

УДК 621.833

А.Н. Петровский<sup>1</sup>, С.В. Воронков<sup>2</sup>

### К ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ВНЕЦЕНТРОИДНОГО ЦИКЛОИДАЛЬНОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева<sup>1</sup>  
АО «Федеральный научно-производственный центр  
«Нижегородский научно-исследовательский институт радиотехники»<sup>2</sup>

Задача оптимизации поставлена как система условий существования и качества зацепления. Решение содержит формулы расчета независимых геометрических параметров, удовлетворяющих максимальному значению нагрузочной способности. Создана аналитическая система автоматического проектирования зацепления по передаточному числу и нагрузке. Решение задачи рассматривается как методика проектного расчета, параметризации и стандартизации внецентроидного циклоидального зацепления.

*Ключевые слова:* циклоидальное зацепление, удельная нагрузочная способность, параметрический анализ.

Внецентроидное циклоидальное зацепление широко применяется в зарубежной приводной технике. Зацепление отличается большими передаточными числами, высокой точностью, низкими уровнями шума и вибраций. Производители рекламируют относительно высокий КПД – до 0.95 и хорошую перегрузочную способность, которая по их данным до пяти раз превосходит передачи с эвольвентным зацеплением.

В отечественном машиностроении циклоидальное зацепление используется редко и ограничено мелкосерийным и единичным производством. Множество исследований не нашли воплощения в нормативном документе на расчет циклоидального зацепления, что является решающим фактором, ограничивающим его применяемость. Подробное описание зацепления и проектные рекомендации даны в монографиях [1–4].

Внедрение нового зацепления в серийные изделия связано с необходимостью убедительного обоснования замены. При этом важно установить не только превосходство нового технического решения, но и дать его количественную оценку. В работе [5] представлена универсальная методика анализа и обобщенной оценки совершенства механических передач, которая применяется для анализа и оптимизации зацеплений, передач и структуры механического привода. В качестве главного критерия качества используется показатель *удельной нагрузочной способности* зацепления в виде отношения допускаемого вращающего момента к характерному объему зацепления.

$$t = \frac{T_1}{V}, \quad (1)$$

где  $t$  – удельная нагрузочная способность зацепления, МПа;  $T_1$  – вращающий момент на шестерне, Нм;  $V$  – характерный объем зацепления, м<sup>3</sup>.

Для внешнего зацепления пары зубчатых колес характерный объем определен суммой начальных цилиндров сопряженных колес, для внутреннего – начальным цилиндром внешнего колеса.

Критерий удельной нагрузочной способности численно равен средней энергии упругой деформации, условно воспринимаемой единицей характерного объема на единичном угловом смещении шестерни. Критерий имеет универсальный характер и применяется для разнотипных зацеплений. Он определяется в виде (1) по техническим характеристикам изделия и в виде главной целевой функции от показателей прочности материалов зубчатой пары и безразмерных геометрических параметров:

$$t = q \frac{\gamma}{v} = q\tau, \quad (2)$$

где  $q$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$  – автономные целевые функции соответственно допускаемых напряжений (МПа), зацепления и структуры;  $\tau$  – целевая функция формы.

Сравнением расчетных значений по (1) и (2) выявляют резервы нагрузочной способности или необходимость снижения нагрузки.

Автономные целевые функции определены на непересекающихся множествах параметров и анализируются отдельно.

Функция  $q$  допускаемых напряжений содержит параметры механических свойств материалов зубчатых колес и ограничивающие их эмпирические коэффициенты.

Функция зацепления  $\gamma$  содержит безразмерные геометрические параметры, а функция структуры  $\nu$  – безразмерные параметры конструктивного исполнения передачи: передаточные числа, числа ступеней, числа потоков мощности, числа паразитных колес [5]. Отношение функций зацепления и структуры есть функция формы  $\tau$ , которая отражает влияние геометрических параметров на нагрузочную способность.

Анализ целевых функций и оптимизация параметров позволяют повысить нагрузочную способность зацеплений, сформировать их параметрические ряды и создать аналитические системы автоматического проектирования. В работах [5–7] методика анализа и обобщенной оценки совершенства механических передач применена к эвольвентному зацеплению и зацеплению М.Л. Новикова. Далее задача оптимизации геометрических параметров поставлена для внецентроидного циклоидального зацепления.

