УДК 532.5

Р.В. Шамин, А.В. Юдин, К.И. Кузнецов

ЧАСТОТА ОБНАРУЖЕНИЯ АНОМАЛЬНО БОЛЬШИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА ОСНОВЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ В ЗАДАННОЙ ТОЧКЕ ОБЛАСТИ

Сахалинский государственный университет, г. Южно-Сахалинск,
Российский университет дружбы народов, Москва

Цель: В работе обсуждаются аномально большие поверхностные волны.
Метод: В основе исследования лежит метод вычислительных экспериментов по моделированию плоского поверхностного волнения на основе полных нелинейных уравнений.
Результаты: Созданы и апробированы новые методики вычислительных экспериментов, которые позволяют проводить расчеты на потенциально неограниченном временном интервале и для достаточно широкой пространственной области, что необходимо для исследования аномально больших поверхностных волн в океане. Исследована статистика возникновения волн-убийц в зависимости от параметров начального волнения.
Область применения: Представленные результаты могут быть применены для оценки времени ожидания волны-убийцы в заданной точке.

Ключевые слова: волна-убийца, вычислительный эксперимент, гидродинамика идеальной жидкости.

Введение

Среди катастрофических явлений в океане волны-убийцы занимают особое место. Это одиночные волны, которые возникают внезапно и могут достигать значительной амплитуды (известны случаи до 30 м) [1]. Именно внезапность обусловливает серьезность опасности этих волн для судов и морских сооружений. Изучение таких волн ведется с помощью натурных измерений и лабораторных опытов[2], также получены интересные результаты в теоретическом анализе аномальных краевых волн [3–7]. Но наибольший прогресс в последнее время был достигнут при использовании вычислительных экспериментов [8–15].

В настоящей статье рассматриваются вычислительные эксперименты, основанные на полных нелинейных уравнениях гидродинамики идеальной жидкости со свободной поверхностью. В этих экспериментах мы моделируем распространение поверхностных волн в условиях бесконечной глубины. В различных сериях экспериментов варьировался квадрат средней крутизны и дисперсия. В результате этих экспериментов получена статистика экстремальных поверхностных волн.

Уравнения в конформных переменных, описывающие волны на воде

В настоящей работе моделирование волн-убийц основано на численном решении уравнений, описывающих нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Мы будем рассматривать плоское течение с бесконечно глубоким дном. По горизонтальной переменной мы будем рассматривать 2π-периодические условия. Такие предположения являются естественными для моделирования волн-убийц.

Будем использовать уравнения в конформных переменных. Идея использовать конформные переменные для описания нестационарного течения идеальной жидкости со свободной поверхностью впервые была предложена в работах [16, 17]. Для численного моделирования уравнения в конформных переменных использовались в работах [18 – 20] и многих других. Мы рассмотрим вариант этих уравнений, предложенный в работе [21]. Пусть идеальная жидкость занимает бесконечную область в переменных (x, y), ограниченную криволинейной границей. Мы вводим комплексную плоскость $z = x + iy$. Эту область мы можем (по теореме Римана) конформно отобразить на нижнюю полуплоскость с переменными $w = u + iv$.

Обратное конформное отображение выражается аналитической функцией

$$z = z(t, w).$$

Эта функция является также функцией времени, поскольку мы рассматриваем нестационарную задачу. Зная функцию $z(t, u)$, мы можем восстановить профиль свободной поверхности. Для описания потенциального течения идеальной жидкости необходимо также знать потенциал скоростей. Поскольку потенциал является гармонической функцией, то все его значения могут быть описаны значением этого потенциала лишь на границе области. Пусть $\psi(t, x)$ – значение потенциала скоростей на свободной поверхности. Соответственно через $\Phi(t, z)$ мы обозначим аналитическую в нижней полуплоскости функцию такую, что $\mathrm{Re}\,\Phi(t, z) = \psi(t, x)$. Будем рассматривать функцию $\Pi(t, w) = \Phi(t, z(t, w))$, которая также будет аналитичной в нижней полуплоскости. Теперь введем новые переменные:

$$R(t,w) = \frac{1}{z'(t,w)}, \qquad V(t,w) = i\frac{\Pi'(t,w)}{z'(t,w)}.$$

Здесь и далее штрихом мы обозначаем производную по переменной w. Эти функции являются аналитичными в нижней полуплоскости и удовлетворяют краевым условиям:

$$R(t, w) \to 1,\ \mathrm{Im}\, w \to -\infty,$$

$$V(t, w) \to 0,\ \mathrm{Im}\, w \to -\infty.$$

Поскольку мы рассматриваем поверхностные волны 2π-периодические по переменной x, то и функции R и V также будут 2π-периодическими по переменной u. Тогда функции R и V можно представить в виде рядов Фурье:

$$R(t,w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t)e^{-ikw},$$

$$V(t,w) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)e^{-ikw}.$$

Функции R и V полностью описывают динамику поверхностных волн идеальной жидкости. При этом нам достаточно знать лишь значения этих функций на вещественной оси (при $v = 0$), поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать аргумент u вместо w.

Покажем, как с помощью этих функций восстановить свободную поверхность и значение потенциала на свободной поверхности. Для функции R^{-1} имеет место представление

$$R^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)e^{-iku}.$$

Значения коэффициентов c_k несложно получить рекуррентно из соотношения

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)e^{-iku}\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t)e^{-iku}\right) = 1.$$

Умножением рядов можно получить разложение

$$-i\frac{V(t,u)}{R} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t)e^{-iku}.$$

Теперь восстановим функцию $z(u, t)$ следующим образом:

$$z(t,u) = u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} c_k(t)e^{-iku},$$

а функцию $\Pi(u, t)$ – по формуле $\Pi(t,u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} d_k(t)e^{-iku}$.

Свободную поверхность получим как геометрическое место точек по следующему правилу:

$$\Gamma(t) = \{(\mathrm{Re}\, z(t, u), \mathrm{Im}\, z(t, u)) : u \in (0, 2\pi)\}.$$

Значение потенциала на свободной поверхности находится по формуле

$$\Psi(t, u) = \mathrm{Re}\, \Pi(t, u).$$

Функции R и V удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}\dot{R}(t,u) = i(U(t,u)R'(t,u) - U'(t,u)R(t,u)),\\ \dot{V}(t,u) = i(U(t,u)V'(t,u) - B'(t,u)R(t,u)) + g(R(t,u) - 1),\\ 0 < u < 2\pi,\ 0 < t < T,\\ R(t, 0) = R(t, 2\pi),\ V(t, 0) = V(t, 2\pi),\ 0 < t < T,\\ R(0, u) = R_0(u),\ V(0, u) = V_0(u),\ 0 < u < 2\pi.\end{gathered} \qquad (1)$$

Здесь функции U и B вычисляются по формулам:

$$U = P(V\bar{R} + \bar{V}R), \qquad B = P(V\bar{V}), \qquad P = \frac{1}{2}(I + iH).$$

Функция $F(t, u)$ в правой части представляет собой плотность внешней силы, действующей на свободную поверхность.

Математическая корректность рассмотренных уравнений была установлена в цикле работ [8 – 13]. В этих работах были установлены существование и единственность решений уравнений (1), предложены эффективные численные методы и доказана сходимость численных методов.

Вычислительные эксперименты

Была получена статистика возникновения аномально больших поверхностных волн вычислительных экспериментов. Постановка этих вычислительных экспериментов соответствовала экспериментам из работы [22]. В этих экспериментах рассматривались динамика поверхностных волн, распространяющихся в одну сторону, что соответствует морской зыби.

В качестве динамической модели использовали уравнения (1). Начальные условия для задачи (1) определялись как ансамбль бегущих в одну сторону волн со средним значением волнового числа $K_0 = 25$. Предполагалось, что начальное возмущение поверхности задается суммой гармоник со случайными фазами

$$\eta_0(x) = \sum_{-\frac{1}{2}K_{\max}}^{\frac{1}{2}K_{\max}} \varphi(k - k_0)\cos(kx - \xi_k),$$

где $K_{\max}$ – полное число спектральных мод; ξ_k – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $-\frac{1}{2}K_{\max} < k < \frac{1}{2}K_{\max}$. Начальные значения поля скоростей предполагались связанными с формулами линейной теории. Функция $\varphi(k)$ определялась по формуле

$$\varphi(k) = \begin{cases} \delta_k, & |k| > K_w; \\ \kappa \exp(-\alpha k^2) + \delta_k, & |k| \le K_w. \end{cases}$$

Здесь δ_k – независимые случайные параметры, равномерно распределенные на интервале $-\frac{1}{2}K_{\max} < k < \frac{1}{2}K_{\max}$. Число $1 \le K_w \le 10$ определяло спектральную ширину, κ, α – «внутренние» параметры спектра, определенные так, чтобы «внешние» параметры – квадрат средней крутизны $\mu^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \eta_x^2 dx$ и дисперсия $D = \dfrac{\int_{-K_w}^{K_w} k^2 e^{-\alpha k^2} dk}{\int_{-K_w}^{K_w} e^{-\alpha k^2} dk}$ принимали заданные значения.

