

РАДИОТЕХНИКА, СИСТЕМЫ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ, АНТЕННЫ И УСТРОЙСТВА СВЧ

УДК.681.783;68.137

В.А. Малахов¹, К.В. Попков², А.С. Раевский¹

ПОИСК КОМПЛЕКСНЫХ РЕШЕНИЙ ДИСПЕРСИОННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛН КРУГЛОГО ОТКРЫТОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА С МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛЕНКОЙ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева¹,
ООО «Современные технологии мониторинга», Н. Новгород²

Рассмотрен комбинированный метод поиска комплексных решений дисперсионных задач на примере круглого открытого диэлектрического волновода с металлической нанопленкой. Приведены результаты расчетов дисперсионных характеристик плазмон-поляритонных волн, распространяющихся в круглом диэлектрическом волноводе с металлической нанопленкой. Найдены комплексные решения дисперсионной задачи для рассматриваемой направляющей электродинамической структуры без учета потерь и с учетом потерь в металле.

Ключевые слова: металлическая нанопленка, дисперсионная задача, комплексные решения, плазмон-поляритонные волны.

Введение

Если краевая задача для направляющей электродинамической структуры является несамосопряженной, то даже при отсутствии диссипации энергии решения дисперсионного уравнения, наряду с действительными и мнимыми, могут быть комплексными [1]. В структурах с потерями все решения дисперсионного уравнения комплексные.

Так как комплексные решения дисперсионных уравнений соответствуют наиболее общим решениям несамосопряженных краевых задач, то необходимо разработать действенный метод поиска комплексных корней, позволяющий избежать появления ложных решений. В статье рассматривается поиск комплексных решений дисперсионной задачи на примере открытого диэлектрического волновода с металлической пленкой. Для этого применяется предложенный авторами комбинированный метод поиска комплексных решений дисперсионной задачи [2, 3].

Комбинированный метод поиска корней является комбинацией метода Мюллера и метода вариации фазы, что позволяет использовать только лучшие стороны обоих методов, а именно: быстроту метода Мюллера и возможность идентификации ложных корней методом вариации фазы [4].

Комбинированный метод поиска комплексных корней

Рассмотрим более подробно суть комбинированного метода поиска комплексных корней. На определенной частоте f_i область поиска по комплексному волновому числу $\beta = \beta_1 + i\beta_2$ разбивается на $K = N \cdot M$ подобластей (рис. 1) на интервале $\beta \in [\beta_{\text{нач}}, \beta_{\text{кон}}]$. На рис. 1 кружками показаны подобласти, в которых существуют решения.

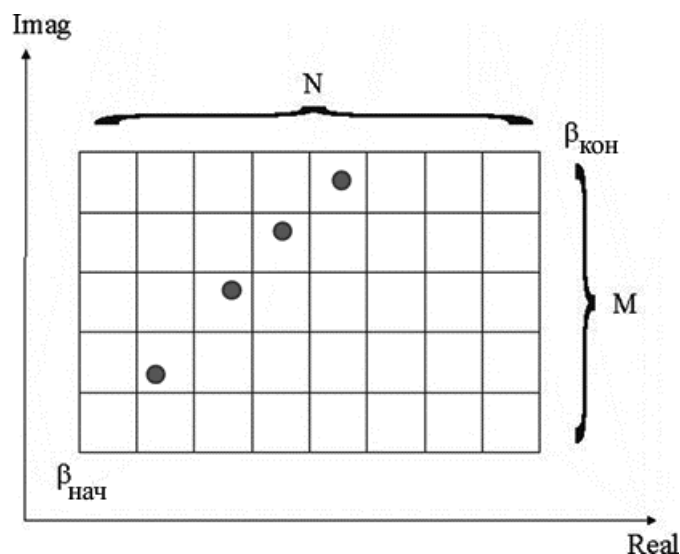


Рис. 1

В каждой прямоугольной подобласти последовательно выбираются три начальные точки, например, как показано на рис. 2, а далее методом Мюллера проверяется наличие корня.

