

МИКРОЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 531.768.082.14

В.Д. Вавилов

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МИКРОДАТЧИКОВ

Арзамасский политехнический институт (филиал) НГТУ им. Р.Е. Алексева

Вариационный принцип Гамильтона основан на законе сохранения энергии и применяется для установления уравнений движения различных механических систем. Он также полностью применим для микросистем, с помощью которых в настоящее время конструируются измерительно-информационные и управляющие устройства.

Удобный метод теоретических исследований имеет вариационный принцип Гамильтона в форме записи Лагранжа (лагранжиана). В свою очередь лагранжиан представляет собой запись полной энергии в виде суммы из трех составляющих: кинетической энергии, потенциальной и диссипативной (или энергии потерь). Каждая из составляющих энергии зависит от числа степеней свободы подвижных микромеханических узлов. В конечном итоге, форма записи Лагранжа позволяет представлять математические модели микродатчиков в виде передаточных функций широко используемых в приборостроении.

Ключевые слова: вариационный принцип Гамильтона, микродатчик, степени свободы, лагранжиан, обобщенные координаты и силы, передаточные функции.

При установлении уравнения вариационного принципа Гамильтона и его применении пользуются понятием обобщенных координат и сил. Записываются обобщенные координаты в следующем виде:

$$q_i = q_i(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (1)$$

где q_i – обобщенные координаты, представляющие собой траекторию движения i -й точки системы; x_i – декартовы координаты.

Справедлива также и обратная формулировка записи (1). Между дифференциалом и вариацией обобщенных координат существует свойство, выражающее независимость этих операций:

$$\delta(dq) = d(\delta q). \quad (2)$$

Рассмотрим возможные начальные условия для вариаций обобщенных координат. Пусть какая-либо система переместилась из точки A в точку B (рис. 1). Сплошной линией показано прямолинейное движение из начальной точки $q(t_1)$ в конечную точку $q(t_2)$ за время $t_2 - t_1$. Система альтернативно может перемещаться из той же начальной точки в ту же конечную точку за то же время окольными путями. На рисунке показано пунктирной линией. Здесь совершенно очевидно, что вариации траекторий в начальной и конечной точках равны нулю:

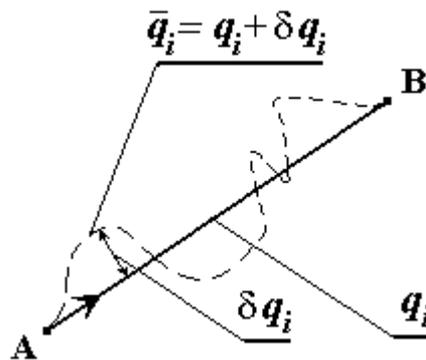


Рис. 1. Движение системы

$$\delta[dq(t_1)] = \delta[dq(t_2)] = 0. \quad (3)$$

В Гамильтоновой механике введено понятие – **действие**, математически оно записывается в следующем виде:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (4)$$

где L – энергия системы, она имеет размерность (Нмс). Учитывая для консервативной системы закон сохранения энергии, имеем $L = \text{const}$. Следовательно, как бы не менялось численно в зависимости от времени действие системы, его вариация первого порядка всегда равна нулю:

$$\delta S = 0. \quad (5)$$

В общем виде первую вариацию **действия** системы через обобщенные координаты можно записать в следующем виде:

$$\delta S = \sum_i^n \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right), \quad (6)$$

\dot{q}_i – производная по времени от обобщенной координаты.

Подставим **действие** (4) в уравнение вариации (6), получим

$$\delta S = \sum_i^n \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \right]. \quad (7)$$

Преобразуем интеграл от второго слагаемого в (7), решив его по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = L \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt. \quad (8)$$

В соответствии с начальными условиями (3) первое слагаемое в правой части уравнения (8) равно нулю. Объединяя формулы (7) и (8), получим

$$\delta S = \sum_i^n \left[\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \right], \quad (9)$$

С учетом свойства (5) для вариации действия механической системы можно утверждать, что оно выполнится только в одном случае, когда подынтегральное выражение в (9) равно нулю. Окончательно запишем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (10)$$

Формула (10) и есть знаменитое уравнение вариационного принципа Гамильтона. Принцип проверен практикой и временем, он используется в различных отраслях науки и техники. Аналогичное по структуре уравнение было разработано Леонардом Эйлером для нахождения вариационных функционалов в задачах оптимизации.

