**УДК 531.43 (075.5)**

**В.Н. Ершов[1], Н.В. Ершов[2]**

# ПОСЛЕДСТВИЯ УДАРА ДЛЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

Нижегородский государственный педагогический университет им. К. Минина[1],
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева[2]

Рассматриваются последствия ударного взаимодействия для сложных систем. Вводится понятие об импульсных связях. Рассмотрены примеры решения различного вида систем с использованием методов и подходов теории удара. Получены практические результаты.

*Ключевые слова*: сложные системы, ударное взаимодействие, импульсные связи, теория удара.

В большинстве технической литературы последствия удара рассматриваются как колебательный процесс системы, подвергшейся удару. Или же анализируются ударные силы упругого или упругопластического взаимодействия в местах соударения.

В то же время большой практический интерес представляет поведение сочлененных инженерных систем непосредственно после удара в какой-либо точке системы (кинематические и энергетические соотношения).

Рассмотрим очень быстрые (внезапные) изменения движения, происходящие при действии на систему ударных импульсов. Под ударными импульсами понимается предельный случай действия больших сил в течении очень коротких промежутков времени. За время $\tau$ конфигурация системы изменятся не будет, тогда как скорость будет изменяться скачком.

В задачах, в которых других сил кроме ударных нет, координаты сохраняют постоянные значения, скорости в момент $t_1 = 0$ задаются, и требуется определить скорости в момент времени $t_1 + 0$.

Так как ударные силы в течении короткого промежутка времени принимают большие значения, то реакции связей в течении этого времени также должны быть большими. Будем также считать, что каждый элемент сочлененной системы за время удара остается твердым. В задачах о движении системы тел на систему могут действовать соответствующие ударные импульсы сил реакций. В теории удара удобнее пользоваться второй формой основного уравнения:

$$\sum_{r=1}^{n}\left(m_r x_r'' - N_r\right)\Delta u_r = 0,$$

где $x_r''$ - ускорения, $N_r$ - реакции связей, $\Delta u_r$ - конечные вариации скорости.

Введем понятия об импульсных связях. Это связи терпящие разрыв в момент времени $t_1$. Тогда мы имеем две системы значений коэффициентов: значения при $t_1 = 0$ и значения при $t_1 + 0$.

На практике встречаются связи двух типов. Связи первого типа накладываются внезапно в момент времени $t_1$. Наложение таких связей фактически уменьшает число степеней свободы систем. При связях второго типа число степеней свободы системы остается постоянным. Исходя из такого деления, возникают задачи двух типов:

1) задачи, в которых на систему действуют заданные ударные импульсы, а наложенные связи конечны, т.е. не импульсные;

2) задачи, в которых на систему не действуют ударные импульсы активных сил, но имеются импульсные связи.

Основное уравнение движения системы приводим к виду

$$\sum_{r=1}^{n}\left[m_r\left(u_r-u_{r0}\right)-P_r\right]\Delta u_r=0,$$

где $P_r=\int\limits_{t_1}^{t_1+\tau}N_r dt$ - составляющая импульса реакций. Величина $\tau$ пренебрежительно мала, а величины $u_{r0}$ и $u_r$ обозначают значения скорости $x_r'$ в моменты $t_1=0$ и $t_1+0$.

Тогда значения скоростей $u$ в момент времени $t_1+0$, т.е. непосредственно после приложения импульсов, определяются из условия, что выражение

$$T=\frac{1}{2}\sum m\left(u-u_0-\frac{P}{m}\right)^2$$

принимает минимум при скоростях допустимых в момент $t_1+0$. Эта теорема аналогична принципу наименьшего принуждения Гаусса в случае конечных сил.

Рассмотрим две задачи.

Задача 1. Четыре однородных стержня массы $M$ и длины $\ell$ каждый, шарнирно связаны друг с другом по концам и образуют раму По одной диагонали этой рамы натянута легкая нерастяжимая струна длиной $\ell\sqrt{2}$, т.е. когда струна натянута рама имеет форму квадрата. Система движется по гладкой горизонтальной плоскости. Первоначально струна не натянута, но в момент времени $t_1$ она натягивается. Требуется определить движение системы непосредственно после приложения импульса.

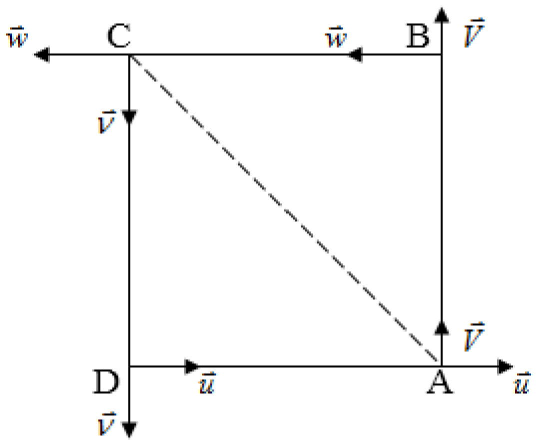


**Рис. 1. Схема задачи**

Обозначим скорости вдоль стержней $\vec{V},\vec{w},\vec{u},\vec{v}$. Запишем кинетическую энергию стержня AB. Он совершает сложное движение: поступательное - переносное со скоростью $\vec{V}$ и плоское - относительное движение. Тогда его кинетическая энергия будет равна

$$T_{AB}=\frac{M}{6}\left(u^2-uw+w^2+3V^2\right).$$

Аналогично и для других стержней системы. Тогда кинетическая энергия системы

$$T=\frac{M}{6}\left[5(V-V_0)^2+5(\nu-\nu_0)^2+5(w-w_0)^2+5(u-u_0)^2-2(u-u_0)(w-w_0)-2(V-V_0)(\nu-\nu_0)\right],$$

где $V_0, w_0, u_0, \nu_0$ - значения скоростей непосредственно перед моментом натяжения струны.

