

УДК 681.3.513

Е.А. Никулин

**КОНГРУЭНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ**

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

В статье представлена разработка методов конгруэнтных преобразований полиномиальных моделей с целью развития матричных алгоритмов преобразований линий и поверхностей. Рассматривается приведение различных полиномиальных моделей к единым шкалам и порядкам. Использован блочный подход к конгруэнтным преобразованиям. Получены алгоритмы преобразований моделей линий и поверхностей с сохранением их формы.

*Ключевые слова:* конгруэнтность, преобразование, полином, матрица.

Данная работа продолжает серию статей [1-5], посвященных блочному методу конструирования полиномиальных линий и поверхностей. Теперь мы займемся взаимными преобразованиями полиномиальных моделей, позволяющими из формулы объекта одного типа получить модель объекта другого типа при совпадающих графиках обоих объектов.

**Преобразования линий**

Обобщенная полиномиальная  $n$ -ой степени модель разных типов линий имеет вид бинарного разложения по столбцам узловой матрицы  $\mathbf{U}$  и степеням параметра  $t$ , составляющим  $(n+1)$ -вектор базовых функций (ВБФ)  $\mathbf{T}_n(t)=[1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^n]^T$ :

$$\mathbf{p}_n(t)=\mathbf{U}\mathbf{T}_n(t) \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1)$$

Вот как выглядят матрица  $\mathbf{U}$ , составленная из  $n+1$ -го столбца узловых элементов, числовая  $(n+1) \times (n+1)$ -матрица  $\mathbf{H}$  и диапазон изменения параметра  $t$  у разных полиномиальных линий:

- модель интерполяционной линии, проходящей через  $n \geq 1$  узловых точек  $\mathbf{u}_0^u, \mathbf{u}_1^u, \dots, \mathbf{u}_n^u$  в отсчеты  $t_0, t_1, \dots, t_n$  произвольной шкалы параметра, имеет матрицы

$$\mathbf{U}_u=[\mathbf{u}_0^u \ \mathbf{u}_1^u \ \dots \ \mathbf{u}_n^u], \quad \mathbf{H}_u=[\mathbf{T}_n(t_0) \ \mathbf{T}_n(t_1) \ \dots \ \mathbf{T}_n(t_n)]^{-1}. \quad (2)$$

- у интерполяционной линии Эрмита степени  $n \geq 3$ , проходящей через узлы  $\mathbf{u}_0^e, \mathbf{u}_1^e, \dots, \mathbf{u}_{n-2}^e$  в отсчеты параметра  $t_0, t_1, \dots, t_{n-2}$  с векторами конечных направлений  $\mathbf{V}_0^e$  и  $\mathbf{V}_{n-2}^e$ , матрицы имеют вид

$$\mathbf{U}_e=[\mathbf{u}_0^e \ \dots \ \mathbf{u}_{n-2}^e \ \mathbf{V}_0^e \ \mathbf{V}_{n-2}^e], \quad \mathbf{H}_e=[\mathbf{T}_n(t_0) \ \dots \ \mathbf{T}_n(t_{n-2}) \ \mathbf{T}'_n(t_0) \ \mathbf{T}'_n(t_{n-2})]^{-1}. \quad (3)$$

При выборе отсчетов параметра  $t_i=i$  шкалы обеих интерполяционных моделей с матрицами (2) и (3) становятся *нормализованными*;

- у линии Безье, строящейся в *единичной* шкале  $t \in [0, 1]$  на основе  $n$ -интервальной характеристической полилинии (ХП)  $\mathbf{u}_0^b, \mathbf{u}_1^b, \dots, \mathbf{u}_n^b$ , матрицы модели (1) следующие:

$$\mathbf{U}_b=[\mathbf{u}_0^b \ \mathbf{u}_1^b \ \dots \ \mathbf{u}_n^b], \quad \mathbf{H}_b=\begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & \dots & h_{0n} \\ 0 & h_{11} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{где } h_{ij}=(-1)^{j-i} C_j^i C_n^j \quad \forall 0 \leq i \leq j \leq n. \quad (4)$$

Как видно, многообразие полиномиальных моделей линий обладает как общими чертами — одинаковой формой разложения (1) и объемом исходных данных, определяющих полиномы равных степеней  $n$ , так и различиями — параметрическими шкалами (произвольная, нормализованная и единичная) и составом узловых элементов.

Рассмотрим задачу конгруэнтного преобразования одной модели линии в другую

$$\mathbf{p}_n(t_1)=\mathbf{U}_1\mathbf{H}_1\mathbf{T}_n(t_1) \Rightarrow \mathbf{p}_n(t_2)=\mathbf{U}_2\mathbf{H}_2\mathbf{T}_n(t_2)$$

с сохранением формы линии и степени  $n$  обоих полиномов. Ключ к преобразованию — приведение параметров  $t_1$  и  $t_2$  к единому параметру  $t$ , а обеих моделей — к единому ВБФ  $\mathbf{T}_n(t)$ . Составим невырожденную матрицу линейного преобразования  $\mathbf{T}_n(\tau)=\mathbf{D}_n(m,s)\mathbf{T}_n(t)$  в шкалу параметра  $t$  из шкалы масштабированного и смещенного параметра  $\tau=mt+s$ :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ mt+s \\ (mt+s)^2 \\ \vdots \\ (mt+s)^n \end{bmatrix} = \mathbf{D}_n(m,s) \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{D}_n(m,s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s & m & 0 & \dots & 0 \\ s^2 & 2ms & m^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^n & C_n^1 m s^{n-1} & C_n^2 m^2 s^{n-2} & \dots & m^n \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Она обладает следующими свойствами:

- матрица  $\mathbf{D}_n(1,0)=\mathbf{E}_{n+1}$  — единичная;
- матрица обратного преобразования  $t=(\tau-s)/m$  равна  $\mathbf{D}_n(m,s)^{-1}=\mathbf{D}_n(m^{-1},-sm^{-1})$ ;
- цепочка преобразований параметров  $t_1=m_1t+s_1$  и  $t_2=m_2t_1+s_2=m_1m_2t+m_2s_1+s_2$  выполняется произведением матриц  $\mathbf{D}_n(m_2,s_2)\mathbf{D}_n(m_1,s_1)=\mathbf{D}_n(m_1m_2,m_2s_1+s_2)$ .