Энергия L механической системы может быть представлена в виде лагранжиана. Лагранжиан назван по фамилии французского ученого Лагранжа и представляет собой запись полной энергии в виде суммы из трех составляющих: кинетической энергии, потенциальной и диссипативной (или энергии потерь):

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + U(q) + D(\dot{q}), \quad (11)$$

где $T(q, \dot{q})$ – кинетическая энергия системы, которая является функцией локальных координат и скоростей, представляющих первые производные от координат по времени; $U(q)$ – потенциальная энергия, представляющая собой функцию от координат и не зависящую от скоростей системы, например, энергия сил упругости; $D(\dot{q})$ – диссипативная энергия. Чаще все-

го из диссипативной энергии рассматривают только составляющую потерь, например, потери на трение при скоростном демпфировании различных подвижных узлов.

В природе и в практической деятельности человека число степеней свободы механических систем обычно ограничено. Делается это чаще всего искусственно в соответствии со здравым смыслом, например, с целью удовлетворения технологическим возможностям или умышленному исключению ненужных в задаче движений. Кинетическая энергия в декартовой системе координат для объектов с шестью степенями свободы: три линейных x, y, z и три угловых α, β, γ , записывается в следующем виде:

$$T(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{J_x\omega_x^2}{2} + \frac{J_y\omega_y^2}{2} + \frac{J_z\omega_z^2}{2}, \quad (12)$$

где m - масса объекта; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ - линейные скорости объекта; J_x, J_y, J_z - моменты инерции системы относительно осей x, y, z ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - угловые скорости объекта. Число компонент в уравнении (12) зависит от числа степеней свободы исследуемого объекта, поэтому в каждом конкретном случае в первую очередь необходимо установить число степеней с учетом заданной погрешности от влияния отбрасываемых координат. Уравнение (12) для кинетической энергии связывает функционально между собой линейные и угловые скорости, а также массу и моменты инерции объектов, поэтому оно одновременно является одним из основных уравнений *связи*.

Производные от потенциальной энергии по обобщенным координатам названы обобщенными силами. Это могут быть силы упругости, массовые силы при действии ускорений, силы Кориолиса, электрические и магнитные силы, вызывающие действия и другие:

$$Q_x = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \quad Q_y = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \quad Q_z = -\frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}, \quad (13)$$

где Q_x, Q_y, Q_z - обобщенные силы.

Конкретизируем запись обобщенных сил упругости и сил демпфирования в декартовой системе координат:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= G_x x, \quad F_y = G_y y, \quad F_z = G_z z, \\ F_\alpha &= G_\alpha \alpha, \quad F_\beta = G_\beta \beta, \quad F_\gamma = G_\gamma \gamma, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где G_x, G_y, G_z - жесткости линейных сил упругости; $G_\alpha, G_\beta, G_\gamma$ - жесткости угловых сил упругости;

$$\left. \begin{aligned} D_x &= K_x \dot{x}, \quad D_y = K_y \dot{y}, \quad D_z = K_z \dot{z}, \\ D_\alpha &= K_\alpha \dot{\alpha}, \quad D_\beta = K_\beta \dot{\beta}, \quad D_\gamma = K_\gamma \dot{\gamma}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где K_x, K_y, K_z - абсолютные коэффициенты линейных сил демпфирования; $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma$ - абсолютные коэффициенты угловых сил демпфирования.

Рассмотрим пример построения математической модели чувствительного элемента микроакселерометра осево-

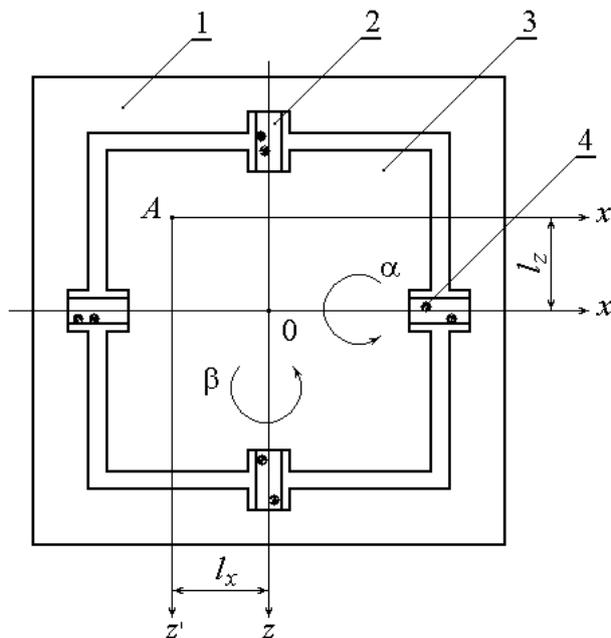


Рис. 2. Осевой чувствительный элемент микроакселерометра:

- 1 – неподвижная корпусная пластина,
- 2 – упругий подвес, 3 – подвижный узел,
- 4 – дефекты подвеса

го типа. Под влиянием действующих сил, приложенных к центру симметрии, жесткий центр имеет три взаимовлияющих движения, т.е. имеет три степени свободы: линейное перемещение вдоль оси y и угловые перемещения относительно осей x и z . Причем угловые перемещения относительно осей x и z обуславливаются технологическим разбросом параметров упругих перемычек или смещением центра масс относительно оси симметрии.

Точка A на рис. 2 представляет собой условную точку, при переносе в которую силы инерции F_j из действительного центра тяжести O подвижная часть чувствительной массы имеет только одну поступательную степень свободы - вдоль оси y . Координаты l_x и l_z зависят от неидентичности жесткостей тонких подвесов с разных сторон чувствительной массы. Для идеального подвеса $l_x = l_z = 0$.

Запишем для несовершенной конструкции чувствительной массы уравнения Лагранжа второго рода в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_\alpha, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \beta} = Q_\beta, \quad (16)$$

где $T = mv_c^2/2 + J_{cx} \omega_x^2/2 + J_{cz} \omega_z^2/2$ - кинетическая энергия жесткого центра чувствительной массы; m - масса жесткого центра чувствительной массы; $v_c = \dot{y} + \omega_x^2 l_x + \omega_z^2 l_z$ - линейная скорость центра масс; $\omega_x = \dot{\alpha}$, $\omega_z = \dot{\beta}$ - угловые скорости жесткого центра относительно осей x и z ; $J_{cx} = m(b_c^2 + c_c^2)/12$, $J_{cz} = m(a_c^2 + c_c^2)/12$, - моменты инерции относительно осей, проходящих через центр масс и параллельных соответственно осям x и z ; a_m, b_m, c_m - линейные размеры чувствительной массы; α, β - углы поворотов чувствительной массы относительно осей z и x соответственно. Преобразуем моменты инерции чувствительной массы относительно осей z' и x' :

$$J_{ax} = J_{cx} + ml_x^2, \quad J_{az} = J_{cz} + ml_z^2.$$

В развернутом виде формула для кинетической энергии жесткого центра представляется в виде

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + m \dot{y} \dot{\beta} l_z + m \dot{y} \dot{\alpha} l_x + m \dot{\alpha} \dot{\beta} l_x l_z + \frac{1}{2} J_{ax} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} J_{az} \dot{\beta}^2. \quad (17)$$

Дифференцируя выражение (17), получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) &= m \ddot{y} + m \ddot{\alpha} l_x + m \ddot{\beta} l_z, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) &= m \dot{y} l_x + J_{ax} \ddot{\alpha} + m \dot{\beta} l_x l_z, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} \right) &= m \dot{y} l_z + m \dot{\alpha} l_x l_z + J_{az} \ddot{\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Силы упругости определяются в зависимости от соотношений жесткостей упругих подвесов, а силы демпфирования пропорциональны первой степени скорости соответствующего перемещения. Коэффициентами пропорциональности являются абсолютные коэффициенты демпфирования. Обеспечение демпфирования возможно несколькими способами: газодинамическим, гистерезисным или при помощи корректирующих устройств, включаемых в электрический контур обратной связи.

С учетом сил демпфирования линейных и угловых движений жесткого центра, а также линейных и угловых жесткостей сил упругих подвесов обобщенные силы можно выразить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} Q_y &= F_j - K_d \dot{y} - G_0 y, \\ Q_\alpha &= F_j l_x - K_{d\alpha} \dot{\alpha} - G_\alpha \alpha, \\ Q_\beta &= F_j l_z - K_{d\beta} \dot{\beta} - G_\beta \beta, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где $K_d, K_{d\alpha}, K_{d\beta}$ - линейный и угловые абсолютные коэффициенты демпфирования; G_0 - линейная жесткость упругих подвесов; G_α, G_β - угловые жесткости упругих переключателей относительно осей z и x , соединяющие жесткий центр с корпусной пластиной.

