УДК 621.372.8

В.Ф. Баринова, Н.А. Новоселова, Л.Г. Рудоясова

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В КРУГЛОМ ИЗОТРОПНОМ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Цель: Рассмотреть полный спектр гибридных волн, распространяющихся вдоль круглого диэлектрического волновода. Показать существование в такой направляющей системе собственных и несобственных комплексных волн.

Метод, методология: С общих позиций делается попытка рассмотреть спектральный состав гибридных волн, распространяющихся вдоль круглого диэлектрического волновода.

Исследования: Поле гибридной волны в такой системе описывается продольными компонентами обоих векторов Герца, удовлетворяющими уравнению Гельмгольца и условию ограниченности на бесконечности. На поверхности диэлектрика должно выполняться условие непрерывности тангенциальных компонент поля. Радиальная зависимость поля внутри диэлектрического волновода описывается функциями Бесселя, вне волновода – функциями Ханкеля второго рода. При таком выборе радиальной зависимости поперечное волновое число во второй области может принимать любые действительные значения, что соответствует волнам непрерывного спектра, мнимые отрицательные значения, что соответствует обычным поверхностным волнам, и комплексные значения, которые соответствуют собственным и несобственным комплексным волнам.

Оригинальность/значение: Подробно рассмотрен вопрос ортогональности комплексных волн в двумерном слоистом волноводе. С помощью простых, но достаточно громоздких преобразований показано, что в рассматриваемой системе гибридные комплексные волны удовлетворяют условию ортогональности. Выполнение условия ортогональности позволило решить задачу о возбуждении, то есть найти спектральную амплитуду.

Ключевые слова: диэлектрический волновод, комплексные волны, дисперсионное уравнение.

Подробный анализ волн, распространяющихся в двумерных слоистых волноводах, был проведен в работе [1], где рассматривались свойства волн дискретного и непрерывного спектров. Вопросам распространения таких волн в плазменных слоях посвящены работы [2-4]. В настоящей статье с общих позиций делается попытка рассмотреть спектральный состав гибридных волн, распространяющихся вдоль круглого диэлектрического волновода.

Поле гибридной волны в такой системе описывается продольными компонентами обоих векторов Герца, удовлетворяющими уравнению Гельмгольца и условию ограниченности на бесконечности:

$$\left|\underline{\Pi}^{e,m}\left(r,\underline{\varphi},\bar{z}\right)\right| < \underline{\underline{C}} \text{ при } r \to \infty. \tag{1}$$

На поверхности диэлектрика должно выполняться условие непрерывности тангенциальных компонент поля.

Радиальная зависимость поля внутри диэлектрического волновода описывается функциями Бесселя, вне волновода – функциями Ханкеля второго рода. При таком выборе радиальной зависимости поперечное волновое число во второй области может принимать любые действительные значения, что соответствует волнам непрерывного спектра, мнимые отрицательные значения, что соответствует обычным поверхностным волнам, и комплексные значения, которые соответствуют собственным и несобственным комплексным волнам.

В [5-7] показано, что наряду с собственными комплексными волнами в открытом ДВ могут существовать несобственные КВ.

Поскольку принципиальная возможность существования в системе комплексных волн доказана, векторы Герца, соответствующие n-й гибридной волне, избирательно возбуждаемой источниками $\vec{j}^{\,e.m}$, в первой и во второй областях записываем в виде

$$\underline{\Pi}_{z_{1,2}}^{e,m}=\sum_{k=1}^{\infty}A_{\pm kn}\psi_{1,2}^{e,m}(r,\varphi)e^{-i\beta_{\pm kn}z}+\int_{0}^{\infty}A_{\pm}(\alpha_{1,2})\psi_{1,2}^{e,m}(r,\varphi,\alpha_{1,2})e^{-i\beta_{\pm}(\alpha)z}d\alpha_{1,2}, \qquad (2)$$

где первое слагаемое представляет собой сумму собственных волн, соответствующих номеру *n,* дискретной части спектра, второе – весь набор волн непрерывного спектра. При вычислении векторов Герца в первой области интегрирование в (2) производится по α_1, во второй – по α_2. Поперечные волновые числа связаны соотношением $\alpha_1^2-\alpha_2^2=\omega^2(\varepsilon_1\mu_1-\varepsilon_2\mu_2)$. Знаки $(\pm)$ в обозначениях амплитуд и продольных волновых чисел соответствуют прямой и обратной волнам, соответственно, $\psi^{e,m}$ в (2) – электрическая и магнитная потенциальные функции.