Подстановкой в (5) нужных аргументов формируются матрицы  $\mathbf{M}_1$  и  $\mathbf{M}_2$  преобразований ВБФ  $\mathbf{T}_n(t_1)=\mathbf{M}_1\mathbf{T}_n(t)$  и  $\mathbf{T}_n(t_2)=\mathbf{M}_2\mathbf{T}_n(t)$  в единичную шкалу  $t \in [0,1]$ . Совмещая равношальные модели  $\mathbf{p}_n(t)$ , получим уравнение, решением которого является узловая матрица конгруэнтной модели:

$$\mathbf{U}_1\mathbf{H}_1\mathbf{M}_1=\mathbf{U}_2\mathbf{H}_2\mathbf{M}_2 \Rightarrow \mathbf{U}_2=\mathbf{U}_1\mathbf{H}_1\mathbf{M}\mathbf{H}_2^{-1}, \text{ где } \mathbf{M}=\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2^{-1}. \quad (6)$$

Применим метод (6) в расчете различных элементов моделей полиномиальных линий.

1. В задаче преобразования параметрической шкалы  $t_1 \in [a_1, b_1] \Rightarrow t_2 \in [a_2, b_2]$  из соотношений  $t_i=(b_i-a_i)t+a_i \quad \forall i=\overline{1,2}$  следуют матрицы  $\mathbf{M}_i=\mathbf{D}_n(b_i-a_i, a_i)$ . Тогда при неизменной матрице  $\mathbf{U}$  в (6) получаем

$$\mathbf{H}_2=\mathbf{H}_1\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2^{-1}=\mathbf{H}_1\mathbf{M}, \text{ где } \mathbf{M}=\mathbf{D}_n(b_1-a_1, a_1)\mathbf{D}_n(b_2-a_2, a_2)^{-1}. \quad (7)$$

К примеру, в (2) дан алгоритм расчета матрицы  $\mathbf{H}_1$  бинарного разложения интерполяционного полинома  $\mathbf{p}_n(t_1)=\mathbf{U}\mathbf{H}_1\mathbf{T}_n(t_1)$  в нормализованной шкале  $t_1=nt \in [0,n]$ . Перейдя в единичную шкалу  $t_2 \equiv t \in [0,1]$  с помощью матрицы  $\mathbf{M}=\mathbf{D}_n(n,0)\mathbf{D}_n(1,0)^{-1}=\mathbf{D}_n(n,0)$ , получим модель  $\mathbf{p}_n(t)=\mathbf{U}\mathbf{H}_2\mathbf{T}_n(t)$  с матрицей  $\mathbf{H}_2=\mathbf{H}_1\mathbf{D}_n(n,0)$ . Возьмем нормализованную параболу

$$\mathbf{p}_2(t_1)=(1-1.5t_1+0.5t_1^2)\mathbf{u}_0+(2t_1-t_1^2)\mathbf{u}_1+(-0.5t_1+0.5t_1^2)\mathbf{u}_2 \quad \forall t_1 \in [0,2],$$

проходящую через три точки  $\mathbf{u}_0=\mathbf{p}_2(0)$ ,  $\mathbf{u}_1=\mathbf{p}_2(1)$  и  $\mathbf{u}_2=\mathbf{p}_2(2)$ . Ее матрица  $\mathbf{H}_1$  составляется, как видно далее, из коэффициентов весовых функций этих узловых точек. Нормировка шкалы дает следующие матрицу и модель параболы  $\mathbf{p}_2(t)$ :

$$\mathbf{H}_2=\mathbf{H}_1\mathbf{D}_2(2,0)=\begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{p}_2(t)=(1-3t+2t^2)\mathbf{u}_0+(4t-4t^2)\mathbf{u}_1+(-t+2t^2)\mathbf{u}_2 \quad \forall t \in [0,1].$$

Проверка  $\mathbf{p}_2(0)=\mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{p}_2(0.5)=\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{p}_2(1)=\mathbf{u}_2$  убеждает, что после нормировочного сжатия шкалы  $t_1$  полином  $\mathbf{p}_2(t)$  остался интерполяционным с тем же графиком, что у модели  $\mathbf{p}_2(t_1)$ .

Может быть полезным и **растяжение** шкалы, например, для перевода единичной шкалы линии Безье  $t \in [0,1]$  в интервал  $t_2 = nt \in [0,n]$ , пропорциональный числу  $n$  сегментов ее ХП. Матрица конгруэнтного преобразования равна  $\mathbf{M}=\mathbf{D}_n(1,0)\mathbf{D}_n(n,0)^{-1}=\mathbf{D}_n(n^{-1},0)$ . Исходя из матрицы  $\mathbf{H}_1$  в (4), получим по (7) матрицу  $\mathbf{H}_2=\mathbf{H}_1\mathbf{D}_n(n^{-1},0)$  функции  $\mathbf{p}_n(t_2)=\mathbf{U}\mathbf{H}_2\mathbf{T}_n(t_2)$ . Есть, скажем, парабола Безье

$$\mathbf{p}_2(t)=(1-t)^2\mathbf{u}_0+2t(1-t)\mathbf{u}_1+t^2\mathbf{u}_2 \quad \forall t \in [0,1]$$

с концевыми точками  $\mathbf{u}_0=\mathbf{p}_2(0)$ ,  $\mathbf{u}_2=\mathbf{p}_2(1)$  и матрицей  $\mathbf{H}_1$ . В растянутой шкале  $t_2=2t \in [0,2]$  матрица

$$\mathbf{H}_2=\mathbf{H}_1\mathbf{D}_2(0.5,0)=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0.25 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0.25 \end{bmatrix}$$

нормализованной параболы Безье

$$\mathbf{p}_2(t_2)=(1-t_2+0.25t_2^2)\mathbf{u}_0+(t_2-0.5t_2^2)\mathbf{u}_1+0.25t_2^2\mathbf{u}_2$$

дает те же концевые точки  $\mathbf{p}_2(0)=\mathbf{u}_0$  и  $\mathbf{p}_2(2)=\mathbf{u}_2$ .