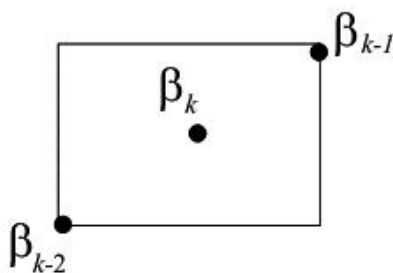


Рис. 2

Если предполагаемое решение в исследуемой подобласти найдено, то обходом по контуру, используя метод вариации фазы, проверяется, является ли найденное решение истинным корнем или локальным минимумом. Если методом вариации фазы подтверждается истинность найденного решения, оно записывается в память. Возможен также вариант поиска, когда сначала методом вариации фазы определяется наличие в данной подобласти решения, которое затем уточняется методом Мюллера и записывается в память. После этого происходит переход к следующей подобласти.

Когда анализ всех K подобластей закончен, происходит переход на следующую частоту $f_{i+1} = f_i + h_i$ и описанные действия повторяются до тех пор, пока не пройден заданный частотный диапазон.

Комбинированный метод поиска лишен недостатков, присущих методу Мюллера и методу вариации фазы. Он позволяет использовать быстроту нахождения комплексных корней методом Мюллера и однозначность идентификации комплексного корня методом вариации фазы.

В табл. 1 приведены результаты замеров времени при поиске комплексных корней одного и того же дисперсионного уравнения различными методами на персональном компьютере с процессором Intel® i7 950 с тактовой частотой 3.07 ГГц, размер ОЗУ – 6 Гб. Результаты были округлены в большую сторону. Для каждого метода в определенном частотном диапазоне найдено одинаковое количество комплексных корней дисперсионного уравнения волн рассматриваемой ниже структуры.

Таблица 1

Название метода	Время расчета, мин	Точность расчета
Метод половинного деления	17	0,00001
Метод Мюллера	5	0,00001
Метод вариации фазы	21	0,00001
Комбинированный метод	7	0,00001

Из табл. 1 видно, что наилучшие быстродействие показал метод Мюллера, но наравне с истинными решениями были получены ложные корни, которые метод Мюллера не исключает. Наибольшее время было затрачено при расчете методом вариации фазы, однако этот метод обладает свойством точной идентификации наличия или отсутствия корня в заданной области.

Метод половинного деления обладает достаточно большим временем поиска комплексных корней и кроме истинных решений выдает ложные (полюса).

Комбинированный метод показал быстродействие, близкое к методу Мюллера, но, в отличие от него, благодаря использованию метода вариации фазы, он выдает только истинные решения.

На основе комбинированного метода поиска комплексных корней была создана подпрограмма расчета дисперсионных характеристик исследуемых в диссертации направляющих структур в интегрированной среде разработки Microsoft Visual Studio 2010, на языке C++, и получено свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ[5]. Рассмотрим поиск комплексных корней на примере круглого открытого диэлектрического волновода с металлической пленкой.

Круглый открытый диэлектрический волновод с металлической пленкой

Рассматриваемая направляющая электродинамическая структура приведена на рис. 3.

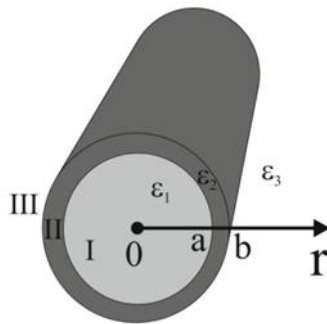


Рис. 3

Для рассматриваемой структуры ставится краевая задача на уравнении Гельмгольца:

$$\Delta \Pi_z^{e,m} + \epsilon \mu \omega^2 \Pi_z^{e,m} = 0. \tag{1}$$

Решения уравнения Гельмгольца для каждой из трех областей:

- I область (диэлектрический стержень)

$$\begin{cases} \Pi_{z1}^e = A_1 J_n(\alpha_1 r) \cos n \varphi e^{-i\beta z}; \\ \Pi_{z1}^m = B_1 J_n(\alpha_1 r) \sin n \varphi e^{-i\beta z}; \end{cases} \tag{2}$$

- II область (металлическая пленка)

$$\begin{cases} \Pi_{z2}^e = [A_2 J_n(\alpha_2 r) + B_2 Y_n(\alpha_2 r)] \cos n \varphi e^{-i\beta z}; \\ \Pi_{z2}^m = [\bar{A}_2 J_n(\alpha_2 r) + \bar{B}_2 Y_n(\alpha_2 r)] \sin n \varphi e^{-i\beta z}; \end{cases} \tag{3}$$

