рис. 2–4 представлены результаты расчета продольной, поперечной и вертикальной составляющих скорости, вызванной диском диполей.

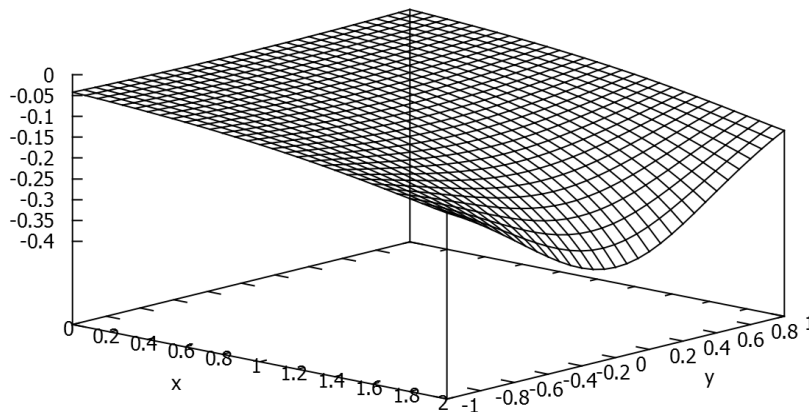


Рис. 2. φ_x^d - продольная составляющая скорости, вызванной диском диполей

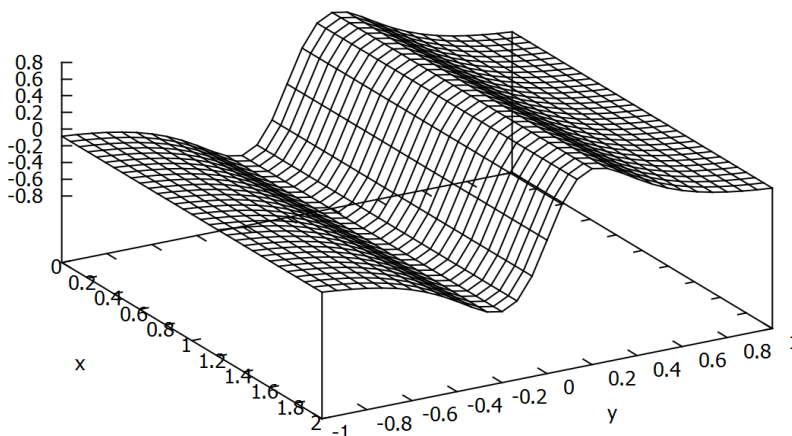


Рис. 3. φ_y^d - поперечная составляющая скорости, вызванной диском диполей

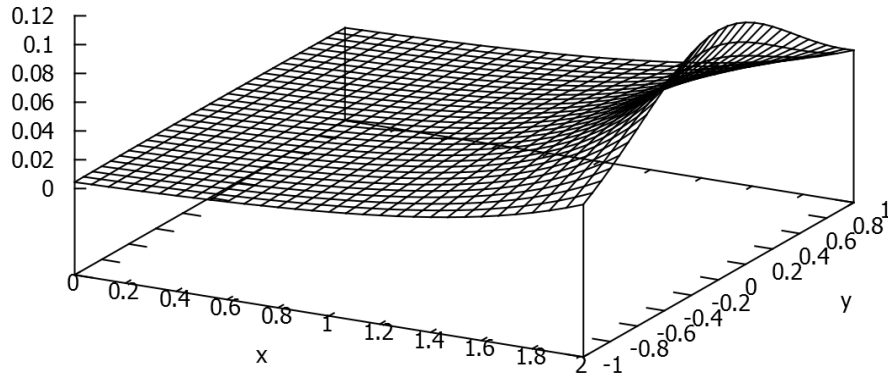


Рис. 4. φ_z^d - вертикальная составляющая скорости, вызванной диском диполей

Из [3] известно, что интегральное уравнение вида (5) сводится к краевой задаче для уравнения Пуассона. В нашем случае краевая задача для уравнения Пуассона будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi(x, y) = \frac{\alpha \cdot (-1 + \varphi_x^d) - \varphi_z^d}{4 \cdot \bar{H} \cdot \lambda^2}, \quad (7)$$

где $\Phi(x, y) = \int_x^2 \gamma(\tau, y) d\tau$; $\bar{H} = h/2b$; $x \in [0, 2]$; $y \in [-1, 1]$; $\Phi(x, \pm 1) = \Phi(2, y) = 0$; $\frac{\partial \Phi(0, y)}{\partial x} = 0$.