2. Теперь рассмотрим ряд задач **преобразования типа** полиномиальной линии. Эта операция полезна в редакторе линий для оперативного перехода к модели другого типа, в которой конструирование желаемой формы более удобно. Может быть также полезным отображение одновременно двух полилиний  $\mathbf{U}_1$  и  $\mathbf{U}_2$ , связанных первым уравнением в (6). Известно, например, что интерполяционный полином высокой степени имеет большие меж-узловые осцилляции, далеко выходящие из области расположения вершин узловой полилинии. В то же время линия Безье всегда лежит в выпуклой оболочке вершин своей ХП. Вывод на экран области гарантированного расположения интерполяционной линии позволит сделать ее интерактивное редактирование более осмысленным.

Переходы между **интерполяционной** моделью  $\mathbf{p}_n(t_{\text{и}})=\mathbf{U}_{\text{и}}\mathbf{H}_{\text{и}}\mathbf{T}_n(t_{\text{и}})$  в шкале  $t_{\text{и}}=nt \in [0,n]$  с матрицами  $\mathbf{U}_{\text{и}}$  и  $\mathbf{H}_{\text{и}}$  из (2) и **эрмитовой** моделью  $\mathbf{p}_n(t_{\text{э}})=\mathbf{U}_{\text{э}}\mathbf{H}_{\text{э}}\mathbf{T}_n(t_{\text{э}})$  в другой шкале  $t_{\text{э}}=(n-2)t \in [0,n-2]$  с матрицами  $\mathbf{U}_{\text{э}}$  и  $\mathbf{H}_{\text{э}}$  из (3) осуществляются с помощью матриц  $\mathbf{M}_{\text{иэ}}=\mathbf{D}_n(n,0)$  и  $\mathbf{M}_{\text{эи}}=\mathbf{D}_n(n-2,0)$  следующим образом:

$$\mathbf{U}_{\text{э}}=\mathbf{U}_{\text{и}}\mathbf{H}_{\text{и}}\mathbf{M}_{\text{иэ}}\mathbf{H}_{\text{э}}^{-1}, \quad \text{где } \mathbf{M}_{\text{иэ}}=\mathbf{M}_{\text{иэ}}^{-1}=\mathbf{D}_n(n/(n-2),0);$$

$$\mathbf{U}_{\text{и}}=\mathbf{U}_{\text{э}}\mathbf{H}_{\text{э}}\mathbf{M}_{\text{эи}}\mathbf{H}_{\text{и}}^{-1}, \quad \text{где } \mathbf{M}_{\text{эи}}=\mathbf{M}_{\text{эи}}^{-1}=\mathbf{D}_n((n-2)/n,0).$$

Оба преобразования работают при степени полинома  $n \geq 3$ . Возьмем, например, кубический ( $n=3$ ) интерполяционный полином с матрицами  $\mathbf{U}_{\text{и}}$  и  $\mathbf{H}_{\text{и}}$  из (2) и найдем с помощью матрицы  $\mathbf{M}_{\text{иэ}}=\mathbf{D}_3(3,0)$  узловую матрицу  $\mathbf{U}_{\text{э}}$  конгруэнтного эрмитова полинома вида (3):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^{\text{э}} & \mathbf{u}_1^{\text{э}} & \mathbf{v}_0^{\text{э}} & \mathbf{v}_1^{\text{э}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^{\text{и}} & \mathbf{u}_1^{\text{и}} & \mathbf{u}_2^{\text{и}} & \mathbf{u}_3^{\text{и}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^{\text{и}} & \mathbf{u}_3^{\text{и}} & \frac{-11\mathbf{u}_0^{\text{и}}+18\mathbf{u}_1^{\text{и}}-9\mathbf{u}_2^{\text{и}}+2\mathbf{u}_3^{\text{и}}}{2} & \frac{-2\mathbf{u}_0^{\text{и}}+9\mathbf{u}_1^{\text{и}}-18\mathbf{u}_2^{\text{и}}+11\mathbf{u}_3^{\text{и}}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогично выполняется обратное преобразование  $\mathbf{U}_{\text{э}} \Rightarrow \mathbf{U}_{\text{и}}$  (рис. 1, а):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^{\text{и}} & \mathbf{u}_1^{\text{и}} & \mathbf{u}_2^{\text{и}} & \mathbf{u}_3^{\text{и}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^{\text{э}} & \mathbf{u}_1^{\text{э}} & \mathbf{V}_0^{\text{э}} & \mathbf{V}_1^{\text{э}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^{\text{э}} & \frac{20\mathbf{u}_0^{\text{э}}+7\mathbf{u}_1^{\text{э}}+4\mathbf{V}_0^{\text{э}}-2\mathbf{V}_1^{\text{э}}}{27} & \frac{7\mathbf{u}_0^{\text{э}}+20\mathbf{u}_1^{\text{э}}+2\mathbf{V}_0^{\text{э}}-4\mathbf{V}_1^{\text{э}}}{27} & \mathbf{u}_1^{\text{э}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Изображение векторов  $\mathbf{V}_0^{\text{э}}$  и  $\mathbf{V}_1^{\text{э}}$  (для компактности они укорочены в пять раз) дополнительно к узловой сетке  $\mathbf{U}_{\text{и}}$  позволяет оценить концевые направления интерполяционной линии еще до ее построения.