- III область (внешняя бесконечная среда)

$$\begin{cases} \Pi_{z3}^e = A_3 H_n^{(2)}(\alpha_3 r) \cos n\varphi e^{-i\beta z}; \\ \Pi_{z3}^m = B_3 H_n^{(2)}(\alpha_3 r) \sin n\varphi e^{-i\beta z}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\alpha_{1,2,3}$ – поперечные волновые числа первой, второй и третьей областей, которые связаны с продольным волновым числом β соотношением:

$$\varepsilon_{1,2,3} \mu_{1,2,3} \omega^2 = \alpha_{1,2,3}^2 + \beta^2, \quad (5)$$

где J_n, Y_n – функции Бесселя первого и второго рода, $H_n^{(2)}$ – функции Ханкеля второго рода.

Комплексная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_2 = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$ второй области для металлической пленки в оптическом диапазоне в соответствии с теорией Друде-Зоммерфельда рассчитывается по формуле [6]:

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_{r0} - \omega_p^2 / \omega^2; \quad (6)$$

$$\varepsilon_i(\omega) = \varepsilon_{i0} + \Gamma \omega_p^2 / \omega^3, \quad (7)$$

где $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m_e} \approx 1.43 \cdot 10^{16} \text{ c}^{-1}$ – плазменная частота электронного газа; ε_{r0} – константа, учитывающая межзонные переходы в металле, обычно варьируется от 1 до 10, Γ – коэффициент затухания, учитывающий потери ($\Gamma \approx 10^{14} \text{ c}^{-1}$), $\varepsilon_{i0} = 0$.

Выражая через вектора Герца компоненты векторов напряженности электрического и магнитного поля, получаем

- I область:

$$E_{z1} = \alpha_1^2 A_1 J_n(\alpha_1 r) \cos n\varphi e^{-i\beta z};$$

$$H_{z1} = \alpha_1^2 B_1 J_n(\alpha_1 r) \sin n\varphi e^{-i\beta z};$$

$$E_{r1} = \left[-i\beta \alpha_1 A_1 J'_n(\alpha_1 r) - \frac{i\omega \mu_1 n}{r} B_1 J_n(\alpha_1 r) \right] \cos n\varphi e^{-i\beta z};$$

$$H_{r1} = \left[-\frac{i\omega \varepsilon_1 n}{r} A_1 J_n(\alpha_1 r) - i\beta \alpha_1 B_1 J'_n(\alpha_1 r) \right] \sin n\varphi e^{-i\beta z};$$

$$E_{\varphi 1} = \left[\frac{i\beta n}{r} A_1 J_n(\alpha_1 r) + i\omega \mu_1 \alpha_1 B_1 J'_n(\alpha_1 r) \right] \sin n\varphi e^{-i\beta z};$$

$$H_{\varphi 1} = \left[-i\omega \varepsilon_1 \alpha_1 A_1 J'_n(\alpha_1 r) - \frac{i\beta n}{r} B_1 J_n(\alpha_1 r) \right] \cos n\varphi e^{-i\beta z};$$

- II область:

$$E_{z2} = \alpha_2^2 [A_2 J_n(\alpha_2 r) + B_2 Y_n(\alpha_2 r)] \cos n\varphi e^{-i\beta z};$$

$$H_{z2} = \alpha_2^2 [\bar{A}_2 J_n(\alpha_2 r) + \bar{B}_2 Y_n(\alpha_2 r)] \sin n\varphi e^{-i\beta z};$$

$$E_{r2} = -i \left\{ \beta \alpha_2 [A_2 J'_n(\alpha_2 r) + B_2 Y'_n(\alpha_2 r)] + \frac{\omega \mu_2 n}{r} [\bar{A}_2 J_n(\alpha_2 r) + \bar{B}_2 Y_n(\alpha_2 r)] \right\} \cos n\varphi e^{-i\beta z};$$

