УДК 676.056.71:62-26

Б.Ф. Балеев

АВТОКОЛЕБАНИЯ КАЛАНДРОВЫХ БАТАРЕЙ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Рассмотрен механизм возникновения автоколебаний и свободные колебания системы валов. Найдены собственные частоты и формы колебаний. Принятая модель позволяет анализировать поведение системы.

Ключевые слова: автоколебания, свободные колебания, собственные частоты

С ростом скорости бумагоделательных машин возникло существенное увеличение вибрации каландровых батарей – системы валов, установленных в вертикальной плоскости и свободно лежащих один на другом, между которыми пропускается бумажное полотно для придания ему необходимой толщины и плотности. Вибрация приводила к образованию на листе равномерно расположенных поперечных полос, представляющих собой вмятины глубиной около 10-15 мкм, что заметно снижало качество печати и приводило к обрывам бумажного полотна. На поверхностях всех валов также образовывались полосы, представляющие собой чередование выпуклостей и впадин с постоянным шагом и высотой около 4 мкм.

Вся батарея входила в устойчивый колебательный режим. По мере увеличения высоты неровностей увеличивалась амплитуда колебаний. Валы приходилось периодически перешлифовывать. Длина валов около – 9 м. Диаметры: нижний – около 1000 мм и массой 47 т, второй – 600 мм, массой 16 т, остальные – 450 мм, массой 12 т.

В результате теоретических и экспериментальных исследований вибраций каландров выяснилось, что источником вибрации являются особые условия верхнего вала, который имеет свободу перемещения вверх. Неоднородность бумажного полотна вызывает первоначальные колебания, а затем при образовании первой вмятины вал входит в автоколебательный режим. Измерения виброизмерительной аппаратурой показали, что большую часть периода вертикального перемещения вал движется с ускорением свободного падения, то есть отрывается от бумажного полотна, а существенно меньшую часть – с ускорением около 7g.

Упругие свойства бумаги незначительны, поэтому вся энергия вала в фазе падения переходит в неупругую деформацию бумажного листа. Движение вверх происходит за счёт горизонтального движения бумажного полотна при использовании энергии привода батареи. Движение вала принимает автоколебательный характер, так как образуемая валом впадина обеспечивает его движение вверх, а движение вниз – под действием силы тяжести.

Таким образом, в системе имеются все элементы, необходимые для поддержания автоколебаний:

1) колебательная система особого вида, когда упругий элемент отсутствует, а его роль выполняет сила тяжести, возвращая массу в положение равновесия;

2) источник энергии – привод батареи;

3) обратная связь, обеспечиваемая движением вала вниз, когда он образует впадину на бумажном листе, являющуюся источником движения вверх.

Количество энергии, поступающее от привода машины к валу, определяется скоростью бумажного полотна, размерами и формой впадин, а расстояние между впадинами, зависящее от скорости машины, – частоту автоколебаний вала.

Таким образом, движение вверх происходит за счёт силы взаимодействия вала и боковой поверхности впадины при горизонтальном движении листа, обеспечиваемого приводом батареи. Вертикальная скорость при этом зависит от формы впадины и скорости машины. Опускаясь вниз, вал снова образует впадину, и процесс принимает автоколебательный характер.

Колебания других валов батареи будут складываться из вынужденных с частотой колебаний верхнего вала и автоколебаний, возбуждаемых аналогично изложенному, с той лишь разницей, что частота будет зависеть от положения вала в батарее.

Представим форму впадины в виде синусоиды с длиной полуволны равной $2e$. Максимальная глубина впадины – y_0. Изменение по длине выразится зависимостью

$$y = y_0 \sin\frac{\pi x}{2e}.$$

Определим вертикальную скорость вала, возникающую при его движении по наклонному участку впадины, где V – скорость бумажного полотна:

$$V_в = \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx} = V\frac{dy}{dx} = Vy_0\frac{\pi}{2в}\cos\frac{\pi x}{2в}.$$

Максимальная вертикальная скорость равна $V_{в\,\max} = Vy_0\frac{\pi}{2в}$.

Так как вал отрывается от листа, то можно найти время его подъёма и опускания

$$t = 2\frac{V_{в\,\max}}{g}.$$

По известной скорости машины определяется расстояние между впадинами $S = Vt$ и частота колебаний вала $n = \frac{1}{t} = e\frac{g}{\pi}Vy_0$.