Деформация контура интегрирования в нижнюю полуплоскость (α_2) позволит ввести дискретные собственные комплексные волны в (2) под знак интеграла, в то время как деформация контура интегрирования в верхнюю полуплоскость, напротив, приведет к выделению из волн непрерывного спектра несобственных комплексных волн.

В силу этого векторы Герца, представляющие поля волн непрерывного спектра и комплексных волн, можно записать как

$$\Pi_{z_{1,2}}^{e,m}=\int_{\Gamma}A_{\pm}(\alpha_{1,2})\psi_{1,2}^{e,m}(r,\varphi,\alpha_{1,2})e^{-i\beta_{\pm}(\alpha)z}d\alpha_{1,2}. \qquad (3)$$

Интегрирование в (3) производится по всему спектру поперечных волновых чисел, причем контур интегрирования деформирован вблизи точек, соответствующих волнам дискретного спектра.

Поскольку поле, описываемое (3), в силу выбранной радиальной зависимости вне диэлектрического волновода удовлетворяет нулевому условию при $r\to\infty$, для двух произвольных поперечных сечений, исходя из леммы Лоренца, можно записать

$$\int_{S_{1,2}}\left\{\left[\vec{E}\vec{H}_{\pm}(\alpha)\right]-\left[\vec{E}_{\pm}(\alpha)\vec{H}\right]\right\}d\vec{S}=\int_{V}\left[\vec{j}^{\,e}\vec{E}_{\pm}(\alpha)-\vec{j}^{\,m}\vec{H}_{\pm}(\alpha)\right]dV, \qquad (4)$$

где сечение S_1 расположено слева от источников, S_2 – справа; объем *V* заключен между этими сечениями, простирающимися от $r=0$ до $r\to\infty$. Поле $\vec{E},\vec{H}$ в (2) создается источниками $\vec{j}^{\,e,m}$ и включает в себя весь спектр волн, поле $\vec{E}_{\pm}(\alpha)$; $\vec{H}_{\pm}(\alpha)$ включает в себя одну спектральную составляющую, соответствующую поперечному волновому числу α. $\vec{E}_{+}(\alpha)$; $\vec{H}_{+}(\alpha)$ – поле прямой волны, оно отлично от нуля в сечении S_1; поле обратной волны $\vec{E}_{-}(\alpha)$; $\vec{H}_{-}(\alpha)$ отлично от нуля в сечении S_2.

Используя (4) и граничные условия на поверхности диэлектрического стержня, получаем выражение для спектральной амплитуды

$$A(\alpha)=\frac{R_n(\alpha_1,\alpha_2)}{N(\alpha_1,\alpha_2)}\int_{V}\left[\vec{j}^{\,e}\vec{E}_{-}(\alpha)-\vec{j}^{\,m}\vec{H}_{-}(\alpha)\right]dV, \qquad (5)$$

где

$$N=A_1^2\,\frac{\chi_n(\alpha_1,\alpha_2)-\alpha_1^2\alpha_2^2a\left[\frac{\varepsilon_1}{\alpha_1}P_n(\alpha_1)-\frac{\varepsilon_2}{\alpha_2}Q_n(\alpha_2)\right]\left[\frac{\mu_1}{\alpha_1}P_n(\alpha_1)-\frac{\mu_2}{\alpha_2}Q_n(\alpha_2)\right]}{\alpha_1^2\alpha_2^2\sqrt{\alpha_1^2-\alpha_2^2}\left(\varepsilon_2\mu_2\alpha_1^2-\varepsilon_1\mu_1\alpha_2^2\right)}; \qquad (6)$$

$$\chi_n(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{n^2}{a}\left(\alpha_1^2-\alpha_2^2\right)\left(\varepsilon_2\mu_2\alpha_1^2-\varepsilon_1\mu_1\alpha_2^2\right);$$

$$P_n(\alpha_1)=\frac{J_n'(\alpha_1 a)}{J_n(\alpha_1 a)};\; Q_n(\alpha_2)=\frac{H_n^{(2)'}(\alpha_2 a)}{H_n^{(2)}(\alpha_2 a)};$$

