

УДК 539.41

А.И. Уваров

**ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА
НА ПРИМЕНИМОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ЛИНЕЙНЫХ РАСЧЁТНЫХ СХЕМ
ДЛЯ ПЛАСТИН, НАГРУЖЕННЫХ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКОЙ**

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

С использованием метода Ритца разработана аналитическая модель деформирования, получено решение задачи об изгибе длинной пластины с несмещаемыми кромками под действием поперечной нагрузки с учётом геометрической нелинейности. Комбинация данной модели решения с условием прочности по суммарным напряжениям позволила провести анализ влияния механических характеристик материала пластины на уровень цепных напряжений и указать значения нагрузки, при которых этот уровень низок в зависимости от механических характеристик материала пластины.

Ключевые слова: изгиб пластин, большие прогибы, механические характеристики материала.

Введение

Тонкие пластины в строительной механике принято разделять на жёсткие пластины и пластины конечной жёсткости, в которых вследствие изгиба возникают цепные напряжения [1, 2, 3]. Для расчёта пластин конечной жёсткости используется система нелинейных дифференциальных уравнений Кармана, для расчёта жёстких пластин – линейное дифференциальное уравнение [1]. Предложен геометрический критерий разграничения: если для данной пластины стрелка прогиба превышает четверть толщины, то пластину следует отнести к пластине конечной жёсткости [1]. Данный критерий не учитывает наличие препятствия сближению кромок (распор) и не связан с механическими характеристиками материала пластины. Если распор отсутствует, и нет препятствий к сближению кромок, то, очевидно, цепные деформации и усилия малы.

С другой стороны, если нагрузка достаточно велика, то толщина пластины, определяемая из условия прочности, также достаточно велика, а стрелка прогиба достаточно мала по сравнению с расчётной толщиной пластины, что приведёт к малому уровню цепных напряжений, даже если будет обеспечен абсолютно жёсткий распор.

Цель настоящей работы – анализ влияния механических характеристик материала на применимость расчётных схем, учитывающих большие прогибы для пластин, нагруженных поперечной нагрузкой. Для проведения анализа с учётом геометрической нелинейности разработана аналитическая модель пластины, гнущейся по цилиндрической поверхности. Относительное удлинение срединной поверхности, вызванное поворотом элементов срединной поверхности при изгибе, учтено посредством разложения в ряд Маклорена с удержанием первых трёх членов ряда, а именно относительное удлинение считается равным половине квадрата угла поворота. Данное приближение соответствует принятому при выводе уравнений Кармана и даёт достаточно высокую точность при углах поворота до 15° , что вполне достаточно для пластин из металлических сплавов в пределах упругости.

Вывод искомых зависимостей

Рассмотрим свободно опертую балку-полоску длиной l (в составе пластины толщиной h , гнущейся по цилиндрической поверхности) под действием равномерно распределённой нагрузки q (давление). Будем полагать, что горизонтальное смещение опор исключено.

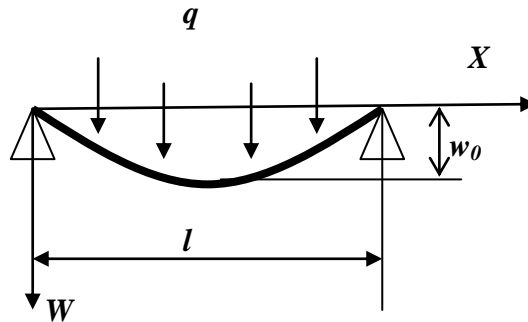


Рис. 1. Расчётная схема балки-полоски

Предположим, что форма изогнутой оси балки-полоски полуволна синусоиды:

$$w = w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \tag{1}$$

где x – продольная координата; w – вертикальное перемещение; w_0 – стрелка прогиба. Принятая форма изогнутой поверхности достаточно хорошо аппроксимирует (с точностью до 0,4%) точное решение для жёсткой пластины [4].