$$H_{r2} = -i \left\{ \frac{\omega \varepsilon_2 n}{r} [A_2 J_n(\alpha_2 r) + B_2 Y_n(\alpha_2 r)] + \beta \alpha_2 [\bar{A}_2 J'_n(\alpha_2 r) + \bar{B}_2 Y'_n(\alpha_2 r)] \right\} \sin n\varphi e^{-i\beta z};$$

$$E_{\varphi 2} = i \left\{ \frac{\beta n}{r} [A_2 J_n(\alpha_2 r) + B_2 Y_n(\alpha_2 r)] + \omega \mu_2 \alpha_2 [\bar{A}_2 J'_n(\alpha_2 r) + \bar{B}_2 Y'_n(\alpha_2 r)] \right\} \sin n\varphi e^{-i\beta z};$$

$$H_{\varphi 2} = -i \left\{ \omega \varepsilon_2 \alpha_2 [A_2 J'_n(\alpha_2 r) + B_2 Y'_n(\alpha_2 r)] + \frac{\beta n}{r} [\bar{A}_2 J_n(\alpha_2 r) + \bar{B}_2 Y_n(\alpha_2 r)] \right\} \cos n\varphi e^{-i\beta z};$$

- III область:

$$E_{z3} = \alpha_3^2 A_3 H_n^{(2)}(\alpha_3 r) \cos n\varphi e^{-i\beta z};$$

$$H_{z3} = \alpha_3^2 B_3 H_n^{(2)}(\alpha_3 r) \sin n\varphi e^{-i\beta z};$$

$$E_{r3} = \left[-i\beta \alpha_3 A_3 H_n^{(2)'}(\alpha_3 r) - \frac{i\omega \mu_3 n}{r} B_3 H_n^{(2)}(\alpha_3 r) \right] \cos n\varphi e^{-i\beta z};$$

$$H_{r3} = \left[-\frac{i\omega \varepsilon_3 n}{r} A_3 H_n^{(2)}(\alpha_3 r) - i\beta \alpha_3 B_3 H_n^{(2)'}(\alpha_3 r) \right] \sin n\varphi e^{-i\beta z};$$

$$E_{\varphi 3} = \left[\frac{i\beta n}{r} A_3 H_n^{(2)}(\alpha_3 r) + i\omega \mu_3 \alpha_3 B_3 H_n^{(2)'}(\alpha_3 r) \right] \sin n\varphi e^{-i\beta z};$$

$$H_{\varphi 3} = \left[-i\omega \varepsilon_3 \alpha_3 A_3 H_n^{(2)'}(\alpha_3 r) - \frac{i\beta n}{r} B_3 H_n^{(2)}(\alpha_3 r) \right] \cos n\varphi e^{-i\beta z};$$

Подставляем компоненты поля в граничные условия:

- 1) $E_{z1}|_{r=a} = E_{z2}|_{r=a}$
- 2) $E_{\varphi 1}|_{r=a} = E_{\varphi 2}|_{r=a}$
- 3) $H_{\varphi 1}|_{r=a} = H_{\varphi 2}|_{r=a}$;
- 4) $H_{z1}|_{r=a} = H_{z2}|_{r=a}$
- 5) $E_{z2}|_{r=b} = E_{z3}|_{r=b}$
- 6) $E_{\varphi 2}|_{r=b} = E_{\varphi 3}|_{r=b}$
- 7) $H_{\varphi 1}|_{r=b} = H_{\varphi 2}|_{r=b}$;
- 8) $H_{z1}|_{r=b} = H_{z2}|_{r=b}$

(8)

Получаем систему из восьми однородных уравнений относительно неизвестных амплитудных коэффициентов. Чтобы система имела нетривиальные решения, её определитель должен быть равен нулю.

Расчеты дисперсионных характеристик волн произведены при $\varepsilon_{r0} = 6$ для серебряной пленки [7].

На рис. 4 изображены дисперсионные характеристики четной 1 и нечетной 2 поверхностных плазмон-поляритонных волн (ППВ) и комплексной волны 3 без учета потерь в пленке для структуры со следующими параметрами: радиус диэлектрического стержня $a=100$ нм, толщина пленки 10 нм, $\varepsilon_1 = 2.84$, $\varepsilon_3 = 1$.