Вклад в полную энергию случайного шума составлял не более трех процентов.

Регистрация волн-убийц производилась с помощью амплитудного критерия

$$v(t) = \frac{H_{\max}(t)}{H_s(t)} > 2{,}1,$$

где $H_{\max}$ – амплитуда самой высокой волны; H_s – существенная высота волн, т.е. средняя амплитуда одной трети самых высоких волн.

Обнаружение волн-убийц в заданной точке расчетной области

Были проведены масштабные вычислительные эксперименты для различных параметров, на основе которых формировалось начальное волнение. В наших экспериментах исследовалась статистика возникновения аномально больших волн. Использование диссипации и накачки в настоящих вычислительных экспериментах позволяет проводить достаточно длительные расчеты, причем в случае возникновения волны-убийцы эксперимент не прекращался. Таким образом, в ходе одного вычислительного эксперимента аномально большие волны могли возникать неоднократно.

Как отмечалось в работах [2, 22], возникновение экстремальных поверхностных волн может быть приближенно описано с помощью распределения Пуассона. Единственным параметром распределения Пуассона является интенсивность, которую, согласно закону Литтла, можно быть вычислить по формуле $\lambda = \frac{N}{T}$, где N – количество волн-убийц, зарегистрированных в течение времени T.

В табл. 1 приведены графики интенсивности возникновения волн-убийц для различных значений расчетной области d.

Таблица 1

Интенсивность возникновения и время ожидания волн-убийц в зависимости от размера расчетной области

d, м	$\lambda(d')$, с ·м$^{-1}$	T, ч
6250	$3{,}75 \times 10^{-5}$	7,4
12500	$7{,}5 \times 10^{-5}$	3,7
25000	$1{,}5 \times 10^{-4}$	1,85

Мы видим, что при двукратном увеличении расчетной области интенсивность примерно удваивается. Это указывает на то, что методика наших экспериментов может быть использована для получения оценки вероятности возникновения волн-убийц в периодическом бассейне заданной длины.

Для примера рассмотрим волны зыби с длиной 250 м и периодом 12 с. С помощью наших экспериментов получено среднее время жизни экстремальных волн τ. Это значение не зависит от размера области и равно $\tau = 108$ с, т. е. в среднем в течение времени жизни волна-убийца проходит расстояние $d' = 2250$ м, и в этом случае $\lambda(d') = 1{,}3 \times 10^{-5}$ с ·м$^{-1}$. Таким образом, в заданной точке волна-убийца будет регистрироваться в среднем один раз в течение 20,5 ч. Этот результат примерно совпадает с данными натурных экспериментов, приведенными в [2].

Заключение

В статье представлен подход к исследованию экстремальных поверхностных волн (так называемых волн-убийц), на основе вычислительных экспериментов. Были созданы и апробированы новые методики вычислительных экспериментов по моделированию плоского поверхностного волнения на основе полных нелинейных уравнений, которые позволяют проводить расчеты на потенциально неограниченном временном интервале и для достаточно широкой пространственной области, что необходимо для исследования аномально больших поверхностных волн в океане. Полученные результаты могут быть применены для оценки времени ожидания волны-убийцы в заданной точке.