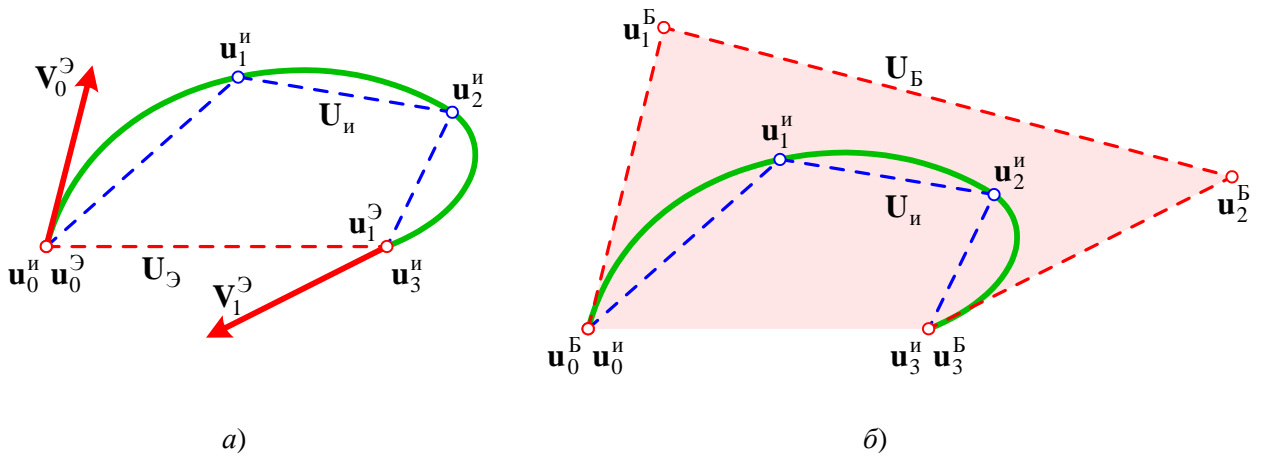


Рис. 1. Конгруэнтные преобразования типов линии

Для переходов между моделями **интерполяционной** линии  $\mathbf{p}_n(t) = \mathbf{U}_{\text{и}} \mathbf{H}_{\text{и}} \mathbf{T}_n(t) \forall t_{\text{и}} \in [0, n]$  и линии **Безье**  $\mathbf{p}_n(t) = \mathbf{U}_{\text{Б}} \mathbf{H}_{\text{Б}} \mathbf{T}_n(t) \forall t \in [0, 1]$  нужны матрицы  $\mathbf{M}_{\text{иБ}} = \mathbf{D}_n(n, 0)$  и  $\mathbf{M}_{\text{Би}} = \mathbf{D}_n(n^{-1}, 0)$ :

$$\mathbf{U}_{\text{Б}} = \mathbf{U}_{\text{и}} \mathbf{H}_{\text{и}} \mathbf{D}_n(n, 0) \mathbf{H}_{\text{Б}}^{-1}, \quad \mathbf{U}_{\text{и}} = \mathbf{U}_{\text{Б}} \mathbf{H}_{\text{Б}} \mathbf{D}_n(n^{-1}, 0) \mathbf{H}_{\text{и}}^{-1}.$$

Результат преобразования  $\mathbf{U}_{\text{и}} \Rightarrow \mathbf{U}_{\text{Б}}$  показан на рис. 1,б, где из узловой полилинии  $\mathbf{u}_0^{\text{и}} \mathbf{u}_1^{\text{и}} \mathbf{u}_2^{\text{и}} \mathbf{u}_3^{\text{и}}$  порядка  $n=3$  получена ХП  $\mathbf{u}_0^{\text{Б}} \mathbf{u}_1^{\text{Б}} \mathbf{u}_2^{\text{Б}} \mathbf{u}_3^{\text{Б}}$  линии Безье и построена ее выпуклая оболочка:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^{\text{Б}} & \mathbf{u}_1^{\text{Б}} & \mathbf{u}_2^{\text{Б}} & \mathbf{u}_3^{\text{Б}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^{\text{и}} & \mathbf{u}_1^{\text{и}} & \mathbf{u}_2^{\text{и}} & \mathbf{u}_3^{\text{и}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^{\text{и}} & \frac{-5\mathbf{u}_0^{\text{и}}+18\mathbf{u}_1^{\text{и}}-9\mathbf{u}_2^{\text{и}}+2\mathbf{u}_3^{\text{и}}}{6} & \frac{2\mathbf{u}_0^{\text{и}}-9\mathbf{u}_1^{\text{и}}+18\mathbf{u}_2^{\text{и}}-5\mathbf{u}_3^{\text{и}}}{6} & \mathbf{u}_3^{\text{и}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Рассмотрим, наконец, задачу **преобразования порядка** полиномиальной линии, определяющего степень ее полинома  $n$  и размер узловой матрицы  $\mathbf{U}$ . Изменение порядка возможно как в сторону повышения, так и понижения, но всегда **фактическая степень полинома остается неизменной**. Понять это явление помогают два простых примера:

- фактическая степень  $n=1$  полинома  $p_n(t)=1+2t$  может быть повышена до любой формальной степени  $n'>n$ , при которой линия  $p_{n'}(t)=1+2t+0t^2+\dots+0t^{n'}$  задается  $n'+1$ -й точкой, лежащей на одной прямой;
- формальная степень  $n \geq 2$  полинома  $p_n(t)=3t+0t^2+\dots+0t^n$  понижается до фактической степени  $n'=1$ , при которой линия  $p_{n'}(t)=3t$  определяется всего двумя точками.

Отсюда видно, что понижение формального порядка полиномиальной линии возможно

лишь при особом расположении узловых точек, создающем хотя бы один нулевой старший коэффициент полинома. Порядок полиномиальной линии можно понизить на число последних нулевых коэффициентов, называемое дефектом степени полинома. Повышение же порядка возможно на любое число, но при этом дефект степени появляется либо увеличивается.

Все сказанное эквивалентно тому, что преобразование  $n \Rightarrow n'$  порядка ВБФ

$$\mathbf{T}_n(t) = \mathbf{E}_{n+1, n'+1} \mathbf{T}_{n'}(t), \quad (9)$$

записанное с помощью  $(n+1) \times (n'+1)$ -матрицы  $\mathbf{E}_{n+1, n'+1}$  с элементами  $e_{ii} = 1 \ \forall i = \overline{1, \min\{n, n'\} + 1}$  и  $e_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$ , при  $n < n'$  (в сторону увеличения порядка) осуществимо всегда, так как

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ t^n \\ \vdots \\ t^{n'} \end{bmatrix},$$

а при  $n > n'$  (в сторону уменьшения порядка) лишь при фактической незначимости в полиноме  $\mathbf{p}_n(t) = \mathbf{U} \mathbf{H} \mathbf{T}_n(t)$  степеней  $t^{n'+1} \div t^n$ , когда матрица коэффициентов  $\mathbf{S} = \mathbf{U} \mathbf{H} = [\mathbf{s}_0 \ \dots \ \mathbf{s}_n \ \mathbf{O} \ \dots \ \mathbf{O}]$  имеет  $n' - n > 0$  последних нулевых столбцов.