Используем метод Ритца. Потенциальная энергия изгиба и растяжения балки-полоски:

$$\Pi = \Pi_{изг} + \Pi_{раст} = \frac{1}{2} \int_0^l D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{Eh}{(1-\nu^2)} (\varepsilon)^2 dx, \tag{2}$$

где цилиндрическая жесткость:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \tag{3}$$

E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

Будем полагать, что относительное удлинение всех элементов оси балки-полоски одинаково и вычислим его величину как среднюю, вызванную поворотом элементов, следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx. \tag{4}$$

Подставляя (1) в (3) и выполняя интегрирование, найдём:

$$\varepsilon = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{w_0 \pi}{l} \right)^2 \cos^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{w_0}{l} \right)^2. \tag{5}$$

Подставляя выражение для прогиба (1) и относительного удлинения срединной поверхности пластины (5) в формулу (2), получим выражение для потенциальной энергии балки-полоски:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l D \left(\frac{w_0 \pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right)^2 dx + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\pi^2}{4} \left(\frac{w_0}{l} \right)^2 \right)^2 l. \tag{6}$$

Силовая функция внешних сил [4]:

$$U = \int_0^l q w(x) dx = \int_0^l q w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx. \tag{7}$$

Основное уравнение метода Ритца (равенство нулю производной от полной энергии тела по параметру перемещения):

$$\frac{\partial(\Pi - U)}{\partial w_0} = 0. \quad (8)$$

Подставляя в (8) выражения (6) и (7) и выполняя интегрирование, получим

$$D \frac{l}{2} \frac{w_0 \pi^2}{l^2} + \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \frac{\pi^4}{16l^3} \cdot 4w_0^3 - 2 \frac{ql}{\pi} = 0. \quad (9)$$

После подстановки соотношения (3), уравнение (9) примет вид:

$$w_0^3 \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \frac{\pi^4}{16l^3} \cdot 4 + w_0 \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{l}{2} \frac{\pi^2}{l^2} - 2 \frac{ql}{\pi} = 0. \quad (10)$$

Разделив левую и правую части (10) на множитель при w_0^3 и h^4 , получим

$$\left(\frac{w_0}{h}\right)^3 + \frac{1}{3} \frac{w_0}{h} - \frac{16(1-\nu^2)}{\pi^5} \frac{q}{E} \left(\frac{l}{h}\right)^4 = 0. \quad (11)$$

Введём обозначения:

$\bar{w} = \frac{w_0}{h}$ – относительная стрелка прогиба (отношение стрелки прогиба к толщине пластины);

$\bar{l} = \frac{l}{h}$ – относительная ширина пластины (отношение ширины к толщине пластины);

$\bar{q} = \frac{q}{E}$ – относительное давление (отношение давления к модулю Юнга).

Тогда для $\nu = 0,3$ уравнение (11) можно записать в виде

$$\bar{w}^3 + \frac{1}{3} \bar{w} - 0,0475786 \bar{q} \bar{l}^4 = 0. \quad (12)$$

Условием прочности будем считать равенство суммы изгибных и цепных напряжений пределу текучести:

$$\sigma_{II} + \sigma_{II} = \sigma_T. \quad (13)$$

Максимальные изгибные напряжения для принятой аппроксимации прогибов равны:

$$\sigma_{II} = \frac{h}{2} \frac{E}{(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{\max} = \frac{h}{2} \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\pi^2}{l^2} w_0. \quad (14)$$

Цепные напряжения:

$$\sigma_{II} = \frac{E \varepsilon}{(1-\nu^2)} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{w_0}{l} \right)^2. \quad (15)$$

Подставляя выражения (14) и (15) в уравнение (13), получим

$$\frac{h}{2} \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\pi^2}{l^2} w_0 + \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{w_0}{l} \right)^2 = \sigma_T. \quad (16)$$

Введём обозначение:

$\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E}$ – относительное удлинение, соответствующее пределу текучести.