Библиографический список

1. **Куркин АА., Пелиновский Е.Н.** Волны-убийцы: факты, теория и моделирование / А.А. Куркин, Е.Н. Пелиновский. – Н. Новгород: НГТУ, 2004. – 120 с.
2. **Зайцев А.И., Малашенко А.Е., Пелиновский Е.Н.** Аномально большие волны вблизи южного побережья о. Сахалин / А.И. Зайцев, А.Е.Малашенко, Е.Н. Пелиновский // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2011. Т. 4. №4. С. 35–42.
3. **Дубинина В.А., Куркин А.А., Полухина О.Е.** Фокусировка краевых волн на шельфе моря / В.А. Дубинина, А.А. Куркин, О.Е. Полухина // Изв.РАН. Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 39. № 6. С. 839–848.
4. **Дубинина В.А., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н.**Слабонелинейные периодические краевые волны Стокса / В.А. Дубинина [и др.] // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2004. Т. 49. № 4. С. 525–530.
5. **Куркин, А.А.** Динамика нестационарных краевых волн стокса // Океанология. 2005. Т. 45. № 3. С. 325–331.
6. **Дубинина В.А., Куркин А.А., Полухина О.Е.** Нелинейная динамика краевых волн над линейно наклонным дном / В.А. Дубинина, А.А. Куркин, О.Е. Полухина // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2005. Т. 41. № 2. С. 124.
7. **Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Полухина О.Е.** Вариации амплитуды краевых воли при медленном вдольбереговом изменении параметров шельфа / А.А. Куркин, Е.Н. Пелиновский , О.Е. Полухина // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2006. Т. 42. № 3. С. 384–392.
8. **Шамин, Р.В.** Описание динамики волн на воде на основе дифференциальных включений // Доклады Академии наук. 2011. Т. 438. № 4. С. 453–455.
9. **Шамин, Р.В.** Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Сибирский журнал вычислительной математики. 2006. Т. 9. № 4. С. 379–389.
10. **Шамин, Р.В.** К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши-Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 21. С. 133–148.
11. **Шамин, Р.В.** Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане / Р.В. Шамин. – М.: Наука, 2008. – 133 с.
12. **Шамин Р.В.** Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 28. С. 3–14.
13. **Шамин, Р.В.** Поверхностные волны на воде минимальной гладкости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2010. Т. 35. С. 126–140.
14. **Чаликов, Д.В.** Статистика экстремальных ветровых волн // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2009. Т. 5. Вып. 3. С. 4 – 24.
15. **Куркин А.А., Полухина О.Е.** Нелинейная фокусировка аномальных волн Россби в океане: численные эксперименты / А.А. Куркин, О.Е. Полухина // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2005. Т. 41. № 1. С. 105–113.
16. **Whitney, J.C.** The numerical solution of unsteady free-surface flows by conformal mapping // In: Proc. Second Inter. Conf. on Numer. Fluid Dynamics (ed. M. Holt), 1971. Springer-Verlag. P. 458 – 462.
17. **Овсяниикoв Л.В.** К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. / Акад. наук СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики. – Новосибирск, 1973. Вып.15. С. 104–125.
18. **Дьяченко, А.И.** О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // ДАН. 2001. Т. 376. № 1. С. 27–29.
19. **Chalikov D., Sheinin D.** Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface / D. Chalikov, D. Sheinin // Journ. Comp. Phys. 2005. V. 210. P. 247–273.

20. **Ruban, V.P.** Water waves over a time-dependent bottom: Exact description for 2D potential flows // Phys. Lett. A. 2005. V. 340. №. 1–4. P. 194–200.
21. **Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A.** New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface / V.E. Zakharov, A.I. Dyachenko, O.A. Vasilyev // Eur. J.~Mech. B Fluids. 2002. V. 21. P. 283–291.
22. **Захаров В.Е., Шамин Р.В.** О вероятности возникновения волн-убийц / В.Е. Захаров, Р.В. Шамин // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91. Вып. 2. С. 68–71.

Дата поступления
в редакцию 05.05.2014

R.V. Shamin, A.V. Yudin, K.I. Kuznetsov

THE FREQUENCY OF DETECTION OF ANOMALOUSLY LARGE SURFACE WAVES ON THE BASIS COMPUTATIONAL EXPERIMENTS AT A GIVEN POINT OF THE REGION

Sakhalin state university, Yuzhno-Sakhalinsk,
Peoples' friendship university of Russia, Moscow

Purpose: In this paper the abnormally large surface waves are discussed.
Method: The study is based computational simulation experiments flat surface waves on the basis of the full nonlinear equations.
Results: New methods of computational experiments that allow you to perform calculations on a potentially unlimited time interval and for a sufficiently wide spatial area, that is necessary for the study anomalously large surface waves in the ocean, are created and tested. Statistics of the freak-waves, depending on the parameters of the initial excitement, is studied.
Application domain: These results can be used for estimate waiting time freak-waves at a predetermined point.

Key words: freak-wave, numerical experiment, hydrodynamics of an ideal fluid.