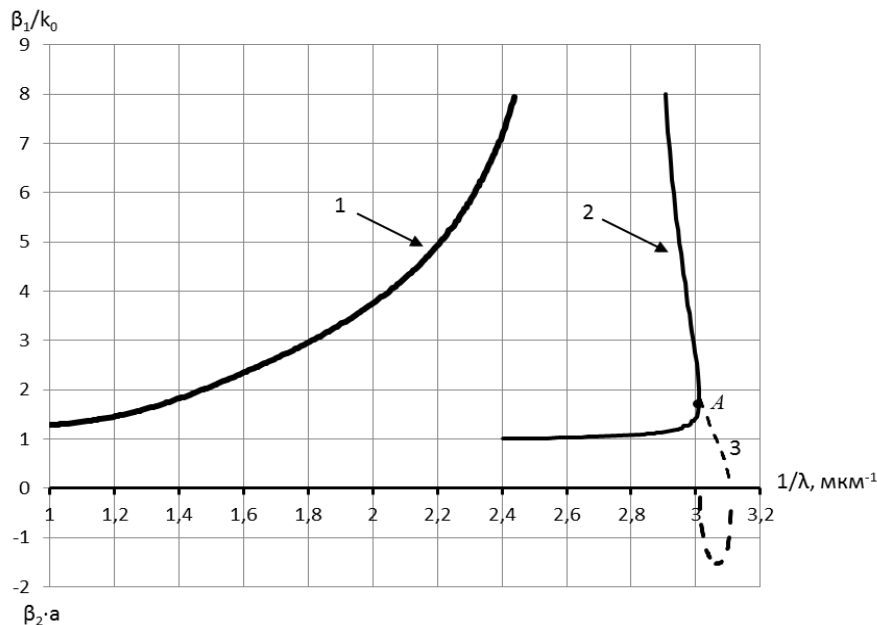


Рис. 4

На дисперсионной характеристике нечетной волны имеется двузначный участок, а в точке *A* образуется комплексная волна (показана пунктиром).

С учетом комплексности диэлектрической проницаемости металла дисперсионные характеристики и характеристики затухания волн для структуры со следующими параметрами: радиус диэлектрического стержня $a=100$ нм, толщина пленки 10 нм, (общий радиус 110 нм) $\epsilon_1 = 2.84$, $\epsilon_3 = 1$, приведены на рис. 5.

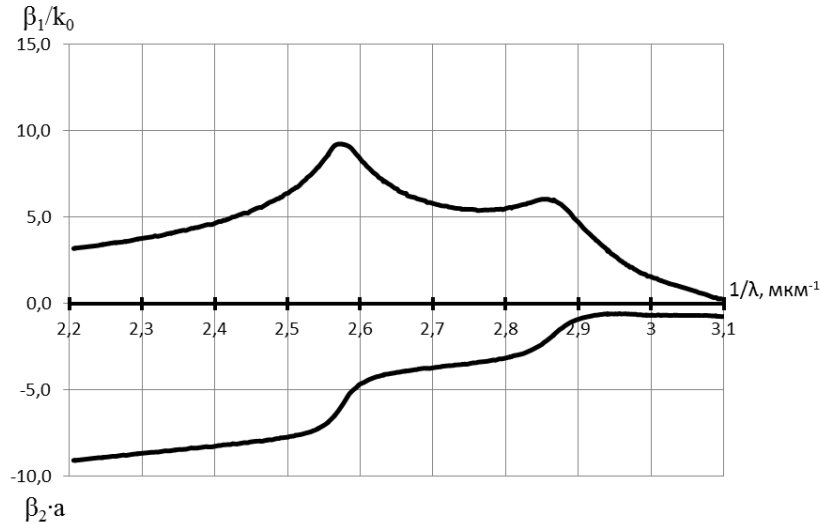


Рис. 5

Дисперсионная характеристика ППВ волны имеет два максимума, когда металлическая пленка окружена диэлектриками с разными диэлектрическими проницаемостями. Большой максимум (рис. 5) расположен на частоте, на которой $|\epsilon_2|=|\epsilon_1|=2.84$, а меньший максимум на частоте когда $|\epsilon_2|=|\epsilon_3|=1$. Разрывов в характеристике нет, а участок, соответствующий комплексной волне в среде без потерь, является продолжением дисперсионной характеристики ППВ волны на высоких частотах. Такая трансформация наблюдалась и в рассмотренных выше структурах.