Разделив левую и правую части (16) на множитель при w_0^2 и h^2 , с учётом принятых обозначений получим

$$\bar{w}^2 + 2\bar{w} - \frac{4(1-\nu^2)}{\pi^2} \cdot \varepsilon_T \cdot \bar{l}^2 = 0. \quad (17)$$

Для $\nu = 0,3$ уравнение (17) примет вид

$$\bar{w}^2 + 2\bar{w} - 0,368809 \varepsilon_T \bar{l}^2 = 0. \quad (18)$$

Как известно, уравнение метода Ритца есть аналог условия равновесия [4]. Одновременное выполнение равенств (12) и (18) (т. е. условий равновесия и прочности) можно считать необходимым условием решения задачи назначения размеров элемента конструкции, для которого в качестве расчетной схемы используется балка-полоска. Для решения данной инженерной задачи необходимо совместное решение уравнений (12) и (18) как системы из двух нелинейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}^3 + \frac{1}{3}\bar{w} - 0,0475786 \bar{q} \bar{l}^4 &= 0, \\ \bar{w}^2 + 2\bar{w} - 0,368809 \varepsilon_T \bar{l}^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Считая заданными силовые параметры \bar{q} и ε_T , т.е. нагрузку и механические свойства материала, решая систему (19), находим геометрические параметры \bar{l} и \bar{w} – толщину пластины и стрелку прогиба.

Система (19) соответствует отсутствию сближения кромок пластины, т.е. абсолютно жёсткому распору. Если распор отсутствует и кромки пластины имеют возможность свободно сближаться, то цепные деформации и напряжения равны нулю. Тогда в уравнении (12) будет отсутствовать \bar{w}^3 и оно примет вид:

$$\bar{w} = 0,142736 \bar{q} \bar{l}^4. \quad (20)$$

В уравнении (18) будет отсутствовать \bar{w}^2 и оно примет вид:

$$\bar{w} = 0,184405 \varepsilon_T \bar{l}^2. \quad (21)$$

Приравнивая правые части (20) и (21), находим

$$\bar{l} = \sqrt{\frac{1,29193 \varepsilon_T}{\bar{q}}}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (20), получим

$$\bar{w} = 0,23237 \frac{\varepsilon_T^2}{\bar{q}}. \quad (23)$$

Таким образом, система (19) содержит учёт геометрической нелинейности и соответствует пластинам большого прогиба, а формулы (22) и (23) есть линейные решения и описывают поведение пластин малого прогиба или жёстких пластин.

Анализ результатов расчётов по полученным зависимостям

Сопоставим результаты решения системы (19) (нелинейное решение) и расчёты по формулам (22) и (23) (линейное решение). На приведённых далее графиках представлены результаты расчётов для сталей с пределом текучести 235 МПа и 390 МПа с модулем Юнга $2 \cdot 10^5$ МПа (рис. 2) и алюминиевых сплавов с пределом текучести 80 МПа и 175 МПа с модулем Юнга $0,7 \cdot 10^5$ МПа (рис. 3).

На данных графиках видно, что для каждого материала имеется некоторая величина давления, выше которой результаты расчётов по линейному и нелинейному решениям совпадают. Эта величина зависит от предела текучести и растёт с его увеличением. Для сталей с пределом текучести 235 МПа и 390 МПа эта величина равна ориентировочно 0,175 МПа и 0,5 МПа, а для алюминиевых сплавов с пределом текучести 80 МПа и 175 МПа – 0,06 МПа и 0,25 МПа соответственно. Следует отметить, что принятая форма прогиба (1) отличается от точного линейного решения всего на 0,4% [4], что даёт основание полагать, что граница линейного и нелинейного решений определена достаточно точно. Очевидно, что если распор не

является абсолютно жёстким, то данные величины давления будут меньше. При введении в условие прочности коэффициента запаса данные величины также уменьшаются.