Подставив (18) и (19) в исходные уравнения Лагранжа (16), получим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение интегральной чувствительной массы:

$$\left. \begin{aligned} ml_z \ddot{\beta} + ml_x \ddot{\alpha} + m\ddot{y} + K_d \dot{y} + G_0 y &= F_j, \\ ml_x \ddot{y} + ml_x l_z \ddot{\beta} + J_{ax} \ddot{\alpha} + K_{d\alpha} \dot{\alpha} + G_\alpha \alpha &= F_j l_x, \\ ml_z \ddot{y} + ml_x l_z \ddot{\alpha} + J_{az} \ddot{\beta} + K_{d\beta} \dot{\beta} + G_\beta \beta &= F_j l_z. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Перейдем от дифференциальных уравнений (20) к операторной форме записи, а также добавим к ним зависимость полного перемещения y_c центра масс от вращательных компонент:

$$\left. \begin{aligned} (ms^2 + K_d s + G_0)y + ml_x s^2 \alpha + ml_z s^2 \beta &= F_j, \\ ml_x s^2 y + (J_{ax} s^2 + K_{d\alpha} s + G_\alpha) \alpha + ml_x l_z s^2 \beta &= F_j l_x, \\ ml_z s^2 y + ml_x l_z s^2 \alpha + (J_{az} s^2 + K_{d\beta} s + G_\beta) \beta &= F_j l_z, \\ y_c &= y + \alpha l_x + \beta l_z, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где $s = d/dt$ - оператор Лапласа.

Передаточную функцию жесткого центра при реальных интегральных подвесах можно записать как отношение преобразования Лапласа для полного перемещения y_c центра масс к преобразованию Лапласа для входного воздействия F_j :

$$W_y(s) = \frac{y_c(s)}{F_j(s)} = \frac{y(s) + \alpha(s)l_x + \beta(s)l_z}{F_j(s)}. \quad (22)$$

Определим преобразования Лапласа для линейных и угловых перемещений из системы операторных уравнений (21):

$$y(s) = \Delta_y / \Delta, \quad \beta(s) = \Delta_\beta / \Delta, \quad \alpha(s) = \Delta_\alpha / \Delta, \quad (23)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} ms^2 + K_d s + G_0 & ml_x s^2 & ml_z s^2 \\ ml_x s^2 & J_{ax} s^2 + K_{d\alpha} s + G_\alpha & ml_x l_z s^2 \\ ml_z s^2 & ml_x l_z s^2 & J_{az} s^2 + K_{d\beta} s + G_\beta \end{vmatrix};$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} F_d & ml_x s^2 & ml_z s^2 \\ F_d l_x & J_{ax} s^2 + K_{d\alpha} s + G_\alpha & ml_x l_z s^2 \\ F_d l_z & ml_x l_z s^2 & J_{az} s^2 + K_{d\beta} s + G_\beta \end{vmatrix};$$

$$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} ms^2 + K_d s + G_0 & F_d & ml_z s^2 \\ ml_x s^2 & F_d l_x & ml_x l_z s^2 \\ ml_z s^2 & F_d l_z & J_{az} s^2 + K_{d\beta} s + G_\beta \end{vmatrix};$$

$$\Delta_{\beta} = \begin{vmatrix} ms^2 + K_{\text{д}}s + G_0 & ml_x s^2 & F_j \\ ml_x s^2 & J_{ax} s^2 + K_{\text{д}\alpha} s + G_{\alpha} & F_j l_x \\ ml_z s^2 & ml_x l_z s^2 & F_j l_z \end{vmatrix}.$$

Выражение (22) для передаточной функции жесткого центра с учетом (23) можно записать в виде

$$W_y(s) = \frac{\Delta_y + \Delta_{\alpha} l_x + \Delta_{\beta} l_z}{\Delta F_j}. \quad (24)$$