Подставив (9) в преобразование  $\mathbf{p}_n(t_1) = \mathbf{U}_1 \mathbf{H}_1 \mathbf{T}_n(t_1) \Rightarrow \mathbf{p}_{n'}(t_2) = \mathbf{U}_2 \mathbf{H}_2 \mathbf{T}_{n'}(t_2)$  общего вида, получим аналогичное (6) уравнение, решением которого является узловая матрица конгруэнтной модели  $n'$ -го порядка:

$$\mathbf{U}_1 \mathbf{H}_1 \mathbf{M}_1 \mathbf{E}_{n+1, n'+1} = \mathbf{U}_2 \mathbf{H}_2 \mathbf{M}_2 \Rightarrow \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}_1 \mathbf{H}_1 \mathbf{M} \mathbf{H}_2^{-1}, \text{ где } \mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \mathbf{E}_{n+1, n'+1} \mathbf{M}_2^{-1}. \quad (10)$$

Здесь матрицы  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{D}_n(b_1 - a_1, a_1)$  и  $\mathbf{M}_2 = \mathbf{D}_{n'}(b_2 - a_2, a_2)$  выполняют перевод параметров  $t_1 \in [a_1, b_1]$  и  $t_2 \in [a_2, b_2]$  в единичную шкалу  $t \in [0, 1]$ . Заметим, что в [3, (8)] выведена сходная формула конгруэнтного изменения порядка нормированной линии Безье с матрицей  $\mathbf{M} = \mathbf{E}_{n+1, n'+1}$ , совпадающей с (10) при  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{E}_{n+1}$  и  $\mathbf{M}_2 = \mathbf{E}_{n'+1}$ .

В качестве примера преобразуем узловую полилинию  $\mathbf{U}_n = \mathbf{u}_0^n \mathbf{u}_1^n \mathbf{u}_2^n \mathbf{u}_3^n$  нормализованной интерполяционной линии порядка  $n=3$  (см. рис. 1, а) в ХП  $\mathbf{U}_B = \mathbf{u}_0^B \mathbf{u}_1^B \mathbf{u}_2^B \mathbf{u}_3^B \mathbf{u}_4^B \mathbf{u}_5^B$  нормированной линии Безье порядка  $n'=5$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_B &= \mathbf{U}_n \mathbf{H}_n \mathbf{D}_3(3,0) \mathbf{E}_{4,6} \mathbf{H}_B^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^n & \mathbf{u}_1^n & \mathbf{u}_2^n & \mathbf{u}_3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -20 & 30 & -20 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & -30 & 30 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{y} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^n & \frac{-\mathbf{u}_0^n + 18\mathbf{u}_1^n - 9\mathbf{u}_2^n + 2\mathbf{u}_3^n}{10} & \frac{-6\mathbf{u}_0^n + 27\mathbf{u}_1^n - \mathbf{u}_3^n}{20} & \frac{-\mathbf{u}_0^n + 27\mathbf{u}_2^n - 6\mathbf{u}_3^n}{20} & \frac{2\mathbf{u}_0^n - 9\mathbf{u}_1^n + 18\mathbf{u}_2^n - \mathbf{u}_3^n}{10} & \mathbf{u}_3^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

матрицы коэффициентов полинома Безье  $\mathbf{p}_5(t) = \mathbf{U}_B \mathbf{H}_B \mathbf{T}_5(t)$  (рис. 2, а)

$$\mathbf{U}_B \mathbf{H}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0^B & \frac{-11\mathbf{u}_0^B + 18\mathbf{u}_1^B - 9\mathbf{u}_2^B + 2\mathbf{u}_3^B}{2} & \frac{18\mathbf{u}_0^B - 45\mathbf{u}_1^B + 36\mathbf{u}_2^B - 9\mathbf{u}_3^B}{2} & \frac{-9\mathbf{u}_0^B + 27\mathbf{u}_1^B - 27\mathbf{u}_2^B + 9\mathbf{u}_3^B}{2} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

дефект степени равен двум, поэтому формальная степень  $n'=5$  может быть понижена до  $n'-2=3$  с пересчетом ХП редуцированного полинома Безье  $\mathbf{p}'_3(t) = \mathbf{U}'_B \mathbf{H}'_B \mathbf{T}_3(t)$  (рис. 2, б):

$$\begin{aligned}
 & [\mathbf{u}'_0^B \ \mathbf{u}'_1^B \ \mathbf{u}'_2^B \ \mathbf{u}'_3^B] = \mathbf{U}_B \mathbf{H}_B \mathbf{E}_{6,4} \mathbf{H}_B^{-1} = \\
 & = [\mathbf{u}_0^B \ \mathbf{u}_1^B \ \mathbf{u}_2^B \ \mathbf{u}_3^B \ \mathbf{u}_4^B \ \mathbf{u}_5^B] \begin{bmatrix} 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -20 & 30 & -20 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & -30 & 30 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\
 & = \left[ \mathbf{u}_0^B \ \frac{-5\mathbf{u}_0^B + 18\mathbf{u}_1^B - 9\mathbf{u}_2^B + 2\mathbf{u}_3^B}{6} \ \frac{2\mathbf{u}_0^B - 9\mathbf{u}_1^B + 18\mathbf{u}_2^B - 5\mathbf{u}_3^B}{6} \ \mathbf{u}_3^B \right].
 \end{aligned}$$