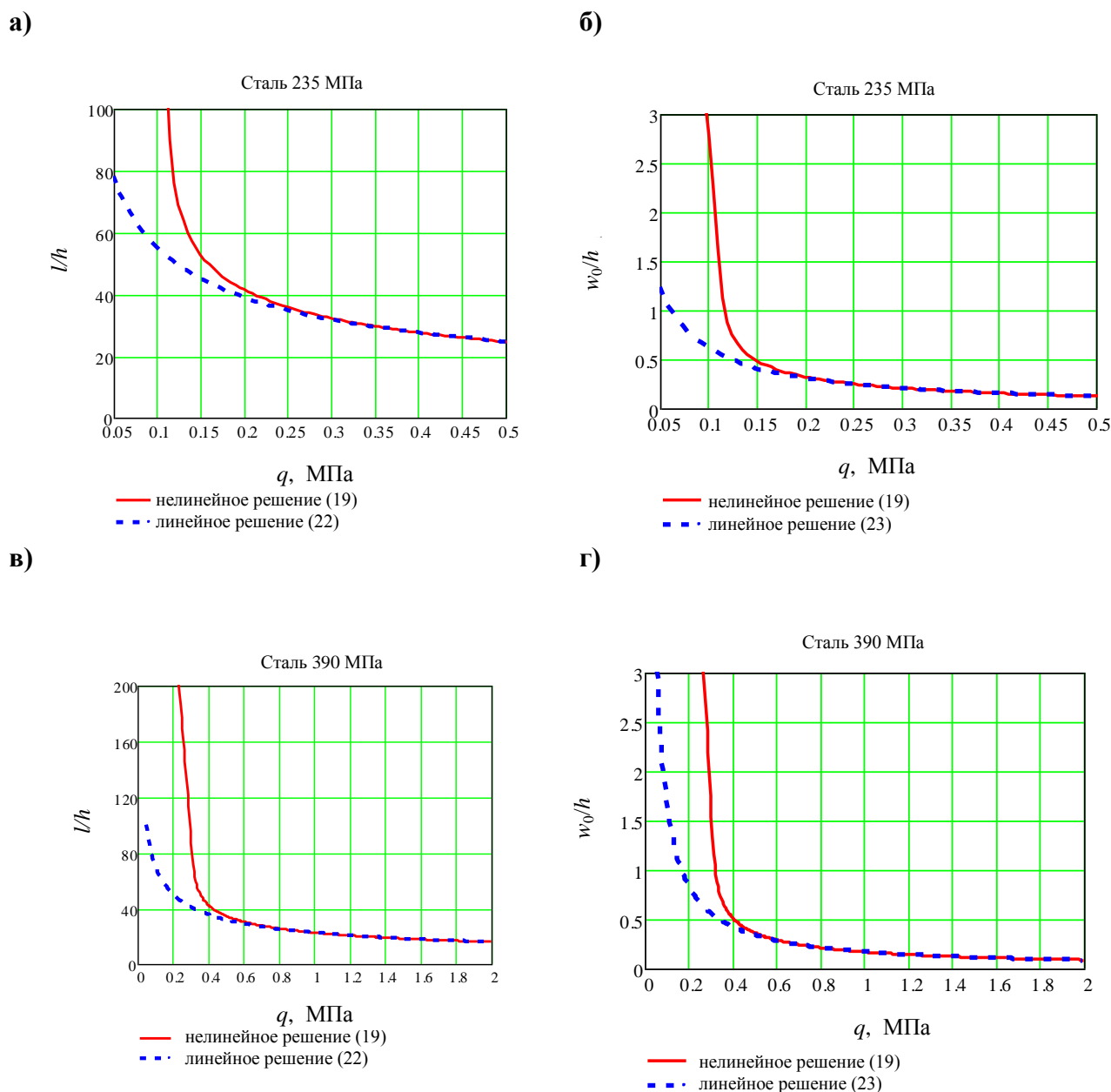


Рис. 2. Относительная ширина пластины и относительная стрелка прогиба для стали с пределом текучести 235МПа (а, б), и 390МПа (в, г)

Принятые в приведённых расчётах значения пределов текучести соответствуют наибольшим и наименьшим приведённым в таблицах Регистра [5].

Данные значения давления превышают типичные значения расчётных нагрузок для пластин судового корпуса речных судов, однако могут встречаться в морском судостроении и некоторых элементах конструкции подводных лодок и аппаратов.

Для всех материалов заметное расхождение результатов линейного и нелинейного решений начинается при превышении стрелкой прогиба примерно одной трети толщины, что практически не сильно отличается от известного критерия четверть толщины [1]. На приведённом далее графике (рис. 4), построенном по результатам нелинейного решения, показано изменение относительной стрелки прогиба в зависимости от предела текучести стали при фиксированном давлении.

