

УДК 535.417.2

Е.А. Михалицын¹, Т.В. Кожевникова²

АДАПТАЦИЯ МЕТОДА УКРОЧЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О КРУГЛОМ ЭКРАНИРОВАННОМ ОДНОРОДНОМ ФЕРРИТОВОМ РЕЗОНАТОРЕ

ФГУП «ФНПЦ НИИИС им. Ю.Е. Седакова»¹,Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева²

Цель: Адаптировать метод укорочения дифференциальных уравнений к расчету собственных резонансных частот ферритовых резонаторов.

Дизайн/методология/подход: Анализ ферритовой среды основан на трансформации уравнений Максвелла к укороченному однородному дифференциальному уравнению типа Гельмгольца. Краевая задача о круглом экранированном однородном ферритовом резонаторе решается в строгой постановке.

Выводы: Проведен расчет резонансных частот экранированного круглого ферритового резонатора с однородным аксиальным подмагничиванием. Кроме того, даны рекомендации по практическому применению результатов анализа ферритового резонатора.

Ограничения исследований/развитие исследований: Адаптированный метод укорочения исходных дифференциальных уравнений обеспечивает нас отправной точкой для дальнейших исследований экранированных и открытых резонаторов с ферритовыми элементами.

Оригинальность/значение: Проведенные исследования дают инженерам и специалистам базовую информацию относительно спектра резонансных частот экранированного круглого однородного резонатора.

Ключевые слова: ферритовый резонатор, метод укорочения дифференциальных уравнений.

Введение

Резонансные структуры с ферритовыми элементами являются базовыми элементами широкого класса СВЧ и КВЧ невзаимных устройств. Специфические свойства гиротропной среды, которые проявляются под действием приложенного магнитного поля, определяют невзаимные свойства вентилях и циркуляторов, а также позволяют создавать управляемые фазовращатели, перестраиваемые фильтры и антенны с управляемой диаграммой направленности.

Ранее группой авторов были детально исследованы процессы распространения электромагнитных волн в направляющих структурах с аксиально-намагниченными продольно регулярными ферритовыми слоями [1]. Дальнейшим развитием этого направления исследований является переход от волноводных структур к резонансным. Ферритовые резонаторы являются базовыми элементами развязывающих и переключающих КВЧ устройств. Детальное исследование спектра собственных колебаний таких структур позволит уточнить существующие и разработать более строгие методики расчета ферритовых СВЧ и КВЧ вентилях, циркуляторов и переключателей, позволив тем самым минимизировать усилия по экспериментальной оптимизации частотных характеристик устройств.

В данной статье рассматривается адаптация разработанного ранее метода решения краевых задач о направляющих структурах с ферритовыми слоями к расчету резонансных частот собственных колебаний круглого экранированного однородного ферритового резонатора.

1. Постановка краевой задачи о круглом экранированном ферритовом резонаторе

Рассмотрим круглый волноводный резонатор, образованный отрезком волновода длины h и радиуса a с заматрированными торцевыми плоскостями (рис. 1). Стенки резонатора принимаются идеально проводящими, а его заполнение – феррит с однородным внутренним магнитным состоянием. Магнитное поле смещения \vec{H} однородно и направлено

вдоль оси Oz . Тогда тензор магнитной проницаемости ферритового элемента запишется в виде [2]:

$$\hat{\mu} = \begin{vmatrix} \mu & -jk & 0 \\ jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{vmatrix}, \quad (1)$$

где μ , k , μ_z - элементы тензора (в общем случае комплексные величины). Диэлектрическую проницаемость ферритового материала обозначим ε_f . Можно отметить, что в случае насыщения внутреннего магнитного состояния ферритового элемента компонент $\mu_z = 1$.