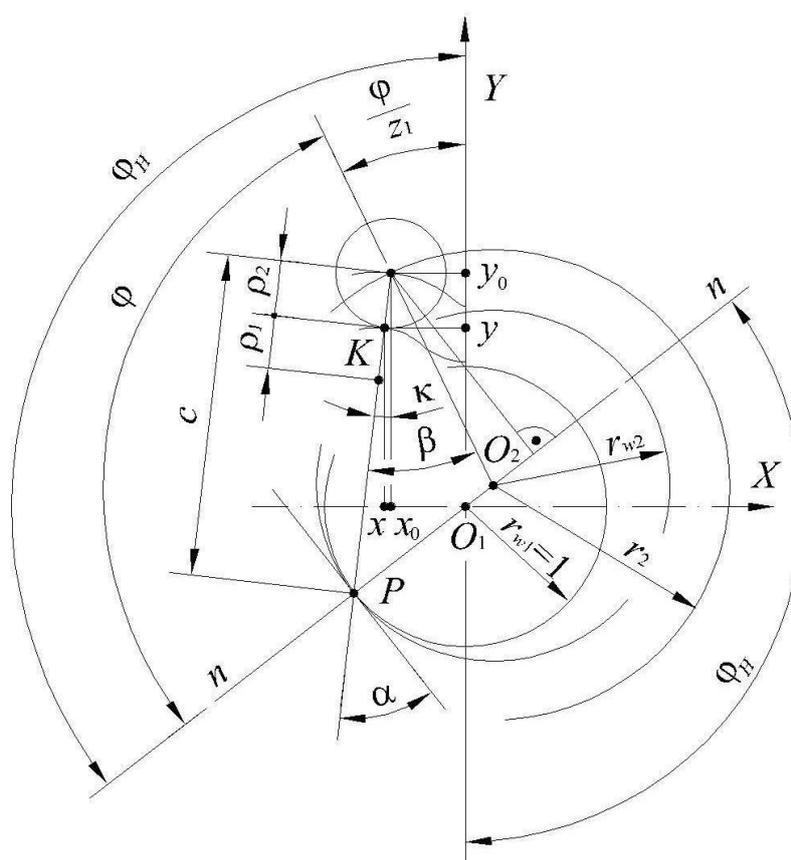


Рис. 1. Схема внецентроидного циклоидального зацепления

Схема внецентроидного циклоидального зацепления представлена в декартовых координатах  $XU$  на рис. 1, где  $1$  – индекс циклоидальной шестерни;  $2$  – индекс цевочного колеса;  $O_{1,2}$  – оси шестерни и колеса;  $O_1O_2$  – водило;  $r_{w1,2}$  – радиусы центров, м;  $r_2$  – радиус окружности центров цевок, м;  $\rho_1$  – радиус кривизны профиля циклоидальной шестерни,  $\rho_2$  –

радиус цевки;  $c$  – отрезок, соединяющий центр цевки и полюс  $P$  зацепления, м;  $z_{1,2}$  – соответственно числа выступов шестерни и цевок колеса;  $\alpha$  – угол зацепления;  $\beta$  – центральный угол цевки между полюсом и центром цевочного колеса;  $\kappa$  – угол между отрезком  $c$  и осью  $Y$ ;  $x_0, y_0$  – координаты центра цевки;  $x, y$  – координаты точки контакта  $K$ ;  $\varphi$  – полюсный угол, определенный как центральный угол колеса между центром цевки и полюсом зацепления;  $\Phi_H$  – угол поворота водила.

Передаточное число внецентроидного циклоидального зацепления при неподвижном водило определяется выражением:

$$u_H = \frac{r_{w2}}{r_{w1}} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (3)$$

Для выявления параметров зацепления в обобщающем безразмерном виде, радиус центроиды циклоидальной шестерни будем рассматривать как масштабный фактор:  $r_{w1}^* = 1$  [5–7], тогда радиус центроиды колеса:  $r_{w2}^* = u_H$ , а радиус окружности центров цевок:  $r_2^* = u_H l$ , где  $l$  – коэффициент внецентроидности [3]. Здесь и далее "\*" – индекс линейных величин в новом масштабе.