Подставим значения определителей Δ , Δ_y , Δ_{α} и Δ_{β} в формулу (24) и после преобразований получим передаточную функцию для интегральной чувствительной массы:

$$W_y(s) = K \frac{b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + 1}{a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} K &= \frac{b_0}{a_0} = \frac{G_{\alpha} G_{\beta} + G_{\alpha} G_0 l_z^2 + G_{\beta} G_0 l_x^2}{G_0 G_{\alpha} G_{\beta}}; \\ b_0 &= G_{\alpha} G_{\beta} + G_{\alpha} G_0 l_z^2 + G_{\beta} G_0 l_x^2; \\ b_1 &= [G_{\alpha} (K_{\text{д}} l_z^2 + K_{\text{д}\beta}) + G_{\beta} (K_{\text{д}} l_x^2 + K_{\text{д}\alpha}) + G_0 (K_{\text{д}\alpha} l_z^2 + K_{\text{д}\beta} l_x^2)] / b_0; \\ b_2 &= [K_{\text{д}\alpha} K_{\text{д}\beta} + K_{\text{д}} K_{\text{д}\beta} l_x^2 + K_{\text{д}} K_{\text{д}\alpha} l_z^2 + J_{cz} (G_{\alpha} + G_0 l_x^2) + J_{cx} (G_{\beta} + G_0 l_z^2)] / b_0; \\ b_3 &= [J_{cx} (K_{\text{д}} l_z^2 + K_{\text{д}\beta}) + J_{cz} (K_{\text{д}} l_x^2 + K_{\text{д}\alpha})] / b_0; \\ b_4 &= J_{cx} J_{cz} / b_0; \\ a_0 &= G_0 G_{\alpha} G_{\beta}; \\ a_1 &= (K_{\text{д}} G_{\alpha} G_{\beta} + K_{\text{д}\alpha} G_{\beta} G_0 + K_{\text{д}\beta} G_{\alpha} G_0) / a_0; \\ a_2 &= (m G_{\alpha} G_{\beta} + J_{az} G_{\alpha} G_0 + J_{ax} G_{\beta} G_0 + K_{\text{д}} K_{\text{д}\alpha} G_{\beta} + K_{\text{д}} K_{\text{д}\beta} G_{\alpha} + K_{\text{д}\alpha} K_{\text{д}\beta} G_0) / a_0; \\ a_3 &= [m (K_{\text{д}\alpha} G_{\beta} + K_{\text{д}\beta} G_{\alpha}) + J_{az} (K_{\text{д}} G_{\alpha} + K_{\text{д}\alpha} G_0) + J_{ax} (K_{\text{д}} G_{\beta} + K_{\text{д}\beta} G_0) + \\ &+ K_{\text{д}} K_{\text{д}\alpha} K_{\text{д}\beta}] / a_0; \\ a_4 &= [m J_{cz} G_{\alpha} + m J_{cx} G_{\beta} + G_0 (J_{ax} J_{az} - m^2 l_x^2 l_z^2) + m K_{\text{д}\alpha} K_{\text{д}\beta} + J_{az} K_{\text{д}} K_{\text{д}\alpha} + \\ &+ J_{ax} K_{\text{д}} K_{\text{д}\beta}] / a_0; \\ a_5 &= [m J_{cz} K_{\text{д}\alpha} + m J_{cx} K_{\text{д}\beta} + K_{\text{д}} (J_{ax} J_{az} - m^2 l_x^2 l_z^2)] / a_0; \\ a_6 &= m J_{cx} J_{cz} / a_0. \end{aligned}$$

В практических конструкциях интегральных датчиков ускорений исходные пластины кремния для травления ЧЭ подвергают тщательному контролю по равномерности распределения примесей и дислокаций. Контролю подвергаются также фотошаблоны и весь процесс анизотропного травления. Поэтому получаемые упругие подвесы по своим параметрам близки к идеальным. В рассматриваемом случае подвижный узел чувствительной массы имеет только одну линейную степень свободы - вдоль оси y . Передаточная функция такой чувствительной массы из уравнений (22) при $Q_{\alpha} = Q_{\beta} = 0$ может быть получена в следующем виде:

$$W_y^{\text{ИДБ}}(s) = \frac{1}{ms^2 + K_{\text{ДБ}}s + G_0}. \quad (26)$$

Очевидно, что при соблюдении требований ко всем технологическим процессам изготовления интегральных мембран их передаточная функция будет близка к виду (26). Ошибку крутизны статической характеристики мембраны можно рассчитать как отношение разности между крутизной характеристики несовершенного и идеального чувствительных элементов к крутизне идеального чувствительного элемента, т.е.

$$\delta_K = \frac{G_0 l_z^2}{G_\beta} + \frac{G_0 l_x^2}{G_\alpha}. \quad (27)$$