Если форму впадин представить с прямолинейной наклонной поверхностью, то изменение высоты впадины по длине будет: $y = y_0\frac{x}{в}$, где e – половина ширины впадины. Вертикальная скорость в этом случае равна: $V_в = V\frac{y_0}{в}$, а частота колебаний: $n = \frac{вg}{2}Vy_0$.

Экспериментальными измерениями установлено, что глубина впадин находится в пределах 7 - 10 % от толщины листа до каландра (0,15 мм).

Определим частоты колебаний по полученным зависимостям для двух форм впадин при скорости бумажного полотна 9,08 м/с и половиной длины впадины 3,4 10^{-3}мм.

1. Синусоидальная форма впадины.
   - Изменение толщины листа 10% (y_0 = 15 10^{-3} мм); n = 73,3 Гц;
   - Изменение толщины листа 7% (y_0 = 10,5 10^{-3} мм); n = 104,7 Гц.
2. Впадина с прямолинейным уклоном.
   - Изменение толщины листа 10% (y_0 = 15 10^{-3} мм); n =117,7 Гц;
   - Изменение толщины листа 7% (y_0 = 10,5 10^{-3} мм); n = 164 Гц.

Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными. Например, при скорости машины 545 м/мин (9,08 м/с) измеренная частота равнялась 80 Гц. Она лежит между 73.3 и 104,7 Гц для синусоидальной формы впадины и изменении толщины листа от 10 до 7%.

Экспериментально установлено, что с увеличением скорости машины (бумажного полотна) растёт частота колебаний. Вычисления были сделаны для известной скорости машины и известных размерах впадин на этой скорости.

При изменении скорости от 545 до 700 м/мин частота увеличилась с 80 до 100 Гц, практически пропорционально изменению скорости. При изменении скорости размеры впадин (ширина, глубина и форма боковой поверхности) изменятся, поэтому нельзя теоретически определить частоту по скорости машины.

Анализ колебаний системы валов

Для анализа колебаний каландровой батареи как системы валов выполнено приведение масс и жесткостей к точкам, соответствующим наибольшим амплитудам колебаний, то есть к серединам валов. Распределённая масса каждого вала заменена сосредоточенной в точке приведения с соблюдением равенства кинетических энергий.

Рассматриваются два вида концевых условий: шарнирные опоры и свободные концы. Формы прогибов для шарнирно опёртого вала

$$Y_i = \sin\frac{i\pi x}{l}.$$

Для вала со свободными концами:

$$Y_i = \cos\alpha_i x - \sin\alpha_i x - \delta_i(ch\alpha_i x + \cos\alpha_i x) + e^{\alpha_i x}.$$

Приравнивая значения кинетических энергий, для шарнирно-опёртого вала получим:

$$\int_0^l \left(\frac{dY_i}{dt}\right)^2 \frac{q}{l}\,dx = m_ш\left(\frac{dY}{dt}\right)^2,$$

где $m_ш = \frac{ql}{2g}$ – приведённая масса вала с шарнирными опорами. Приведённая масса для вала со свободными концами $m_c = \frac{ql}{4g}$.

Заменим жесткость каждого вала приведённой, соблюдая равенство кинетических энергий. Для шарнирно опёртого вала получим

$$\int_0^l \left(\frac{d^2Y_i}{dx^2}\right)^2 \frac{El}{2}\,dx = 0{,}5C_шY_i^2$$

где $C_ш = \frac{EI(i\pi^4)}{2l^3}$ – приведённая жесткость вала с шарнирными опорами.

Для вала со свободными концами приведённая жесткость: $C_ш = \frac{EI(\alpha_i l)^4}{4l^3}$.

Подобным образом определяется приведённая жесткость бумаги. Для вала с шарнирными опорами $C_{шб}$

$$\int_0^l CY_i^2\,dx = C_{шб}Y_i^2,$$

$$C_{шб} = \frac{Cl}{2}$$

где C – жесткость бумаги. Для вала со свободными концами приведённая жесткость бумаги $C_{cб} = \frac{Cl}{4}$.

Составим схему для системы валов – каландровой батареи. Обозначим m_i – приведённая масса i-го вала, $C_{i,i+1}$ – приведённая жесткость i-го вала и бумаги между i-м и i+1 валами.