Уравнение связи запишем в форме $u-V+w-\nu=0$. Это проекции скоростей по концам струны, которые должны быть равны.

Условия стационарности (минимум функции $T$ с учетом уравнения связи) дают

$$5u - w - (5u_0 - w_0) = \lambda$$
$$5V - \nu - (5V_0 - \nu_0) = \lambda$$
$$5w - u - (5w_0 - u_0) = \lambda$$
$$5\nu - V - (5\nu_0 - V_0) = \lambda .$$

Из этих условий получаем

$$u - u_0 = w - w_0 = \frac{\lambda}{4},\ V - V_0 = \nu - \nu_0 = \frac{\lambda}{4},$$

где $\lambda = -u_0 + V_0 - w_0 + \nu_0$.

Задача 2. Пример импульсного движения непрерывных систем.

Рассмотрим однородную идеальную несжимаемую жидкость. Пусть имеются внешние и внутренние границы. Границы представляют собой либо твердые поверхности, либо деформируемые. В последнем случае их изменения должны происходить так, чтобы ограниченный ими объем оставался неизменным.

Если движение границ в некоторый момент $t_1$ претерпевает разрыв (например жидкость в замкнутом сосуде была в покое, а затем сосуду сообщили резкий толчок), то движение жидкости тоже будет разрывным. Задача состоит в определении мгновенные изменения движения.

Обозначим составляющие вектора скорости $\vec{q}$ относительно неподвижной прямоугольной системы координат через $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, а постоянную плотность жидкости $\rho$. В жидкости устанавливается импульсное давление $\varpi$, подобно тому как в системе с конечным числом степеней свободы возникают импульсы связей. Основное уравнение принимает вид

$$\int \rho\{(u-u_0)\Delta u + (v - v_0)\Delta v + (w - w_0)\Delta w\} d\tau = \int \varpi \Delta q_n dS .$$

Через $q_n$ обозначена составляющая скорости вдоль внешней нормали. Символ $\Delta$ обозначает *конечное* приращение, возможное в момент времени $t_1 + 0$. Если направляющие косинусы внешней нормали обозначить через $l$, $m$, $n$, то правая часть уравнения будет иметь вид

$$-\int \varpi(l\Delta u + m\Delta v + n\Delta w) dS = -\int\left(\frac{\partial\varpi}{\partial x}\Delta u + \frac{\partial\varpi}{\partial y}\Delta v + \frac{\partial\varpi}{\partial z}\Delta w\right)d\tau - \int \varpi\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta u + \frac{\partial}{\partial y}\Delta v + \frac{\partial}{\partial z}\Delta w\right)d\tau .$$

Второй член правой части равенства равен нулю, т.к. $div\vec{q} = div(\vec{q} + \Delta\vec{q}) = 0$.
Тогда получаем

$$\int\left\{\left[\rho(u-u_0) + \frac{\partial\varpi}{\partial x}\right]\Delta u + \left[\rho(v - v_0) + \frac{\partial\varpi}{\partial y}\right]\Delta v + \left[\rho(w - w_0) + \frac{\partial\varpi}{\partial z}\right]\Delta w\right\}d\tau = 0 .$$

Это равенство справедливо для произвольных значений $\Delta\vec{q}$, удовлетворяющих уравнениям $div\Delta q = 0$, $\Delta q_n = 0$. Таким образом

$$\rho(u - u_0) = -\frac{\partial\varpi}{\partial x},$$

$$\rho(v - v_0) = -\frac{\partial\varpi}{\partial y},$$

$$\rho(w - w_0) = -\frac{\partial\varpi}{\partial z}.$$

Получили уравнения импульсного движения жидкости. Импульсное давление $\varpi$ связано с потенциалом скоростей возникшего движения соотношением

$$\varpi = \rho\varphi.$$

Из рассмотренного примера следует, что теоремы классической гидродинамики, доказываемые обычно с помощью теоремы Грина, могут быть получены из общих теорем теории удара.

**Библиографический список**

1. Сборник задач по теоретической механики / под ред. К.С. Колесникова. – М.: Наука, 1983.
2. **Парс, Л.** Аналитическая динамика / Л. Парс. – М.: Наука, 1971.

*Дата поступления*
*в редакцию 11.12.2014*

**V.N. Ershov[1], N.V. Ershov[2]**

## IMPACT EFFECT ON COMPLEX SYSTEMS

Nizhny Novgorod state pedagogical university n. a. K. Minin[1],
Nizhny Novgorod state technical university n. a. R. E. Alexeev[2]

Impact interaction consequences on complex systems are studied. A notion of pulse connections is introduced. Examples of various complex systems solutions using the impact theory methods and approaches are considered. Working knowledge is obtained.

*Key words:* complex systems, impact interaction, pulse connections, theory of impact.