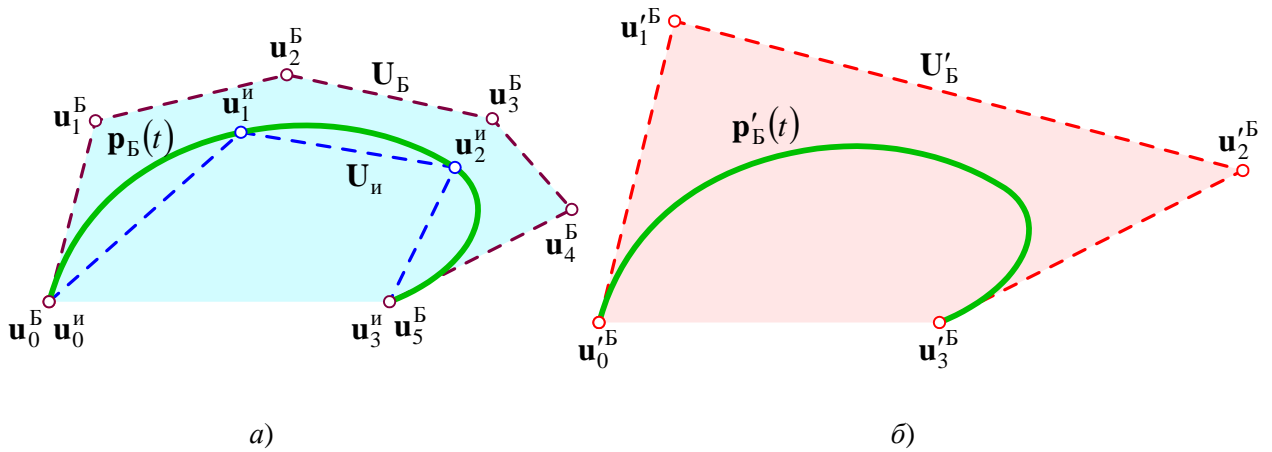


Рис. 2. Конгруэнтные преобразования порядков линии

### Преобразования поверхностей

Расширим область применения метода конгруэнтных преобразований на полиномиальные модели поверхностей (интерполяционные, Эрмита, циклические [5], Кунса, Безье [3, 4]), обобщенно представляемые двухпараметрическим бинарным разложением

$$\mathbf{p}_{n,m}(t, \tau) = \mathbf{T}_n^T(t) \mathbf{H}^T \mathbf{U} \mathbf{N} \mathbf{T}_m(\tau) \quad \forall t \in [a, b], \tau \in [\alpha, \beta].$$

Задача преобразования модели  $\mathbf{p}_{n,m}(t_1, \tau_1) \Rightarrow \mathbf{p}_{n',m'}(t_2, \tau_2)$  с сохранением формы поверхности решается приведением параметров  $\{t_1, \tau_1\}$  и  $\{t_2, \tau_2\}$  в единичные шкалы  $t, \tau \in [0, 1]$  путем преобразований ВБФ  $\mathbf{T}_n(t_1) = \mathbf{M}_1 \mathbf{T}_n(t)$ ,  $\mathbf{T}_{n'}(t_2) = \mathbf{M}_2 \mathbf{T}_{n'}(t)$ ,  $\mathbf{T}_m(\tau_1) = \mathbf{L}_1 \mathbf{T}_m(\tau)$  и  $\mathbf{T}_{m'}(\tau_2) = \mathbf{L}_2 \mathbf{T}_{m'}(\tau)$  с помощью матриц  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{D}_n(b_1 - a_1, a_1)$ ,  $\mathbf{M}_2 = \mathbf{D}_{n'}(b_2 - a_2, a_2)$ ,  $\mathbf{L}_1 = \mathbf{D}_m(\beta_1 - \alpha_1, \alpha_1)$  и  $\mathbf{L}_2 = \mathbf{D}_{m'}(\beta_2 - \alpha_2, \alpha_2)$ , а по (9) — к единым порядкам  $\{n', m'\}$ . Совмещая равношкальные и равнопорядковые модели  $\mathbf{p}_{n',m'}(t, \tau)$ , получим аналогичное (10) уравнение

$$\mathbf{E}_{n'+1, n'+1} \mathbf{M}_1^T \mathbf{H}_1^T \mathbf{U}_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{E}_{m'+1, m'+1} = \mathbf{M}_2^T \mathbf{H}_2^T \mathbf{U}_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{L}_2, \tag{11}$$

в решениях которого далее будут использованы матрицы

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \mathbf{M}_1 \mathbf{E}_{n+1, n'+1} \mathbf{M}_2^{-1} = \mathbf{D}_n(b_1 - a_1, a_1) \mathbf{E}_{n+1, n'+1} \mathbf{D}_{n'}(b_2 - a_2, a_2)^{-1}, \\
 \mathbf{L} &= \mathbf{L}_1 \mathbf{E}_{m+1, m'+1} \mathbf{L}_2^{-1} = \mathbf{D}_m(\beta_1 - \alpha_1, \alpha_1) \mathbf{E}_{m+1, m'+1} \mathbf{D}_{m'}(\beta_2 - \alpha_2, \alpha_2)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

1. В задаче преобразования параметрических шкал  $t_1 \in [a_1, b_1] \Rightarrow t_2 \in [a_2, b_2]$  и  $\tau_1 \in [\alpha_1, \beta_1] \Rightarrow \tau_2 \in [\alpha_2, \beta_2]$  при равных матрицах  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$  и порядках  $n = n', m = m'$  из (11) и (12) следуют аналогичные (7) формулы пересчета матриц бинарного разложения:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_1 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2^{-1}, \quad \mathbf{N}_2 = \mathbf{N}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2^{-1}.$$

Переведем, например, нормализованную модель гиперболического параболоида (рис. 3)

$$\mathbf{p}_{2,2}(t_1, \tau_1) = [t_1 - 1 \quad t_1^2 - 2t_1 + 2\tau_1 - \tau_1^2 \quad t_1 - 1] \quad \forall t_1, \tau_1 \in [0, 2]$$

с порядками  $n=m=2$  и матрицами  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{N}_1$  из (8) в произвольные симметричные шкалы  $t_2, \tau_2 \in [-1, 1]$  с теми же порядками  $n'=m'=2$ :

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{L}_1 = \mathbf{D}_2(2, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{L}_2 = \mathbf{D}_2(2, -1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1.5 & 0.5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