Найдем соотношения между угловыми и линейными жесткостями из рассмотрения перемещений чувствительной массы с несовершенными упругими подвесами от действия сил упругости и сил инерции. Допуская перемещения и углы поворотов чувствительной массы относительно исходного положения малыми, уравнения моментов сил для плоскостей xu и yz в соответствии со схемой рис. 2 можно записать так:

$$\begin{aligned} G_\alpha \alpha &= F_1(a_m - l_x) + F_2(a_m + l_x), \\ G_\beta \beta &= F_3(b_m - l_z) + F_4(b_m + l_z), \end{aligned} \quad (28)$$

где $F_1 = \frac{G_0}{2} y_1$, $F_2 = \frac{G_0}{2} y_2$, $F_3 = \frac{G_0}{2} y_3$, $F_4 = \frac{G_0}{2} y_4$ - силы упругости, приведенные к внешним сторонам чувствительной массы, вызванные суммарной силой:

$y_1 = \left(\frac{a_m}{2} - l_x\right)\alpha$, $y_2 = \left(\frac{a_m}{2} + l_x\right)\alpha$, $y_3 = \left(\frac{b_m}{2} - l_z\right)\beta$, $y_4 = \left(\frac{b_m}{2} + l_z\right)\beta$ - перемещения внешних сторон чувствительной массы; α и β - соответственно углы наклонов плоскости жесткого центра относительно исходного положения. Выполнив преобразования в (28), получим

$$G_\alpha = G_0 \left(\frac{a_m^2}{4} + l_x^2 \right), \quad G_\beta = G_0 \left(\frac{b_m^2}{4} + l_z^2 \right). \quad (29)$$

Решая совместно уравнения (29) и (27), запишем ошибку крутизны статической характеристики интегральной чувствительной массы в виде

$$\delta_K = \frac{l_x^2}{a_m^2/4 + l_x^2} + \frac{l_z^2}{b_m^2/4 + l_z^2}. \quad (30)$$

Величины l_x и l_z имеют случайный характер и зависят от распределения дефектов в материале упругих подвесов. Для идеальных упругих подвесов $l_x = l_z = 0$, следовательно, ошибка крутизны характеристики равна нулю. В критическом случае, например, при разрушении каких-либо двух смежных упругих перемычек условная точка А перемещается на противоположный с ними угол чувствительной массы, а ошибка крутизны достигает 100 %. Результирующая формула (30) полезна для нахождения допустимой области смещения чувствительной массы, представляющей собой площадь $l_x l_z$, определяемую по заданной ошибке крутизны статической характеристики.

Выводы

1. Разработан обобщенный метод построения математических моделей микродатчиков;
2. Рассмотрен практический пример теоретического описания чувствительного элемента микроакселерометра осевого типа.
3. Показано возникновение возможных погрешностей характеристик микродатчиков, обусловливаемых неоднородностью конструкционного материала.

Библиографический список

1. Хаар, Д. Основы гамильтоновой механики / Д. Хаар. – М.: Наука, 1974. – 224 с.
2. Вавилов, В.Д. Интегральные датчики: учеб. пособие / В.Д. Вавилов; НГТУ. – Н. Новгород, 2003. – 503 с.

*Дата поступления
в редакцию 06.02.2012*

V.D. Vavilov

APPLICATION OF THE VARIATIONAL PRINCIPLE OF HAMILTON TO BUILD MATHEMATICAL MODELS OF MICROSENSORS

Arzamas polytechnic institute (branch) Nizhny Novgorod state technical university
n.a. R.E. Alexeev

Purpose: The Variational principle Hamilton is founded on law of the conservation to energy and is used for determination of the equations of the moving the different mechanical systems.

Findings: He also shall completely use for micro systems by means of which at present create measuring-information and controlling device. The Suitable method of the basic researches has a variational principle Hamilton in the form record Lagranzha (lagranzhians).

Research /limitations /implications: In turn lagranzhians) presents itself writing the full energy in the manner of amounts from three forming: kinetic energy, potential and loss to energy (or energy of the losses. Each of forming energy depends on numbers of the degrees of the liberty rolling MEMS nodes.

Originality /value: Finally, the form record Lagranzha allows to present the mathematical models an microsens in the manner of transmission function broadly used in instrument construction.

Key words: variational principle Hamilton, microsensor, degree of the liberty, Lagranzhian, generalised coordinates and power, transmission functions.