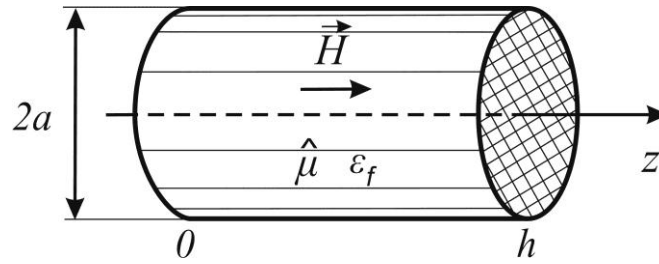


Рис. 1. Круглый экранированный однородный ферритовый резонатор

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд компонент электромагнитного поля \vec{E} и \vec{H} в ферритовой среде с аксиальным подмагничиванием записываются в виде:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= j \omega \varepsilon_f \varepsilon_0 \vec{E} \\ \nabla \times \vec{E} &= -j \omega \hat{\mu} \mu_0 \vec{H} \end{aligned} \quad (2)$$

(ω – частота электромагнитного поля) и могут быть преобразованы к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка относительно продольных компонент поля:

$$\begin{cases} \Delta_t H_z + \frac{\mu_z}{\mu} \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + K_f^2 \mu_z H_z = -K_f \eta_f \frac{k}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial z} \\ \Delta_t E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + K_f^2 \mu_{eff} E_z = \frac{K_f}{\eta_f} \mu_z \frac{k}{\mu} \frac{\partial H_z}{\partial z} \end{cases}, \quad (3)$$

где $\eta_f = \sqrt{\frac{\varepsilon_f \varepsilon_0}{\mu_0}}$ - характеристический адмитанс ферритовой среды;

$\mu_{eff} = \frac{\mu^2 - k^2}{\mu}$ - эффективная магнитная проницаемость феррита;

$K_f = \omega \sqrt{\varepsilon_f \varepsilon_0 \mu_0}$ - постоянная распространения в безграничной ферритовой среде.

При этом поперечные компоненты поля будут выражаться через продольные согласно следующей системе двух дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + K_f^2 \mu \right) \vec{H}_t + jK_f^2 k z_0 \times \vec{H}_t = \frac{\partial}{\partial z} \nabla_t H_z - jK_f y_f z_0 \times \nabla_t E_z; \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + K_f^2 \mu \right) \vec{E}_t + jK_f^2 k z_0 \times \vec{E}_t = \frac{\partial}{\partial z} \nabla_t E_z + K_f / y_f (k \nabla_t H_z + j\mu z_0 \times \nabla_t H_z) \end{cases} \quad (4)$$

2. Адаптация метода укорочения к расчету продольно однородных резонансных ферритовых структур

Для решения полученной системы уравнений (3) и расчета поперечных компонент поля согласно (4) применим метод разделения переменных [3]: $H_z = T_H \cdot Z$, $E_z = T_E \cdot Z$. Результирующее электромагнитное поле резонансной структуры при этом представляется в виде суперпозиции прямой (\vec{E}^+ , \vec{H}^+) и обратной волн (\vec{E}^- , \vec{H}^-) закрытого ферритового волновода. Продольную зависимость компонент поля прямой волны будем полагать в виде $Z^+ = \exp(-j\beta z)$, обратной – $Z^- = \exp(j\beta z)$ (β – продольное волновое число).

Можно показать, что, рассматривая распространение лишь прямой волны в соответствующей направляющей структуре, система (3) преобразуется к неоднородному уравнению типа Гельмгольца относительно функции $\psi = T_H + j\xi T_E$:

$$\Delta_t \psi + \mathcal{Q}_i^2 \psi = j(-\tilde{a}\xi^2 - \tilde{b}\xi + \tilde{c})T_H, \quad (5)$$

где $\mathcal{Q}_i^2 = \mu_z K_f^2 - \xi_i \mu_z K_f / y_f \beta \quad k / \mu - \frac{\mu_z}{\mu} \beta^2$;

$$\tilde{a} = \mu_z K_f / y_f \beta \quad k / \mu; \quad \tilde{b} = K_f^2 (\mu_{eff} - \mu_z) - \beta^2 \left(1 - \frac{\mu_z}{\mu} \right); \quad \tilde{c} = \varepsilon_z K_f y_f \beta \quad k / \mu.$$

И если ξ удовлетворяет уравнению

$$-\tilde{a}\xi^2 - \tilde{b}\xi + \tilde{c} = 0, \quad (6)$$

то (5) преобразуется в однородное дифференциальное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta_t \psi + \mathcal{Q}^2 \psi = 0. \quad (7)$$