Профиль шестерни образуется качением центроиды колеса по центроиде шестерни. В движении обката центр цевки описывает удлиненную эпициклоиду, а окружность с радиусом цевки формирует ее эквидистанту. Колесо совершает сложное вращение вокруг осей  $O_1$  и  $O_2$ , которое сводится к вращению вокруг полюса  $P$ . Из равенства линейных скоростей точки  $O_2$  относительно оси  $O_1$  и полюса  $P$ , следует известное выражение для передаточного числа между водило и колесом при неподвижной шестерне:

$$u_{H2} = \frac{u_H}{u_H - 1} = z_2. \quad (4)$$

Из схемы зацепления, рис. 1, установим связь полюсного угла и угла поворота водила:

$$\varphi = \frac{\Phi_H}{u_H}. \quad (5)$$

При повороте водила на угол  $\Phi_H$ , центр цевки повернется на угол  $\Phi / z_1$ .

Цикл формирования одного выступа шестерни соответствует периоду изменения угла  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , а цикл передачи выступом нагрузки соответствует периоду изменения  $\varphi$  от 0 до  $\pi$ . Кроме того, полюсный угол  $\varphi$  есть угловая координата центра цевки относительно полюса  $P$  и необходим для анализа распределения нагрузки в многопарном зацеплении. С учетом этих особенностей зацепления полюсный угол  $\varphi$  выбран главной независимой переменной в уравнениях профиля и целевых функциях.

Используя обозначения рис. 1, и учитывая масштабный фактор, получим соотношения, необходимые для вывода уравнения профиля циклоидальной шестерни:

$$c^* = u_H \sqrt{1 + l^2 - 2l \cos \varphi}, \quad (6)$$

$$\sin \alpha = \frac{l \cos \varphi - 1}{\sqrt{1 + l^2 - 2l \cos \varphi}}, \quad (7)$$

$$\cos \alpha = \frac{l \sin \varphi}{\sqrt{1 + l^2 - 2l \cos \varphi}}, \quad (8)$$

$$\beta = \arcsin \frac{\cos \alpha}{l}, \quad (9)$$

$$\kappa = \arcsin \frac{\cos \alpha}{l} - \frac{\varphi}{z_1} \quad (10)$$

и само уравнение в безразмерном параметрическом виде:

$$x^* = \frac{1}{z_1} \left( \sin \frac{z_2}{z_1} \varphi - z_2 l \sin \frac{\varphi}{z_1} \right) - \rho_2^* \sin \kappa, \quad (11)$$

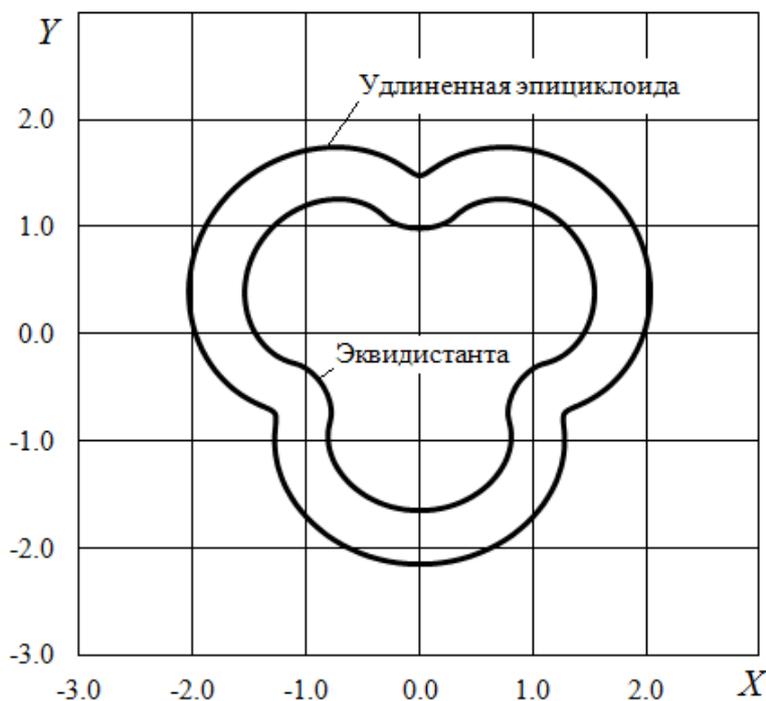
$$y^* = -\frac{1}{z_1} \left( \cos \frac{z_2}{z_1} \varphi - z_2 l \cos \frac{\varphi}{z_1} \right) - \rho_2^* \cos \kappa. \quad (12)$$