$\alpha_{1,2}$ – поперечные волновые числа в первой и второй областях; A_1 – амплитудный коэффициент электрической потенциальной функции в первой области; a – радиус стержня;

$$R_n(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{\alpha_1 a}{2}\left\{\frac{1}{2n-1}\left[J_{n-1}^2(\alpha_1 a)-J_n(\alpha_1 a)J_{n-2}(\alpha_1 a)-J_n(\alpha_1 a)J_{n-1}(\alpha_1 a)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2n+1}\left[J_{n-1}(\alpha_1 a)J_{n+1}(\alpha_1 a)-J_n^2(\alpha_1 a)-J_n(\alpha_1 a)J_{n+1}(\alpha_1 a)\right]\right\}-\frac{\alpha_2 a}{2}\left\{\frac{1}{2n-1}\times\right.$$

$$\times\left[H_{n-1}^{(2)^2}(\alpha_2 a)-H_n^{(2)}(\alpha_2 a)H_{n-2}^{(2)^2}(\alpha_2 a)-H_n^{(2)}(\alpha_2 a)H_{n-1}^{(2)}(\alpha_2 a)\right]+\frac{1}{2n+1}\times$$

$$\left.\times\left[H_{n-1}^{(2)}(\alpha_2 a)H_{n+1}^{(2)}(\alpha_2 a)-H_n^{(2)^2}(\alpha_2 a)-H_n^{(2)}(\alpha_2 a)H_{n+1}^{(2)}(\alpha_2 a)\right]\right\}+2\alpha_2\delta(\alpha_2)\left\{\frac{1}{2n-1}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\pm 1-(1+i)e^{i\left(n-\frac{1}{4}\right)\pi}\right]+\frac{1}{2n+1}\left[\mp 1+(1-i)e^{i\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi}\right]\right\}.$$

Здесь $J_n(\alpha_1 a)$, $H_n^{(2)}(\alpha_2 a)$ – функции Бесселя и Ханкеля; $\delta(\alpha_2)$ – дельта-функция Дирака; верхний знак в последней фигурной скобке соответствует нечетным n, нижний – четным.

При выводе выражения (5) использование граничных условий на поверхности стержня дало возможность выразить амплитудные коэффициенты всех потенциальных функций первой и второй областей через A_1.

Нетрудно убедиться, что функция, стоящая в числителе выражения для $N(\alpha_1,\alpha_2)$, совпадает с дисперсионным уравнением волн круглого диэлектрического волновода, получаемым методом согласованных полей [5]. Эта функция является в комплексной плоскости (α) голоморфной, а следовательно, имеет нули в изолированных точках. В этих точках функция (3), являющаяся представлением поля, будет иметь полюсы. Полюсы, лежащие на оси $\mathrm{Im}\,\alpha_2<0$, соответствуют обычным поверхностным волнам. При деформации контура интегрирования в (3) в нижнюю полуплоскость из интеграла выделяется вычет, определяемый полюсом, расположенным в нижней полуплоскости (α_2) и соответствующим собственной комплексной волне. Поле этой волны, имея распространяющийся в направлении r характер, экспоненциально убывает при $r\to\infty$. Существование такой волны можно объяснить распределенным разворотом плотности потока мощности. При деформации контура интегрирования в верхнюю полуплоскость из интеграла выделяется член, соответствующий несобственной комплексной волне, поле которой при $r\to\infty$ экспоненциально стремится к бесконечности. Выделение такой волны имеет физический смысл [1] лишь вблизи волновода. При удалении от поверхности диэлектрического волновода такую волну необходимо рассматривать совместно с волнами непрерывного спектра, оставшимися в (3) под интегралом. Только их совместное рассмотрение обеспечивает выполнение граничного условия на бесконечности.