Использованный прием называется методом укорочения исходного дифференциального уравнения. Подставляя корни (ξ_1 и ξ_2) уравнения (6) в выражения (5) получаем два значения \mathcal{Q}_1^2 и \mathcal{Q}_2^2 , которым соответствуют два различных решения ψ_1 и ψ_2 уравнения (5), через которые, в свою очередь, рассчитываются постоянные разделения:

$$T_H^+ = \frac{\xi_2 \psi_1 - \xi_1 \psi_2}{\xi_2 - \xi_1}; \quad T_E^+ = j \frac{\psi_1 - \psi_2}{\xi_2 - \xi_1}. \quad (8)$$

Применение данного подхода в рассматриваемой краевой задаче оправдано в силу продольной однородности резонатора. Отсутствие неоднородностей в направлении оси Oz приводит к линейной независимости решений для прямой и обратных волн, образующих в результате суперпозиции стоячую волну в резонаторе. При этом из выражений (5) не сложно видеть, что $T_E^- = -T_E^+$, а $T_H^- = T_H^+$. Необходимо отметить, что приведенные математические выкладки для метода укорочения справедливы для резонансных структур произвольной формы поперечного сечения и полным заполнением гиротропной средой по высоте.

3. Расчет резонансных частот собственных колебаний круглого экранированного однородного ферритового резонатора

Применим разработанный метод к решению краевой задачи о круглом экранированном однородном ферритовом резонаторе (рис. 1). При этом для продольных компонент электромагнитного поля должны выполняться следующие граничные условия:

$$H_z \Big|_{z=0(h)} = 0; \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} \Big|_{z=0(h)} = 0. \quad (9)$$

Тогда решение дифференциального уравнения (7) в цилиндрической системе координат

нат (r, φ, z) с учетом ограниченности поля при $r = 0$ и соотношений (8) приводит к следующим компактным выражениям для продольных компонент электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} E_z^{nm} &= \sum_{i=1}^2 A_i \frac{(-1)^i}{\xi_2 - \xi_1} \frac{J_n(\vartheta_i r)}{J_n(\vartheta_i a)} \cos(\beta_m z) e^{jn\varphi}; \\ H_z^{nm} &= \sum_{i=1}^2 A_i \frac{(-1)^{i+1} \xi_{3-i}}{\xi_2 - \xi_1} \frac{J_n(\vartheta_i r)}{J_n(\vartheta_i a)} \sin(\beta_m z) e^{jn\varphi}; \end{aligned} \quad (10)$$

где $m = 0, 1, 2 \dots$ – продольный индекс собственных колебаний; $\beta_m = \frac{\pi m}{h}$;

$n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ – азимутальный индекс собственных колебаний;

$J_n(\vartheta_i r)$ - функция Бесселя порядка n ;

A_1, A_2 - неизвестные амплитудные коэффициенты линейно независимых решений.

Разрешая систему (5) относительно поперечных компонент электрического поля, получаем:

$$E_\varphi^{nm} = j \sum_{i=1}^2 A_i \frac{(-1)^i \vartheta_i}{\xi_2 - \xi_1} \left\{ Q_i \frac{J'_n(\vartheta_i r)}{J_n(\vartheta_i a)} - P_i \frac{n}{\vartheta_i r} \frac{J_n(\vartheta_i r)}{J_n(\vartheta_i a)} \right\} \sin(\beta_m z) e^{jn\varphi}, \quad (11)$$

$$\text{где } P_i = \frac{p \beta_m - \xi_{3-i} K_f / y_f [q \mu - p k]}{p^2 - q^2}, \quad Q_i = \frac{q \beta_m - \xi_{3-i} K_f / y_f [p \mu - q k]}{p^2 - q^2},$$

$$p = K_f^2 \mu - \beta_m^2; \quad q = K_f^2 k.$$

$J'_n(\vartheta_i r)$ - производная функции Бесселя порядка n по всему аргументу.