Решив (7), можно найти $\gamma(x, y) = -\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x}$ – распределение плотности двойного слоя γ по поверхности S_p . После этого можно найти [3] коэффициент C_y подъемной силы крыла по формуле

$$C_y = \lambda \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^2 \gamma(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (8)$$

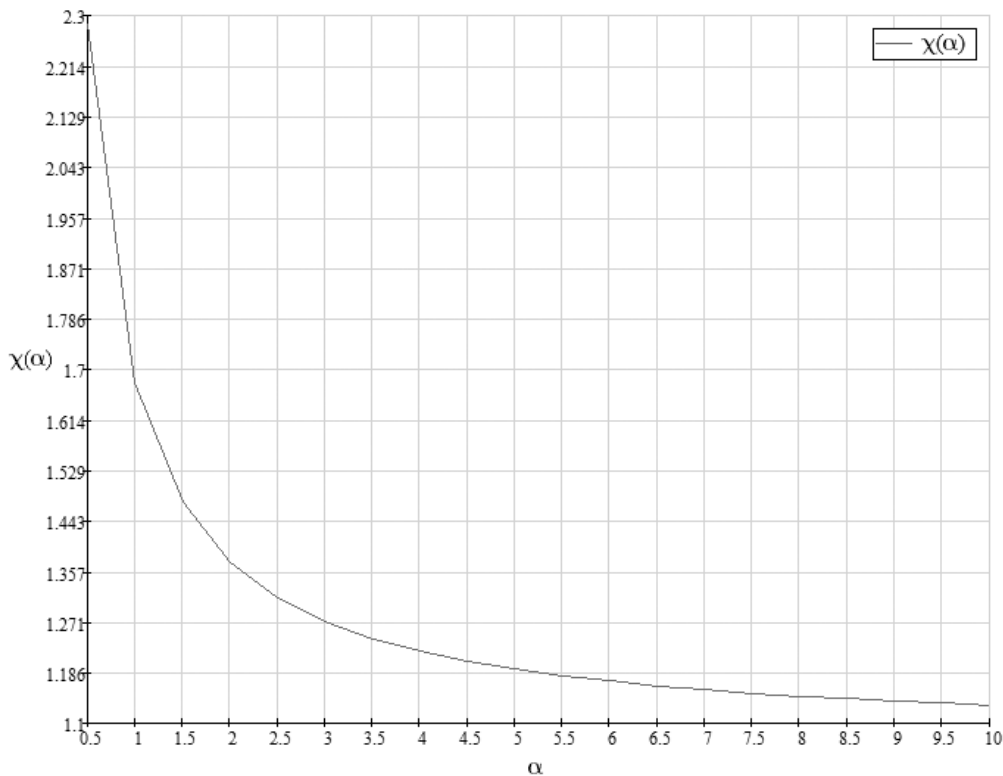


Рис. 5. $\chi(\alpha)$ - коэффициент влияния диска диполей на подъемную силу прямоугольного бестелесного низколетящего крыла в зависимости от угла атаки крыла

Используя те же параметры, что и для расчета составляющих вызванных скоростей (кроме углов атаки крыла, которые брались из промежутка $\alpha \in [0.5^\circ, 10^\circ]$), было найдено численное решение серии краевых задач (7) для уравнения Пуассона [4]. После этого по формуле (8) был произведен расчет зависимости коэффициента $C_y^D(\alpha)$ подъемной силы крыла от угла атаки в присутствии диска диполей. Также был произведен расчет зависимости коэффициента $C_y(\alpha)$ подъемной силы от угла атаки крыла с такими же параметрами, но в отсутствии диска диполей. Была введена функция $\chi(\alpha) = \frac{C_y^D(\alpha)}{C_y(\alpha)}$, которая имеет смысл ко-

эффициента влияния диска диполей на подъемную силу крыла в зависимости от угла атаки. График функции $\chi(\alpha)$ представлен на рис. 5.

Выполненные расчёты показали, что вызванные диском диполей скорости при удалении от диска относительно быстро стремятся к нулю, однако в целом влияние диска на коэффициент подъемной силы заметно (даже велико) и тем больше, чем меньше угол атаки крыла.

Библиографический список

1. **Соколов, В.В.** Новое поколение крылатых судов // Судостроение. 1991. №1.
2. **Орлов, Ю.Ф.** Приближённый расчёт подъемной силы крыла вблизи опорной поверхности в струе от движителя // В кн.: Асимптотические методы в теории систем. Иркутский научный центр СО АН СССР, 1990.
3. **Панченков, А. Н.** Квадрупольная теория крыла вблизи твердой границы // В кн.: Асимптотические методы в динамике систем. – Новосибирск: Наука, 1980, С. 5–116.
4. **Мэтьюз, Д. Г.** Численные методы. Использование MATLAB: [пер. с англ.] / Д.Г. Мэтьюз, Д.Ф. Куртис. – 3-е изд. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 720 с.

*Дата поступления
в редакцию 05.02.2014*

S. Khimich, Y. Orlov

THE PROBLEM OF THE MOTION OF WING BEHIND DIPOLE DISC ABOVE SOLID SURFACE

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Purpose: The goal of this study is to create mathematical model describing the motion of the wing behind dipole disc at the small height above the solid surface and to evaluate their interference.

Approach: Proposed mathematical model is based on linear problem of the motion of wing behind dipole disc at the small height above the solid surface. Linear formulation of the problem and the small height above the solid surface allow us to use methods of quadrupole theory of the wing very efficiently.

Findings: The study analyzed influence of the dipole disc on the performances of air flow under low-flying wing. Some formulas for calculating the velocity of air flow under low-flying wing were obtained. Obtained results allowed us to calculate influence coefficient of dipole disc on the wing lift for different angles of attack.

Value: Obtained results allow us to evaluate efficiency of proposed mathematical model on the example which is very close to real object. Thus, proposed mathematical model may be useful in hovercrafts development and in airfoil boats development.

Key words: airfoil boat, low-flying wing, dipole disc, the quadrupole theory of the wing, lift coefficient.