Уравнение удлиненной эпициклоиды получим из уравнений (11), (12) исключением слагаемых, содержащих радиус цевки  $\rho_2^*$ :

$$x_0^* = \frac{1}{z_1} \left( \sin \frac{z_2}{z_1} \varphi - z_2 l \sin \frac{\varphi}{z_1} \right), \quad (13)$$

$$y_0^* = -\frac{1}{z_1} \left( \cos \frac{z_2}{z_1} \varphi - z_2 l \cos \frac{\varphi}{z_1} \right). \quad (14)$$

Удлиненная эпициклоида и ее эквидистанта для шестерни с тремя выступами показаны на рис. 2. Кривые построены посредством электронных таблиц как графики параметрических уравнений (11), (12) и (13), (14).



**Рис. 2. Графики параметрических уравнений удлиненной эпициклоиды и ее эквидистанты для  $z_1 = 3$**

Параметрическое уравнение профиля шестерни содержит пять независимых безразмерных параметров:  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $\varphi$ ,  $l$ ,  $\rho_2^*$ . Независимые параметры связаны условиями существования и качества зацепления. Если условия сформулировать в виде системы совместных уравнений и ограничений, которых достаточно для определения всех параметров, то задача оптимизации будет иметь единственное решение.

В качестве главного критерия качества зацепления будем рассматривать удельную нагрузочную способность по контактным напряжениям. Воспользуемся решением Г. Герца для контакта двух упругих цилиндров с параллельными осями [9]:

$$\sigma_H = Z_E \sqrt{\frac{f}{\rho}}, \quad (15)$$

$$Z_E = \pi^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

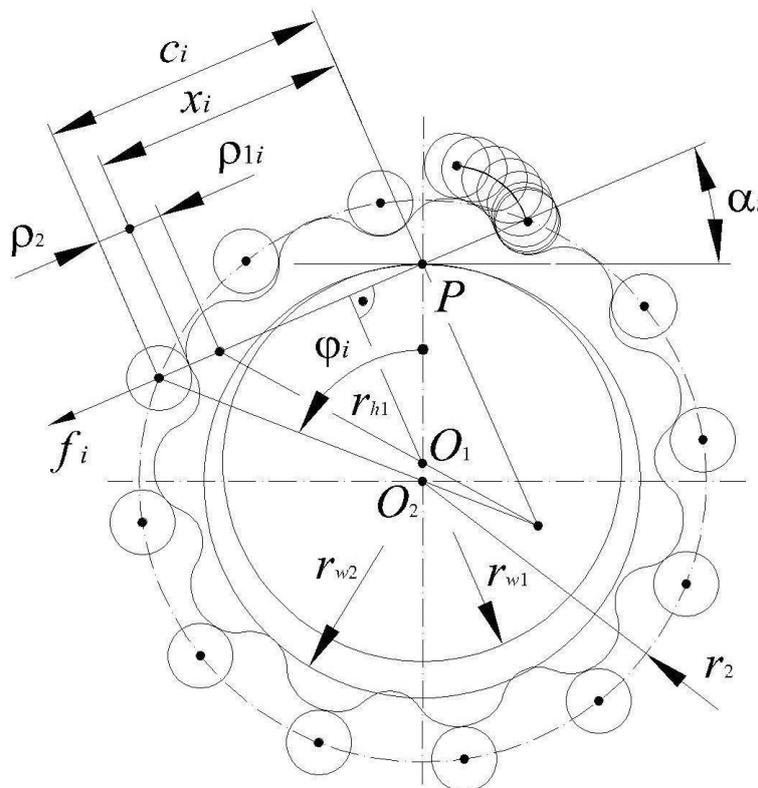
$$\rho = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad (17)$$

где  $\sigma_H$  – контактное напряжение, МПа,  $Z_E$  – коэффициент, учитывающий механические свойства материалов колес, МПа<sup>0,5</sup>;  $E_{1,2}$  – модули упругости материалов цевки и шестерни, МПа;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $f$  – составляющая нагрузки, распределенная по начальной линии контакта, Н/м;  $\rho$  – приведенный радиус кривизны сопрягаемых профилей, м.

При известных радиусах центров и цевки радиус кривизны профиля циклоидальной шестерни удобно определить геометрически построением Бобилье, рис.3, или аналитически из уравнения Эйлера и Савари [1]:

$$\frac{1}{r_{w1}} - \frac{1}{r_{w2}} = \left( \frac{1}{\rho_2 + x} + \frac{1}{\rho_1 - x} \right) \sin \alpha, \quad (18)$$

где  $x$  – расстояние от полюса до точки контакта, м.