Таким образом, решение рассматриваемой краевой задачи на системе дифференциальных уравнений (3) с граничными условиями (9) представляет собой линейную комбинацию двух колебаний с одинаковой гармонической зависимостью от продольной координаты и различным характером зависимости от поперечной координаты r , математически выраженном в разных поперечных постоянных ϑ_1 и ϑ_2 . Накладывая дополнительные граничные условия равенства тангенциальных компонент электрического поля на идеально проводящей боковой поверхности резонатора, приходим к системе двух линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_1 и A_2 . Характеристическое уравнение резонансных частот собственных колебаний резонатора получается из условия нетривиальности решения полученной системы в виде равенства нулю её главного определителя и записывается в виде:

$$\frac{1}{\xi_2 - \xi_1} \left[\vartheta_1 Q_1 \frac{J'_n(\vartheta_1 a)}{J_n(\vartheta_1 a)} - \vartheta_2 Q_2 \frac{J'_n(\vartheta_2 a)}{J_n(\vartheta_2 a)} + \frac{n}{a} (P_2 - P_1) \right] = 0. \quad (12)$$

Результаты расчета приведены на рис. 2 в виде зависимости нормированной резонансной частоты от модуля коэффициента невязимности $|k/\mu|$ для нескольких низших типов колебаний ($G_{n/m}^{+(-)}$). Классификация собственных колебаний резонатора проводилась на основе предельного перехода к однородному диэлектрическому резонатору при $|k| \rightarrow 0$. Первая буква в названии типа колебания подчеркивает гибридный характер структуры поля, вторая определяет модовое распределение при $k=0$.

Согласно (9) и (10) угловая зависимость полей в резонаторе имеет вид $e^{\pm in\varphi}$. Значениям $\pm n$ при $k > 0$ соответствуют два независимых решения краевой задачи, описывающие гибридные волны с правым и левым вращением плоскости поляризации, соответственно. Поскольку направление вращения плоскости поляризации привязано к направлению оси Oz , то при изменении направления подмагничивания на противоположное, что приводит к изменению знака параметра k , при $n=1$ возбуждаются колебания с левой поляризацией. Поэтому в

обозначении типа колебаний вводится знаки: “+” – если направление вращения плоскости поляризации правое (по часовой стрелке, если смотреть вдоль оси Oz) и “-” при левом вращении плоскости поляризации (против часовой стрелки).

Индексное обозначение резонансных колебаний определяется тремя целыми числами: азимутальным индексом $|n|$, порядковым номером l корня характеристического уравнения (12) соответствующего типа колебания при фиксированных n и m , и продольным индексом колебания m .

Анализ графиков рис. 2 позволяет сделать вывод о том, что наименьшей резонансной частотой характеризуются колебания $EH_{1/0,11}^{+/-}$ -типа. Поэтому большинство развязывающих ферритовых устройств работает именно на этом низшем типе колебаний. Наибольшее расщепление частот колебаний с правым и левым вращением плоскости поляризации наблюдается для $HE_{111}^{+(-)}$ -колебаний. При реализации работы развязывающих ферритовых устройств на этом типе колебаний потенциально может быть достигнута более широкая полоса рабочих частот. Колебания $EH_{211}^{+/-}$ -типа с азимутальным индексом $|n|=2$, характеризуются также значительной величиной частотной расстройкой, занимают среднее положение на оси резонансных частот. Очевидно, что реализация работы циркуляторов на этом типе колебаний потенциально проще с точки зрения способа селективного возбуждения и подавления нежелательных низших типов, чем для $HE_{111}^{+(-)}$ -колебаний.