На рис.6 изображена зависимость модуля компоненты электрического поля E_z от координаты r для электродинамической структуры с пленкой толщиной 10 нм, радиусом внутреннего слоя $a=100$ нм, $1/\lambda \approx 2,54 \text{ мкм}^{-1}$, вблизи большого максимума.

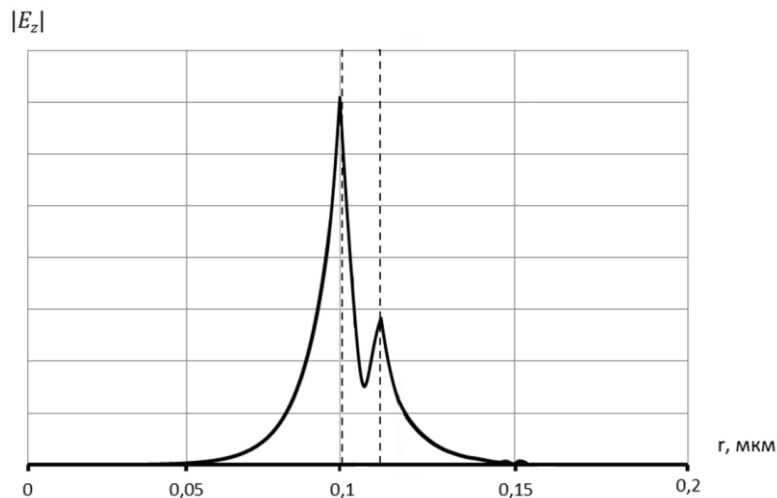


Рис. 6

Распределение $|E_z|$ от координаты r соответствует распределению компоненты электрического поля $|E_z|$ нечетной ППП волны. Так же как и в рассмотренных в данной главе структурах вблизи главного максимума значения $|E_z|$ со стороны границы металл-диэлектрик больше, чем поле со стороны границы металл-воздух.

На рис. 7, а приведены дисперсионные характеристики, а на рис. 7, б – характеристики затухания ППВ в диэлектрическом стержне с металлической нанопленкой: $a=5$ нм, $b=10$ нм, $\epsilon_1 = 2.84$, $\epsilon_3 = 1$, для нанопленки $\epsilon_{r0} = 6$ (материал серебро), соотношение размеров слоев составляет $\frac{b-a}{b} = 0,5$. Характеристики, обозначенные цифрами от 1 до 6, соответствуют характеристикам плазмон-поляритонных волн металлического стержня с номерами 1 – 6 (рис. 7).

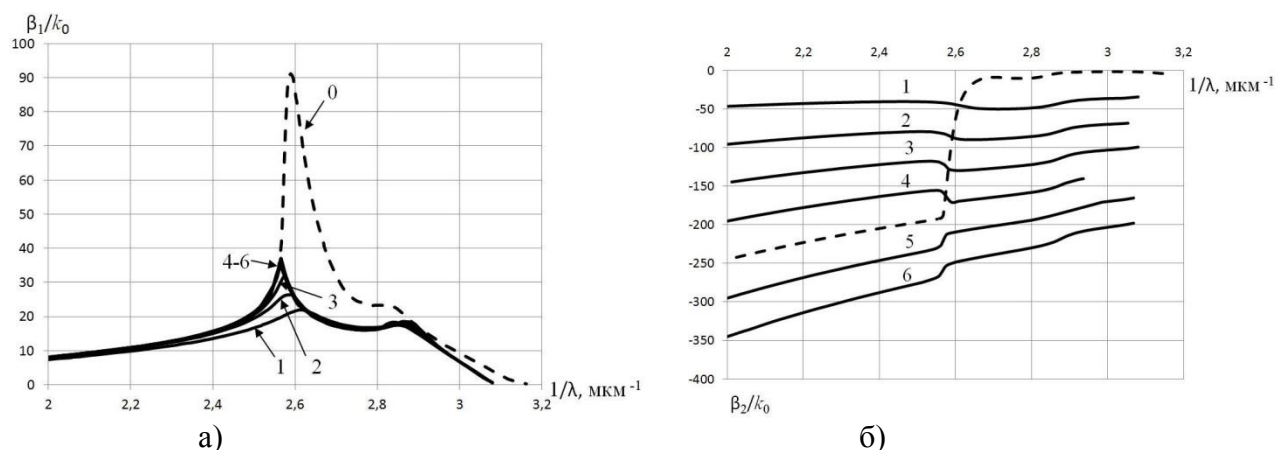


Рис. 7

Для этих волн так же, как и для аналогичных волн круглого металлического наностержня [8], существует связь между номером волны и количеством максимумов модуля компоненты поля $|E_z|$ в металлическом слое. Для первой волны имеется один максимум в металлическом слое, для второй – два и так далее.