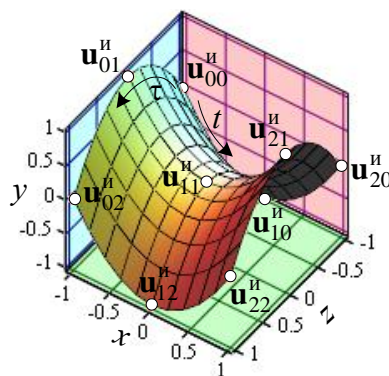


Рис. 3. Конгруэнтное преобразование шкал

В результате конгруэнтная модель той же поверхности принимает вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{p}_{2,2}(t_2, \tau_2) = \\ & = [1 \quad t_2 \quad t_2^2] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [-1 & 0 & -1] & [-1 & 1 & 0] & [-1 & 0 & 1] \\ [0 & -1 & -1] & [0 & 0 & 0] & [0 & -1 & 1] \\ [1 & 0 & -1] & [1 & 1 & 0] & [1 & 0 & 1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \tau_2 \\ \tau_2^2 \end{bmatrix} = \\ & = [t_2 \quad t_2^2 - \tau_2^2 \quad \tau_2] \end{aligned}$$

2. В задаче **преобразования типа** полиномиальной поверхности (у каждого типа свои параметрические шкалы, узловая матрица  $\mathbf{U}$  и метод вычисления матриц  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{N}$ ) из уравнения (11) с разными матрицами  $\mathbf{U}_1 \neq \mathbf{U}_2$ , но одинаковыми порядками  $n=n'$  и  $m=m'$ , получаем

$$\mathbf{U}_2 = (\mathbf{H}_1 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{H}_2^{-1})^T \mathbf{U}_1 (\mathbf{N}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{N}_2^{-1}) = (\mathbf{H}_1 \mathbf{M} \mathbf{H}_2^{-1})^T \mathbf{U}_1 (\mathbf{N}_1 \mathbf{L} \mathbf{N}_2^{-1}). \quad (13)$$

Заметим, что в [3, (12)] выведена сходная формула конгруэнтного изменения порядков  $n \Rightarrow n'$  и  $m \Rightarrow m'$  поверхности Безье с матрицами  $\mathbf{M} = \mathbf{E}_{n+1, n'+1}$  и  $\mathbf{L} = \mathbf{E}_{m+1, m'+1}$ , совпадающими с (12) при всех единичных матрицах

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{D}_n(1, 0) = \mathbf{E}_{n+1}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{D}_{n'}(1, 0) = \mathbf{E}_{n'+1}, \quad \mathbf{L}_1 = \mathbf{D}_m(1, 0) = \mathbf{E}_{m+1}, \quad \mathbf{L}_2 = \mathbf{D}_{m'}(1, 0) = \mathbf{E}_{m'+1}.$$

Конгруэнтное преобразование одной полиномиальной модели поверхности в другую равнопорядковую модель производится подстановкой в (13) матриц  $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{H}_1, \mathbf{N}_1, \mathbf{M}_1, \mathbf{L}_1\}$  и

$\{\mathbf{U}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{N}_2, \mathbf{M}_2, \mathbf{L}_2\}$ , соответствующих типам поверхностей и их шкалам. Результаты трех преобразований показаны на рис. 4: в верхнем ряду заданы узловые сети интерполяционных моделей (в центре – эрмитова), а в нижнем ряду построены характеристические сети Безье.

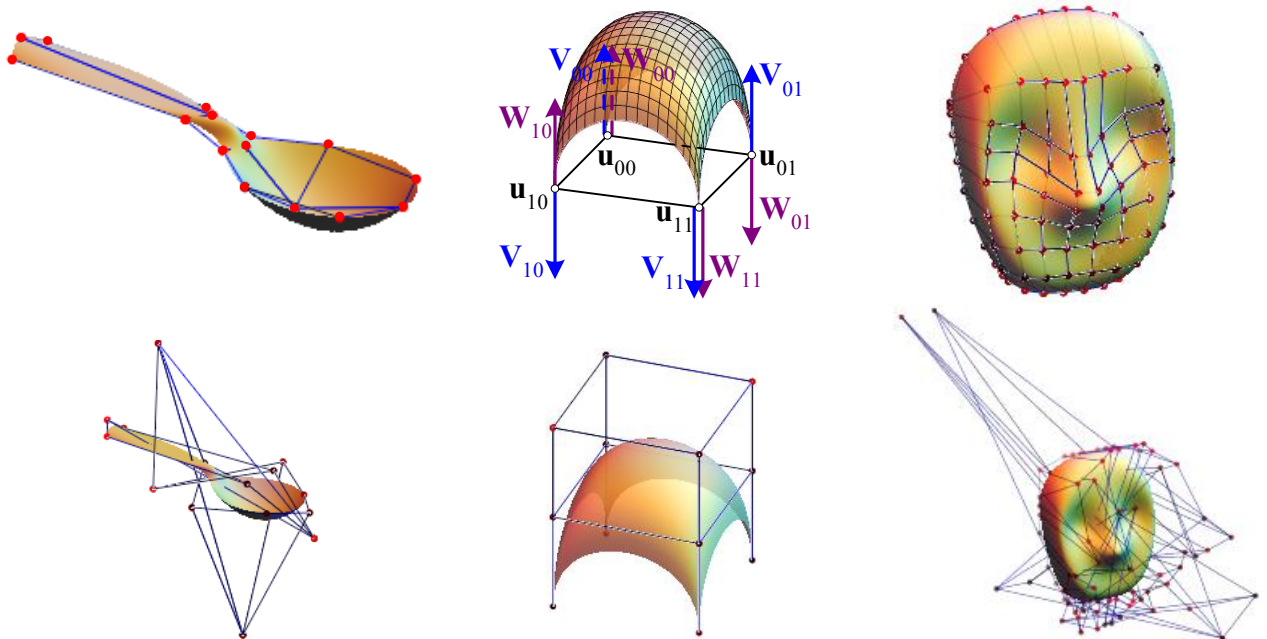


Рис. 4. Конгруэнтные преобразования типов поверхностей

3. Ну и наконец, общая задача конгруэнтного преобразования модели полиномиальной поверхности  $\mathbf{p}_{n,m}(t_1, \tau_1) \Rightarrow \mathbf{p}_{n',m'}(t_2, \tau_2)$ , включая пересчет узловой матрицы  $\mathbf{U}_1 \Rightarrow \mathbf{U}_2$  и преобразования порядков  $n \Rightarrow n'$  и  $m \Rightarrow m'$ , имеет похожее на (13) решение

$$\mathbf{U}_2 = (\mathbf{H}_1 \mathbf{M}_1 \mathbf{E}_{n+1, n'+1} \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{H}_2^{-1})^T \mathbf{U}_1 (\mathbf{N}_1 \mathbf{L}_1 \mathbf{E}_{m+1, m'+1} \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{N}_2^{-1}) = (\mathbf{H}_1 \mathbf{M} \mathbf{H}_2^{-1})^T \mathbf{U}_1 (\mathbf{N}_1 \mathbf{L} \mathbf{N}_2^{-1})$$

с матрицами  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{L}$  из (12).