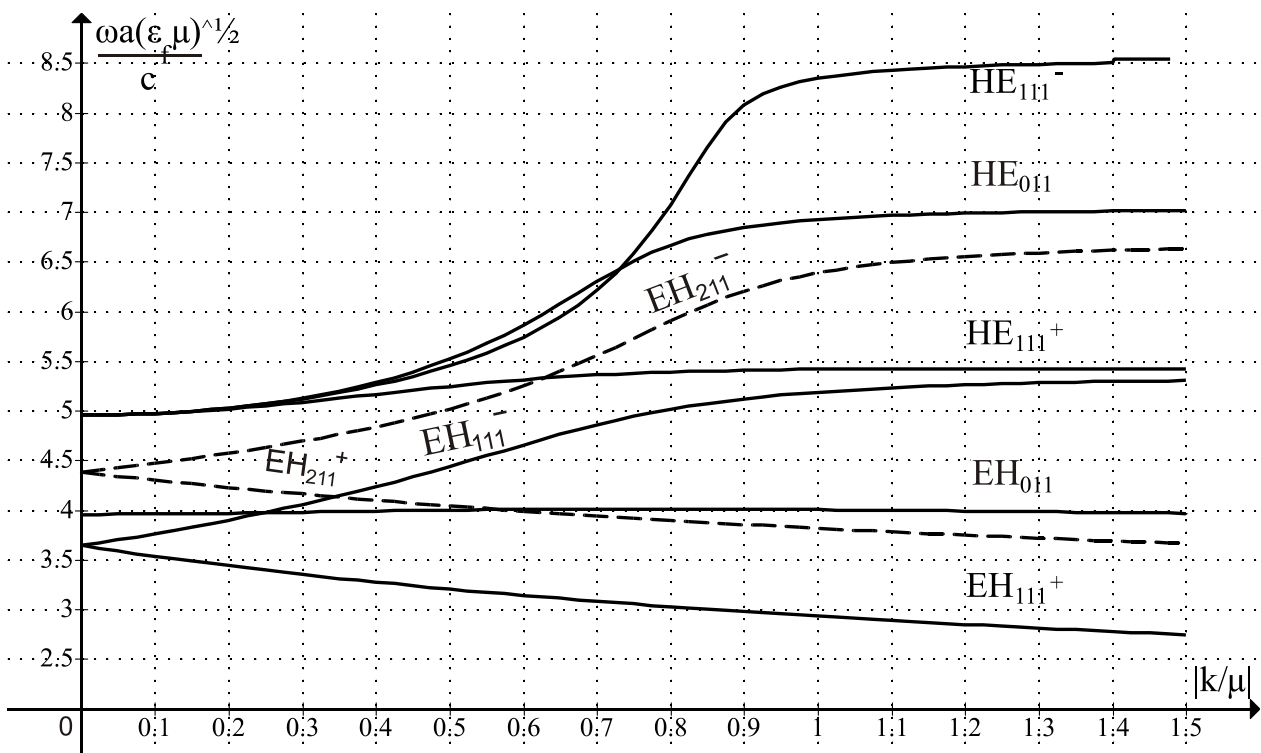


Рис. 2. Резонансные частоты собственных колебаний круглого закрытого однородного ферритового резонатора с параметрами $h = 10$ мм, $a = h$, $\mu = \mu_z = 1$

Заключение

Проведенная адаптация разработанного ранее для направляющих гиротропных структур так называемого метода укорочения исходного дифференциального уравнения к решению краевых задач о продольно однородных резонансных структурах позволила провести расчет спектра резонансных частот собственных колебаний круглого экранированного однородного ферритового резонатора. Описанная методика анализа продольно регулярных резо-

нансных структур открывает пути к строгому электродинамическому анализу новых типов ферритовых устройств различного функционального назначения.

Библиографический список

1. **Виприцкий, Д.Д.** Спектр волн круглого волновода с аксиальным продольно-намагниченным ферритовым стержнем / Д.Д. Виприцкий, А.В. Назаров, С.Б. Раевский // Антенны. 2005. Вып. 5 (96). С. 24–28.
2. **Микаэлян, А.Л.** Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах / А.Л. Микаэлян. – М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 664 с.
3. **Kales, M. L.** Modes in waveguides containing ferrites // J. Appl. Phys. V. 24. May 1953. P. 604–608.

Дата поступления
в редакцию 20.11.2014

Е.А. Mihalitsyn¹, Т.В. Kozhevnikova²

THE ADAPTATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS CONTRACTION METHOD TO SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS ABOUT SHIELDED CIRCULAR HOMOGENEOUS FERRITE LOADED CAVITY

Federal State Owned Unitary Enterprise Federal Research and Production Center¹,
“Measuring system research institute named after Yu.Ye. Sedakov”,
Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev²

Purpose: To adapt the differential equations contraction method to find the ferrite loaded cavities eigenvalue frequencies.

Design/methodology/approach: The ferrite medium analysis is based on the Maxwell equations transformation to the reduced homogeneous Helmholtz differential equation. The boundary value problem about shielded circular homogeneous ferrite loaded resonator is solved by an accurate way.

Findings The resonant frequencies of shielded circular homogeneous axial magnetized ferrite resonator are calculated. Moreover, the present study provides the recommendations of practice implementation of the ferrite resonator analyses results.

Research limitations/implications: The adapted contraction method of initial differential equations provides a starting point for further studies of open and shielded ferrite contained resonators.

Originality/value The present study provides the base information to concern resonant frequencies spectrum of the shielded circular homogeneous ferrite resonator for specialists and engineers.

Key words: ferrite resonator, the differential equations contraction method.