**Рис. 3. Схема внецентроидного циклоидального зацепления к выводу и анализу целевых функций**

Из схемы зацепления на рис. 3, и соотношений (3), (6), (18) получим:

$$\rho_1 = \rho_0 - \rho_2, \quad (19)$$

$$\rho_0 = \frac{r_{w1}c^{*2}}{c^* - z_2 \sin \alpha}, \quad (20)$$

где  $\rho_0$  – радиус кривизны удлиненной эпициклоиды, м.

Приводной момент на шестерне определим как сумму моментов от составляющих нагрузок в каждом из  $n$  мест контакта:

$$T_1 = \sum_{i=1}^n f_i r_{1w} b_w \cos \alpha_i, \quad (21)$$

где  $i$  – порядковый номер места контакта в отсчете от полюса зацепления,  $b_w$  – ширина циклоидальной шестерни, м.

Выражая составляющую распределенной нагрузки из (15), получим:

$$f_i = \frac{\sigma_{Hi}^2}{Z_E^2} \rho_i, \quad (22)$$

$$T_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_{Hi}^2}{Z_E^2} \rho_i r_{1w} b_w \cos \alpha_i. \quad (23)$$

В месте с максимальным контактным напряжением назначим его допустимое значение:

$$[\sigma_H]^2 = \frac{\sigma_{H \lim}^2}{K_H S_H^2}, \quad (24)$$

где:  $\sigma_{H \lim}$  – предел контактной выносливости материала,  $K_H$  и  $S_H$  – сводные коэффициенты нагрузки и безопасности, см. ГОСТ 21354-87.

Момент от составляющей нагрузки в месте с максимальным контактным напряжением определим выражением:

$$T_{1\sigma} = \frac{\sigma_{H \lim}^2}{K_H S_H^2 Z_E^{*2}} r_{w1} b_w \rho_\sigma \cos \alpha_\sigma, \quad (25)$$

где "σ" – индекс параметров в месте с максимальным контактным напряжением.

Если известна часть приводного момента, которая приходится на место с максимальным контактным напряжением, выражение (23) упрощается:

$$T_1 = \frac{\sigma_{H \lim}^2 r_{w1} b_w \rho_\sigma \cos \alpha_\sigma}{K_H S_H^2 Z_E^{*2} \chi_\sigma}. \quad (26)$$

где  $\chi_\sigma$  – часть приводного момента, воспринимаемая в месте с максимальным контактным напряжением.

Характерный объем циклоидального зацепления будем представлять объемом цилиндра, радиус которого равен радиусу  $lr_{w2}$  окружности центров цевок, а высота равна ширине  $b_w$  циклоидальной шестерни:

$$V = \pi l_H^2 l^2 r_{w1}^2 b_w. \quad (27)$$

Из (1), (26) и (27) с учетом введенного масштаба,  $r_{w1} = 1$ , следует *главная целевая функция*:

$$t = \frac{\sigma_{H \lim}^2}{Z_E^2 K_H S_H^2} \left( \frac{\rho_\sigma^* \cos \alpha_\sigma}{\pi l_H^2 l^2 \chi_\sigma} \right), \quad (28)$$

в которой выделим *функцию допустимых напряжений*:

$$q = \frac{\sigma_{H \lim}^2}{Z_E^2 K_H S_H^2}, \quad (29)$$

и функцию формы:

$$\tau = \frac{\rho_{\sigma}^* \cos \alpha_{\sigma}}{\pi u_H^2 l^2 \chi_{\sigma}}. \quad (30)$$