Если с самого начала поле, возбуждаемое источниками $\vec{j}^{\,e}$ и $\vec{j}^{\,m}$, записать в виде

$$\vec{E}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}A_{\pm mn}\vec{\Phi}\left(\psi_{mn}^{e};\psi_{mn}^{m}\right)e^{-i\beta_{\pm mn}z}+\int_{0}^{\infty}A_{\pm}(\alpha)\vec{\Phi}\left[\psi^{e}(\alpha);\psi^{m}(\alpha)\right]e^{-i\beta_{\pm}(\alpha)z}d\alpha\right\}, \tag{7}$$

выделив тем самым собственные волны дискретного спектра (первое слагаемое в фигурных скобках), то деформация контура интегрирования в нижнюю полуплоскость (α_2) (во втором слагаемом в фигурных скобках) приведет к появлению дополнительных собственных волн дискретного спектра с амплитудами $\left(-A_{\pm mn}\right)$. Это легко можно установить, прослеживая весь процесс составления дисперсионного уравнения и образования функции (6). В разложении (7) собственные волны с амплитудами $\pm A_{\pm mn}$ уничтожат друг друга. Это подчеркивает тот факт, что запись (3) совместно с формулами (5), (6) является полным представлением поля.

В (7) индекс *n* соответствует номеру цилиндрических функций (определяет азимутальную зависимость поля), индекс *m* – порядковый номер корня дисперсионного уравнения; $A_{\pm}$ – амплитуды прямой и обратной волн; функция $\vec{\Phi}$ связывает электрическое поле с потенциальными функциями.

Подтвердим частным примером принципиальную возможность существования собственных и несобственных комплексных волн в рассматриваемой направляющей системе.

Для случая $\left|\alpha_{1,2}a\right| >> 1$ дисперсионное уравнение волны с индексом *n*=1 [5-7] можно записать в виде

$$tg\left(\alpha_1 a - \frac{3}{4}\pi\right) = i\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\beta^2\left(\alpha_2^2 - \alpha_1^2\right)^2}{\varepsilon_1\varpi_1\omega^2 a^2\alpha_1^4\alpha_2^2}}\right]. \quad (8)$$

После разделения в (8) действительной и мнимой частей в приближении малости последнего слагаемого под радикалом получаем систему двух трансцендентных уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{sh(2\delta_1 a)}{\sin 2\left(\gamma_1 a - \frac{3}{4}\pi\right)} = \frac{\gamma_1\gamma_2 + \delta_1\delta_2}{\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1}; \\ \frac{1}{2}\frac{\sin 2\left(\gamma_1 a - \frac{3}{4}\pi\right)}{ch^2(\delta_1 a) - \sin^2\left(\gamma_1 a - \frac{3}{4}\pi\right)} = p\left(\pm q_1 + q_2\right); \end{gathered} \quad (9)$$

где $\alpha_{1,2} = \gamma_{1,2} + i\delta_{1,2}$; $p = \dfrac{\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2}{\gamma_2^2 + \delta_2^2}$; $q_1 = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1} - \dfrac{(\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_2\mu_1)^2}{4(\varepsilon_1\mu_1)^2}}$; $q_1 = \dfrac{\varepsilon_1\mu_2 + \varepsilon_2\mu_1}{2\varepsilon_1\mu_1}$.

Учитывая условие $\left|\alpha_{1,2}a\right| >> 1$, берем $\gamma_1 a - \frac{3}{4}\pi = \pi\nu$, где $\nu >> 1$, откуда $\gamma_1 = \frac{\pi}{a}\left(\nu + \frac{3}{4}\right)$.

Поскольку поперечные волновые числа удовлетворяют соотношению $\gamma_1\delta_1 = \gamma_2\delta_2$, нетрудно показать, что выбранное γ_1 и $\gamma_2 = \gamma_1$; $\delta_1 = \delta_2$ удовлетворяют системе (9). При найденном решении системы (9) $\alpha_1 = \alpha_2$. Отсюда следует, что в рассмотренном частном случае система (9) является точным представлением дисперсионного уравнения (8).