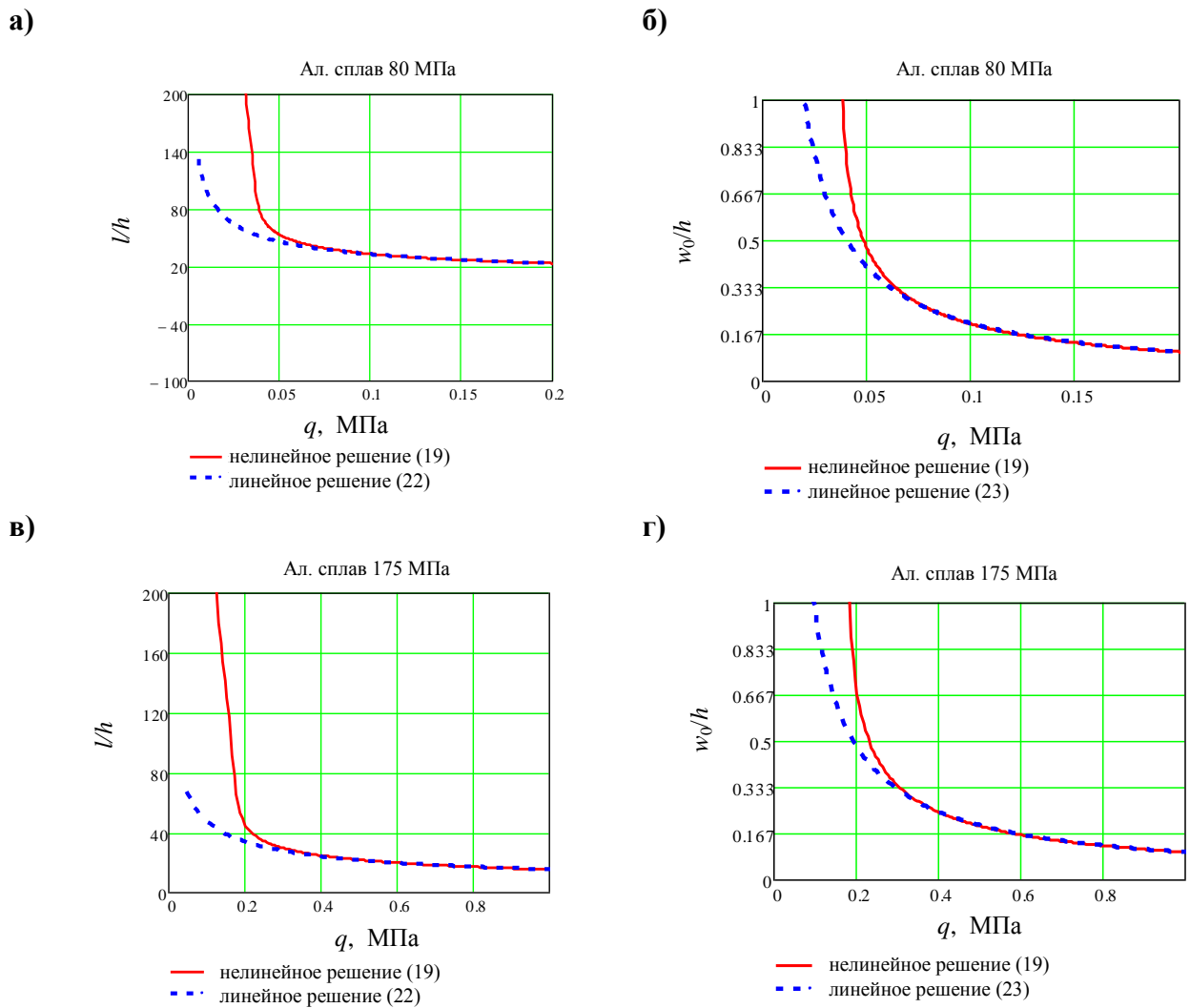


Рис. 3. Относительная ширина пластины и относительная стрелка прогиба для алюминиевого сплава с пределом текучести 80МПа (а, б) и 175МПа (в, г)