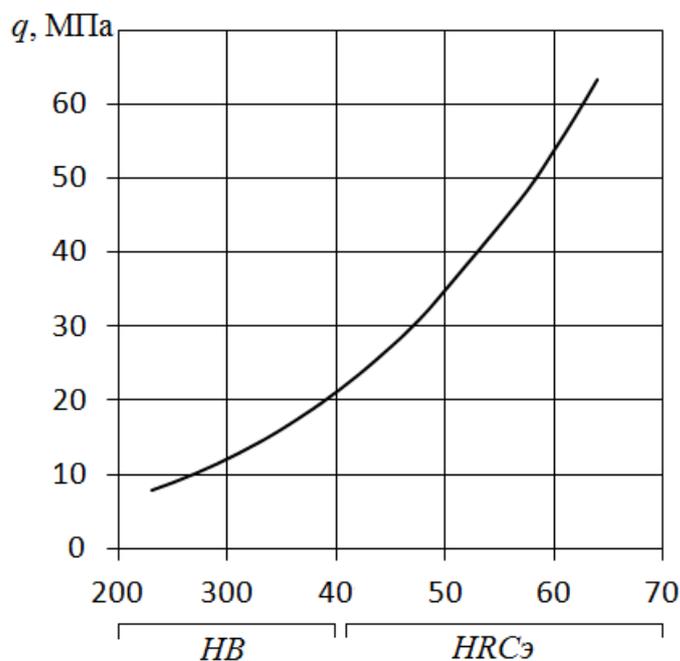
Для достижения максимальной нагрузочной способности зацепления необходимо установить значения независимых параметров, удовлетворяющие максимальному значению главной целевой функции (28). Ее максимум определяется как произведение максимумов автономных целевых функций (29) и (30), заданных на непересекающихся множествах.

Во внецентроидном циклоидальном зацеплении передаточное число совпадает с числом цевок колеса или выступов шестерни, что исключает представление функции формы в виде отношения функций зацепления и структуры, как это было сделано в анализе эвольвентного зацепления [6].

Анализ функции допускаемых напряжений (29) связан с экспертным выбором коэффициентов безопасности и нагрузки, что требует достоверных данных об условиях производства и эксплуатации. В этом случае можно воспользоваться рекомендациями и стандартами расчета на контактную прочность эвольвентного зацепления, например ГОСТ 21354-87. Однако анализ функции (29) целесообразно формализовать посредством вычисления ее значения для надежных серийных изделий и действующих образцов по формуле обратного расчета:

$$q = \frac{T_1 \chi_{\sigma}}{r_{w1}^2 b_w \rho_{\sigma}^* \cos \alpha_{\sigma}}, \quad (31)$$

полученной из (1), (26) и (27). В этом случае функция допускаемых напряжений рассчитывается по параметрам действующего зацепления и объективно отражает отраслевые требования к его надежности, а также технологические возможности производителя. Накопление значений функции  $q$  по серийным изделиям и опытным образцам позволяет наращивать ее значение за счет рационального снижения коэффициентов нагрузки и безопасности.



**Рис. 4. Зависимость функции допускаемых напряжений от твердости сопрягаемых поверхностей при  $S_{H1,2}=K_{H1,2}=1$**

Функции допускаемых напряжений для циклоидального и эвольвентного зацеплений совпадают [5, 6]. На диаграмме рис. 4 представлена зависимость функции допускаемых кон-

тактных напряжений стальных колес от твердости сопрягаемых поверхностей при  $S_{H1,2}=K_{H1,2}=1$ .

Функция формы (30) не содержит в явном виде независимых параметров:  $z_1, z_2, \varphi, l, \rho_2^*$ . Чтобы найти их значения, удовлетворяющие максимальному значению целевой функции, сформулируем условия существования и качества зацепления.

1. *Условие максимального передаточного числа.*

Большие передаточные числа – главное потребительское свойство циклоидального зацепления, которое определяет заказчик. Максимальное передаточное число получают при условии:

$$z_2 - z_1 = 1. \tag{32}$$

В этом случае число выступов шестерни и число цевок определены, а зацепление реализует следующие варианты передаточных чисел: от водила к цевочному колесу при неподвижной шестерне:  $u_{H1} = z_2$ ; от водила к циклоидальной шестерне при неподвижном колесе  $u_{H2} = -z_1$ ; и от циклоидальной шестерни к цевочному колесу при неподвижном водило:  $u_{H2} = z_2 / z_1$ . Таким образом, независимые параметры  $z_{1,2}$  в задаче оптимизации следует рассматривать как исходные ограничения заказчика.

2. *Условие существования сопрягаемого профиля циклоидальной шестерни.*

Сопрягаемый профиль циклоидальной шестерни формируется как эквидистанта удлиненной эпициклоиды на ее внутренней стороне посредством семейства окружностей с радиусом цевки  $\rho_2$ , рис. 1–3. Следовательно, радиус цевки не может превышать радиус кривизны эпициклоиды, а сопрягаемый профиль существует при условии:

$$\rho_2^* \leq k\rho_0^* = k \frac{c^{*2}}{c^* - z_2 \sin \alpha_\sigma}, \tag{33}$$

где  $k$  – независимый безразмерный параметр из интервала (0; 1), который определяет радиус цевки как часть радиуса кривизны удлиненной эпициклоиды.