Таким образом, показали принципиальную возможность существования комплексных волн в рассматриваемой системе. Нетрудно убедиться, что в найденном решении может быть как $\delta_{1,2} > 0$, так и $\delta_{1,2} < 0$. При этом отрицательные $\delta_{1,2}$ соответствуют собственной комплексной волне, положительные – несобственной.

В работе [1] подробно рассмотрен вопрос ортогональности комплексных волн в двумерном слоистом волноводе. С помощью простых, но достаточно громоздких преобразований можно показать, что в рассматриваемой системе гибридные комплексные волны удовлетворяют условию ортогональности в виде

$$\int_{S_p}\left\{\left[\vec{E}_0(\alpha)\vec{H}_0(\alpha')\right] - \left[\vec{E}_0(\alpha')\vec{H}_0(\alpha)\right]\right\}d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha \neq \alpha', \\ \dfrac{N(\alpha_1,\alpha_2)}{R(\alpha_1,\alpha_2)} & \text{при } \alpha = \alpha', \end{cases} \quad (10)$$

где $\vec{E} = \vec{E}_0(r,\varphi)e^{-i\beta(\alpha)z}$; $\vec{H} = \vec{H}_0(r,\varphi)e^{-i\beta(\alpha)z}$; S_p – произвольное поперечное сечение $r \in [0 \div \infty)$. Выполнение условия ортогональности (10) позволило решить задачу о возбуждении, то есть найти спектральную амплитуду (5).

Библиографический список

1. **Шевченко, В.В.** Плавные переходы в открытых волноводах / В.В. Шевченко. – М.: Наука. – 1969.
2. **Tamir, F.** Fhe spectrum of electromagnetic waves guides by a plasma layer / F. Famir**,** A.A. Oliner / PIEEE. 1963. V.51. №2. P. 317 .
3. **Кондратьев, И.Г.** Двухмерные электромагнитные поля, направляемые плазменными слоями / И.Г. Кондратьев, М.А. Миллер // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7. №1. С. 124–134.
4. **Кондратьев, И.Г.** О структуре поля внутри плазменного слоя с нулевой проницаемостью / И.Г. Кондратьев, М.А. Миллер // Изв. вузов. Радиофизика. 1964. Т. 7. №1. С. 176–179.
5. **Веселов, Г.И.** Слоистые металло-диэлектрические волноводы / Г.И. Веселов, С.Б. Раевский. – М.: Радио и связь, 1988. – 248 с.
6. **Раевский, А.С.** Неоднородные направляющие структуры, описываемые несамосопряженными операторами / А.С. Раевский, С.Б. Раевский. – М.: Радиотехника, 2014. – 110 с.
7. **Раевский, А.С.** Комплексные волны / А.С. Раевский, С.Б. Раевский. – М.: Радиотехника, 2010. – 223 с.

Дата поступления
в редакцию 05.02.2015

V.F. Barinova, N.A. Novoselova, L.G. Rudoyasova

ELECTROMAGNETIC WAVES IN A CIRCULAR ISOTROPIC DIELECTRIC WAVEGUIDE

The Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Purpose: Consider the full range of hybrid waves propagating along a circular dielectric waveguide. To show the existence of such a rail system, proper and improper complex wave.

Methodology/approach: In this paper, a common position is an attempt to examine the spectral composition of the hybrid waves propagating along a circular dielectric waveguide.

Findings: Hybrid wave field in such a system is described by the longitudinal components of both the Hertz vectors that satisfy the Helmholtz equation and the boundedness condition at infinity. On the dielectric surface, the condition of continuity of the tangential field components. Radial dependence of the field inside the dielectric waveguide is described by Bessel functions outside the waveguide - Hankel functions of the second kind.

With this choice of the radial dependence of the transverse wave number in the second field can take on any real value, which corresponds to the waves of the continuous spectrum, the imaginary negative, which corresponds to the usual surface waves and complex values, which correspond to proper and improper complex waves.

Originality/value: The paper describes how to orthogonal complex waves in two-dimensional layered waveguide. With simple, but quite cumbersome transformations shown that in this system the complex hybrid waves satisfy the orthogonality condition. Implementation of the orthogonality conditions allowed us to solve the problem of the excitation, is to find the spectral amplitude.

Key words: dielectric waveguide, complex wave, dispersion equation.