Выводы

В статье продемонстрированы методика и возможность использования предложенного комбинированного метода для поиска комплексных решений дисперсионных задач. Показано существования в открытом диэлектрическом волноводе с металлической нанопленкой без потерь комплексных волн. Приведены дисперсионные характеристики плазмон-поляритонных волн круглого открытого диэлектрического волновода с металлической нанопленкой с учетом потерь в металле.

Библиографический список

1. **Раевский, А.С.** Комплексные волны / А.С. Раевский, С.Б. Раевский. – М.: Радиотехника, 2010. – 224 с.
2. **Бабкин, А.А.** О решениях дисперсионного уравнения волн круглого диэлектрического волновода, покрытого поглощающей пленкой / А.А. Бабкин [и др.] // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2010. Т.13. № 2.– С. 36–41.
3. **Бабкин, А.А.** Применение комбинированного метода поиска комплексных корней к решению дисперсионного уравнения волн круглого диэлектрического волновода, покрытого поглощающей пленкой / А.А. Бабкин, В.А. Малахов, К.В. Попков, А.С. Раевский // Физика и техниче-

- ские приложения волновых процессов: тезисы докладов IX Международной научно-технической конференции. – Челябинск. 2010. С. 23.
4. **Бритов, И.Е.** Целенаправленный поиск комплексных волн в направляющих электродинамических структурах / И.Е.Бритов, А.С. Раевский, С.Б. Раевский // Антенны. 2003. В. 5(72). С. 64–71.
 5. **Малахов, В.А.** Программа нахождения комплексных решений дисперсионных уравнений / В.А. Малахов, А.С. Раевский // Государственный реестр программ для ЭВМ. Свидетельство № 2010615410 от 23.08.2010 г. – 11 с.
 6. **Климов, В.В.** Наноплазмоника / В.В. Климов. – М.: Изд. Физматлит, 2010. – 480 с.
 7. **Федянин, Д.Ю.** Поверхностные плазмон-поляритоны с отрицательной и нулевой групповыми скоростями, распространяющиеся по тонким металлическим пленкам / Д.Ю. Федянин [и др.] // Квантовая электроника. 2009. Т. 39. № 8. С. 745–750.
 8. **Малахов, В.А.** Плазмон-поляритонные волны в цилиндрических направляющих структурах / В.А. Малахов, К.В. Попков, А.С. Раевский // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2013. Т. 16. № 2. С. 29–34.

*Дата поступления
в редакцию 08.07.2014*

V. A. Malakhov¹, K.V.Popkov² A.S. Raevskii¹

THE SEARCH OF COMPLEX SOLUTIONS DISPERSION TASKS OF WAVES OF THE ROUND OPEN DIELECTRIC WAVEGUIDE WITH A METAL FILM

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev¹,
LLC "Modern technologies of monitoring", N. Novgorod²

Purpose: The search of complex solutions dispersion tasks of waves of guiding electrodynamic structures, using the combined method.

Design/methodology/approach: Using a combined method of searching for the calculation of complex roots of the dispersion characteristics of the round open dielectric waveguide with metal film.

Findings: The existence of complex waves in open dielectric waveguide with a metal nanofilm lossless is shown. The dispersion characteristics of the plasmon-polariton waves round open dielectric waveguide with a metal nanofilm taking into account losses in the metal are discussed.

Research limitations/implications: These results provide a starting point for the development of search techniques complex solutions of dispersion problems for various electrodynamic structures.

Originality/value: An original method of finding the complex roots.

Key words: metal nanofilm, the dispersion problem, complex solutions of dispersion problems, plasmon-polariton waves.