3. *Условие максимума приведенного радиуса кривизны.*

С учетом (33) радиус кривизны профиля шестерни составит  $(1 - k)$  часть радиуса кривизны удлиненной эпициклоиды, а формула (17) для приведенного радиуса кривизны в месте с максимальным контактным напряжением примет вид:

$$\rho_\sigma^* = (k - k^2)\rho_{0\sigma}^*. \tag{34}$$

Выражение (34) содержит элементарную квадратичную функцию независимого параметра  $k$ , которая имеет максимум при  $k = 0.5$ . Последнее значение есть решение задачи оптимального деления радиуса кривизны удлиненной эпициклоиды между цевкой и сопрягаемым профилем:

$$\rho_{2\sigma}^* = \rho_{1\sigma}^* = 0.5\rho_{0\sigma}^*. \tag{35}$$

При таком выборе радиусов кривизны сопрягаемых профилей, приведенный радиус кривизны будет иметь максимальное значение:

$$\rho_\sigma^* = 0.25\rho_{0\sigma}^* \tag{36}$$

и обеспечит максимальное значение функции формы (30).

4. *Условие определения места с максимальным контактным напряжением.*

Максимальное контактное напряжение возникает на образующей рабочей поверхности циклоидальной шестерни с минимальным радиусом кривизны, где согласно (35), (36) радиус кривизны удлиненной эпициклоиды также должен иметь минимальное значение. Условие минимума радиуса кривизны эпициклоиды следует из равенства нулю первой производной функции (20):

$$\frac{d\rho_0^*}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{c^{*2}}{c^* - z_2 \sin \alpha} \right) = 0. \quad (37)$$

После дифференцирования получим полюсный угол для минимального радиуса кривизны профиля циклоидальной шестерни:

$$\varphi_\sigma = \arccos \frac{1 + 2z_1 - (z_1 - 1)l^2}{(z_1 + 2)l}. \quad (38)$$

Из (6) – (8), (38) и (20) получаем минимальный радиус кривизны эпициклоиды:

$$\rho_{0\sigma}^* = c_\sigma \frac{3}{z_1 + 2} = \frac{3(z_1 + 1)\sqrt{3z_1(l^2 - 1)}}{z_1(z_1 + 2)^{3/2}}, \quad (39)$$

и с учетом (35), (36) радиус цевки и минимальный радиус кривизны профиля шестерни:

$$\rho_{2\sigma}^* = \rho_{1\sigma}^* = \frac{3(z_1 + 1)\sqrt{3z_1(l^2 - 1)}}{2z_1(z_1 + 2)^{3/2}}, \quad (40)$$

минимальный приведенный радиус кривизны:

$$\rho_\sigma^* = \frac{3(z_1 + 1)\sqrt{3z_1(l^2 - 1)}}{4z_1(z_1 + 2)^{3/2}}. \quad (41)$$

##### 5. Условие максимума целевой функции зацепления по параметру $l$ .

Применив соотношения (8), (36) и (39), представим целевую функцию формы (30) в независимых параметрах:

$$\tau = \frac{3 \sin \varphi_\sigma}{4\pi u_H l \chi(z_1 + 2)}. \quad (42)$$

В месте с максимальным контактным напряжением функция зацепления теперь определена одним независимым переменным – коэффициентом внецентроидности  $l$ . Условие максимума функции (42) следует из равенства нулю ее первой производной:

$$\frac{d\tau}{dl} = \frac{d}{dl} \left( \frac{\sin \varphi_\sigma}{(z_1 + 2)l \chi_\sigma} \right) = 0. \quad (43)$$

После дифференцирования получим формулу для коэффициента внецентроидности, который удовлетворяет максимальному значению функции (42):

$$l_\sigma = \frac{(2z_1 + 1)\sqrt{2}}{\sqrt{(2z_1 + 1)^2 + (z_1 - 1)^2}}. \quad (44)$$

##### 6. Условие распределения нагрузки.

В определении части приводного момента  $\chi_\sigma$ , воспринимаемой в месте контакта с максимальным напряжением, необходимо учитывать статически-неопределимый характер распределения нагрузки между множеством пар цевок и выступов шестерни. Монография [2] содержит методику расчета составляющих нагрузки в зацеплении с цевками, установленными на осях с двумя опорами. Методика исходит из условия, что распределение нагрузки зависит от деформаций изгиба осей, а нелинейные контактные деформации исключает как малозначительные. Однако в современных конструкциях циклоидального зацепления часто используют цевки-ролики, установленные в пазах корпуса. В такой более жесткой конструкции составляющие нагрузки определяются контактными деформациями, что требует уточнения методики.