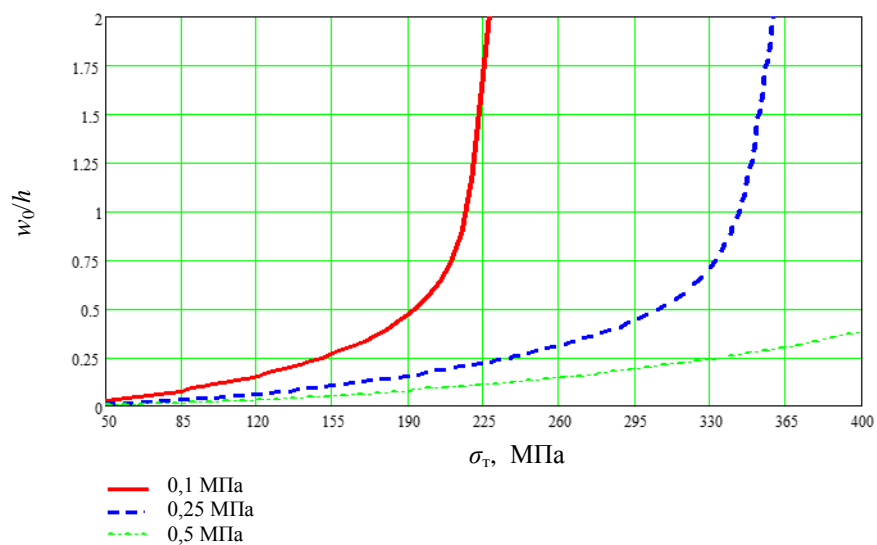


Рис. 4. Относительная стрелка прогиба в зависимости от предела текучести стали для фиксированного давления

Из рассмотрения данных графиков следует, что если основываться на критерии «четверть толщины», то вне зависимости от распора линейное поведение пластин будет иметь место: для давления 0,1 МПа – для предела текучести меньше 155 МПа, для давления 0,25 МПа – для предела текучести меньше 230 МПа, для давления 0,5 МПа – для предела текучести меньше 330 МПа.

Выводы

Получены зависимости, учитывающие влияние механических характеристик материала на характер деформирования длинной пластины при действии поперечной нагрузки. На основании расчётов по разработанной расчётной схеме, учитывающей геометрическую нелинейность, установлены величины давлений, при которых для материалов с заданными механическими характеристиками может быть использована расчётная схема пластины малого прогиба. Геометрическому критерию относительной стрелки прогиба поставлены в соответствие значения величины поперечной нагрузки.

Библиографический список

1. Справочник по строительной механике корабля: в 3 т. Т. 2: Пластины. Теория упругости, пластичности и ползучести. Численные методы / Г.В. Бойцов [и др.]. – Л.: Судостроение, 1982. – 462 с.
2. Прочность судов внутреннего плавания: справочник / В.В. Давыдов [и др.]. – М.: Транспорт, 1978. – 520 с.
3. **Вайнберг, Д.В.** Расчёт пластин / Д.В. Вайнберг, Е.Д. Вайнберг. – Киев: Будевільник, 1970. – 436 с.
4. Строительная механика корабля и теория упругости: в 2 т. Т. 1 : Теория упругости и численные методы решения задач строительной механики корабля / Д.М. Ростовцев [и др.]. – Л.: Судостроение, 1980. – 288 с.
5. Российский Речной Регистр. Правила: в 4 т. Т. 2: Правила классификации и постройки судов внутреннего плавания: ч. I. Корпус, ч. V. Материалы и сварка. – М., 2008. – 406 с.

*Дата поступления
в редакцию 02.06.2015*

A.I. Uvarov

THE INFLUENCE OF THE MECHANICAL CHARACTERISTICS OF THE MATERIAL ON THE APPLICABILITY OF THE GEOMETRICALLY LINEAR CALCULATION SCHEMES FOR PLATES LOADED BY TRANSVERSE LOADS

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Purpose: To find the limit of linear behavior of metallic plate under transverse load.

Method: The theory of plates with large deflection was used taking into account the membrane stresses. By the energy method, the solution for long plates was obtained. This decision combined with the condition of strength. The result was a system of two nonlinear equations. Given the properties of the material and the load is determined by the plate thickness and maximum deflection. The results of linear and nonlinear solutions were compared.

Findings: Set the value of the load that separates the linear and nonlinear behavior of elastic plates, depending on the material properties.

Conclusion: The obtained results indicate the range of use for more simple and reliable plates calculation schemes.

Key words: bending of plates, large deflections, the mechanical characteristics of the material.