Определим значения кинетической и потенциальной энергий:

$$T = \frac{1}{2}\sum_1^6 m_i\dot{y}_i^2$$

$$П = \frac{1}{2}\sum_1^6 C_{i,i+1}(y_i - y_{i+1})^2,$$

где y_i – обобщённая координата.

Подставим значения T и $П$ в уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0$$

где $L = T - П$ – функция Лагранжа.

Получим однородную линейную систему дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m_i\ddot{y}_i - c_{i-1,i}(y_{i-1} - y_i) + c_{i,i+1}(y_i - y_{i+1}) = 0.$$

Если на систему действуют внешние силы Q(t), то имеем неоднородную систему дифференциальных уравнений, соответствующую однородной:

$$m_i\ddot{y}_i - c_{i-1,i}(y_{i-1} - y_i) + c_{i,i+1}(y_i - y_{i+1}) = Q(t).$$

Рассмотрим свободные колебания. Для интегрирования системы уравнений ищем частные решения следующего вида: $y_i = A_i\sin(\omega t + \varepsilon)$, где A_i,ω, ε – некоторые постоянные.

Подставляя частные решения в систему дифференциальных уравнений, получим систему алгебраических уравнений первой степени для определения постоянных:

$$\begin{cases} A_1(c_0 + c_{12} - m_1\omega^2) - A_2c_{12} = 0 \\ -A_1c_{12} + A_2(c_{12} + c_{23} - m_2\omega^2) - A_3c_{23} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -A_5c_{56} + A_6(c_{56} - m_6\omega^2) = 0. \end{cases}$$

Поскольку правые части уравнений – нули, следовательно, система имеет решения отличные от нуля только тогда, когда определитель системы равен нулю. Величина ω должна быть такой, чтобы $\Delta(\omega)^2 = 0$:

$$\begin{vmatrix} c_{01} + c_{12} - m_1\omega^2 & -c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_{12} & c_{23} + c_{12} - m_2\omega^2 & -c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{23} & c_{23} + c_{34} - m_3\omega^2 & -c_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{34} & c_{34} + c_{45} - m_4\omega^2 & -c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_{45} & c_{45} + c_{56} - m_4\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{56} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Корни данной системы – квадраты частот её свободных колебаний. Каждому из этих корней соответствую два равных и противоположных по знаку значения. Для получения независимых решений берутся лишь положительные корни. В результате решения получены шесть частот свободных колебаний для двух вариантов закрепления концов валов – шарнирные опоры и свободные концы, а также относительные амплитуды, определяющие формы свободных колебаний (табл. 1).

Таблица 1

Параметры свободных колебаний каландровой батареи

Номер вала Концевые условия	Формы колебаний, относительные амплитуды и частоты (Гц)					
	1	2	3	4	5	6
1	0,452	0,82	0,665	0,463	0,24	0,049
2	0,44	0,595	-0,089	-0,605	-0,667	-0,236
3	0,421	0,301	-0,57	-0,36	-0,524	0,565
4	0,399	0,028	-0,574	0,339	0,305	-0,75
5	0,376	-0,215	-0,256	0,528	-0,443	0,315
6	0,349	-0,378	0,215	-0,147	0,067	-0,029
Шарниры	22,4	70,2	144	206	262	524
Своб.концы	19,0	70,0	144	206	262	324

Экспериментами установлено, что колебания системы происходят по второй форме на частоте, близкой к теоретической резонансной. Принятая модель хорошо согласуется с поведением реальной системы, поэтому есть возможность анализа и назначения условий для ослабления колебаний.

Библиографический список

1. **Ден Гартог, Дж.П.** Механические колебания / Дж.П. Ден Гартог. – М.: Физматгиз, 1960.
2. **Диментберг, Ф.М.** Изгибные колебания вращающихся валов / Ф.М. Диментберг. – М.: АНСССР, 1959.

Дата поступления
в редакцию 11.12.2014

B. F. Baleyev

SELF-SUSTAINED OSCILLATIONS OF CALENDER ROLL SETS

Nizhny Novgorod state technical university n. a. R. E. Alexeev

The mechanism of self-sustained oscillations and free vibration of calendar rolls are studied. Natural oscillation frequencies and vibration modes are discovered. The accepted model allows analyzing the system behaviour.

Key words: self-sustained oscillations, free vibrations, natural frequencies.