Изменение каждого порядка  $n$  и / или  $m$  возможно как в сторону повышения, так и понижения, но всегда фактические степени полинома остаются неизменными. Повышение одного или обоих порядков модели создает в узловой сети  $\mathbf{U}_2$  избыточное количество вершин, позволяющее путем их перемещения повысить изгибаемость поверхности, недостижимую при меньших порядках.

Работа алгоритма изменения порядков характеристической сети поверхности Безье проиллюстрирована на рис. 5:

- исходная поверхность (а) порядков  $n=4$  и  $m=3$  построена на сетке размера  $5 \times 4$  узлов и имеет в матрице коэффициентов  $\mathbf{S} = \mathbf{H}^T \mathbf{U} \mathbf{N}$  одну нижнюю нулевую строку. Это означает, что степень  $n$  имеет дефект, равный 1, а фактический  $t$ -порядок полинома  $\mathbf{p}_{4,3}(t, \tau)$  составляет  $n' = n - 1 = 3$ ;
- возможность уменьшения формального порядка  $n=4$  до фактического  $n'=3$  подтверждает конгруэнтная поверхность (б), построенная на сетке минимальной узловой размерности  $4 \times 4$ . Матрица коэффициентов такой поверхности не имеет нулевых последних ни строк, ни столбцов, и ни один из порядков не может быть понижен;
- третья конгруэнтная поверхность (в) демонстрирует возможность одновременного понижения у поверхности (а) формального  $t$ -порядка  $n=4$  до фактического значения  $n'=3$  и повышения  $\tau$ -порядка  $m=3$  до формального  $m'=6$  с дефектом степени  $m' - m = 3$ .



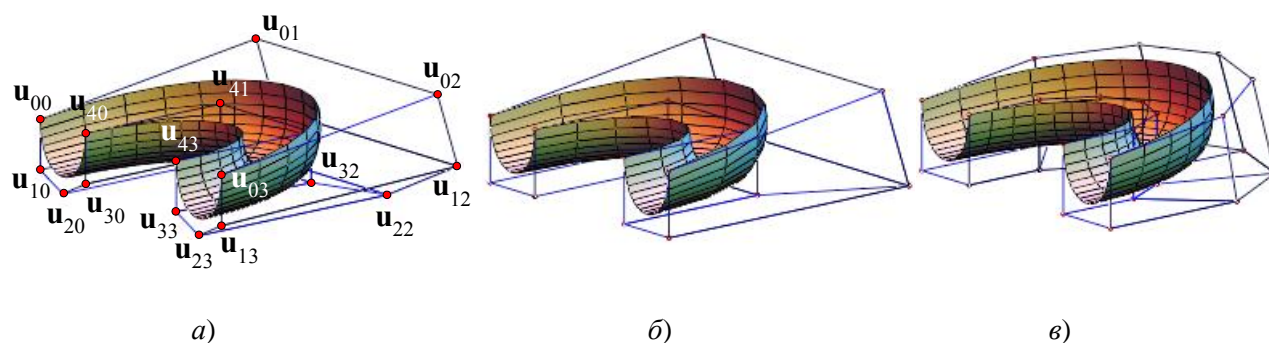


Рис. 5. Конгруэнтные изменения порядков поверхности Бэзье

В результате предпринятых усилий разработан универсальный алгоритм конгруэнтного, не изменяющего форму объекта, преобразования параметрических шкал, типов и порядков полиномиальных линий и поверхностей. Обозначены условия, при которых становится возможным понижение порядков полиномов до минимально возможных значений.

#### Библиографический список

1. **Никулин, Е.А.** Построение составных линий с различными свойствами сопряжения и произвольными условиями фиксации сегментов // Информационные технологии: тр. НГТУ / Нижегород. гос. техн. ун-т. – Н. Новгород, 2006. Т. 58. Вып. 11. С. 5–12.
2. **Никулин, Е.А.** Прямой параметрический синтез сплайновых линий // Системы обработки информации и управления: тр. НГТУ / Нижегород. гос. техн. ун-т. – Н. Новгород, 2007. Т. 65. Вып. 14. С. 123–130.
3. **Никулин, Е.А.** Новый метод изменения порядков кривых и поверхностей Бэзье // Труды Нижегород. гос. техн. ун-та им. Р.Е. Алексева / Нижегород. гос. техн. ун-т. – Н. Новгород, 2011. №1 (86). С. 70–71.
4. **Никулин, Е.А.** Матричные методы рекластеризации составных объектов Бэзье // Труды Нижегород. гос. техн. ун-та им. Р.Е. Алексева / Нижегород. гос. техн. ун-т. – Н. Новгород, 2012. №2 (95). С. 92–101.
5. **Никулин, Е.А.** О разрешимости задачи циклической интерполяции // Труды Нижегород. гос. техн. ун-та им. Р.Е. Алексева / Нижегород. гос. техн. ун-т. – Н. Новгород, 2014. №1 (103). С. 59–65.

Дата поступления  
в редакцию 27.06.2014

**Е.А. Nikulin**

#### CONGRUENT TRANSFORMATION OF POLYNOMIAL MODELS

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

**Subject:** Design of methods of congruent transformations polynomial models.

**Purpose:** Development of matrix algorithms transformations of lines and surfaces.

**Methodology:** Bringing different polynomial models of a single scale and orders.

**Originality:** Block approach is used for congruent transformations.

**Findings:** Algorithms for transformation models of curves and surfaces while maintaining their shape are obtained.

*Key words:* congruence, transformation, polynome, matrix.