Воспользуемся формулами теории контактных деформаций [10] для двух упругих цилиндров с параллельными осями:

$$\delta_i = \frac{2f_i}{\pi} \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right) \ln \left( \frac{9\rho_{1i}\rho_{2i}}{b_{\delta i}^2} \right), \quad (45)$$

$$b_{\delta i} = 2 \sqrt{\left( \frac{1 - v_1^2}{E_1} + \frac{1 - v_2^2}{E_2} \right) f_i \frac{\rho_{1i} \rho_2}{\pi(\rho_{1i} + \rho_2)}}, \quad (46)$$

где  $\delta_i$  – деформация сближения тел в контакте;  $b_{\delta i}$  – полуширина полоски контакта.

Если при неподвижном цевочном колесе к циклоидальной шестерне приложить вращающий момент, то за счет деформаций она повернется на некоторый угол, а сближение в местах контакта можно выразить формулой:

$$\delta_i = r_{1hi} \Delta, \quad (47)$$

где  $\Delta$  – угол поворота шестерни одинаковый для всех мест контакта, рад.

Из соотношений (15) – (17), (22), (45) – (47) с учетом  $r_{w1}=1$  получим систему  $n$  уравнений вида:

$$\Delta = \frac{4\sigma_i^2 \rho_i^*}{\pi^2 Z_E^4 \cos \alpha_i} \ln \left( \frac{3\pi Z_E^2 \left( \frac{\rho_{0i}^*}{\rho_i^*} \right)^{\frac{1}{2}}}{2\sigma_i} \right). \quad (48)$$

Угол  $\Delta$  определим по параметрам места с максимальным напряжением контакта:

$$\Delta = \frac{\sigma_\sigma^2 \rho_{0\sigma}^*}{\pi^2 Z_E^4 \cos \alpha_\sigma} \ln \left( \frac{3\pi Z_E^2}{\sigma_\sigma} \right), \quad (49)$$

что позволит решить все уравнения системы относительно  $\sigma_i$  и получить из (23), (26) формулу и гистограмму, рис. 5, для части приводного момента, воспринимаемого в месте с максимальным контактным напряжением:

$$\chi_\sigma = \frac{\sigma_\sigma^2 \rho_\sigma^* \cos \alpha_\sigma}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \rho_i^* \cos \alpha_i}. \quad (50)$$

Чтобы решать систему уравнений (48), надо установить число  $n$  мест контакта и полюсные углы  $\varphi_i$ . Последние отличаются от полюсного угла  $\varphi_\sigma$ , см. (38), на величины кратные угловому шагу цевок:

$$\theta = \frac{2\pi}{z_1 + 1} = \frac{2\pi}{z_2}. \quad (51)$$

Сам угол  $\varphi_\sigma$  содержит следующее число угловых шагов:

$$s_\sigma = \frac{(z_1 + 1)\varphi_\sigma}{2\pi} = [s_\sigma] + \{s_\sigma\}, \quad (52)$$

где  $[s_\sigma]$  и  $\{s_\sigma\}$  – соответственно целая и дробная части числа.

Место с максимальным напряжением контакта в отсчете от полюса будет иметь номер:

$$i_\sigma = [s_\sigma] + 1. \quad (53)$$

Полюсные углы цевок в момент максимального напряжения на  $i_\sigma$ -ой цевке будут определяться формулой:

$$\varphi_i = i\theta + \{s_\sigma\}\theta, \quad (54)$$

а число мест контакта – целой частью числа:

$$n = \left[ \frac{z_1 + 1}{2} - \{s_\sigma\} + 1 \right], \quad (55)$$

которое для четного числа  $z_2$  цевок равно  $0.5 z_2$ , а для нечетного числа –  $0.5 (z_2 \pm 1)$ , причем "+" имеет место при  $\{s_\sigma\} < 0.5$ , а "-" при  $\{s_\sigma\} > 0.5$ .

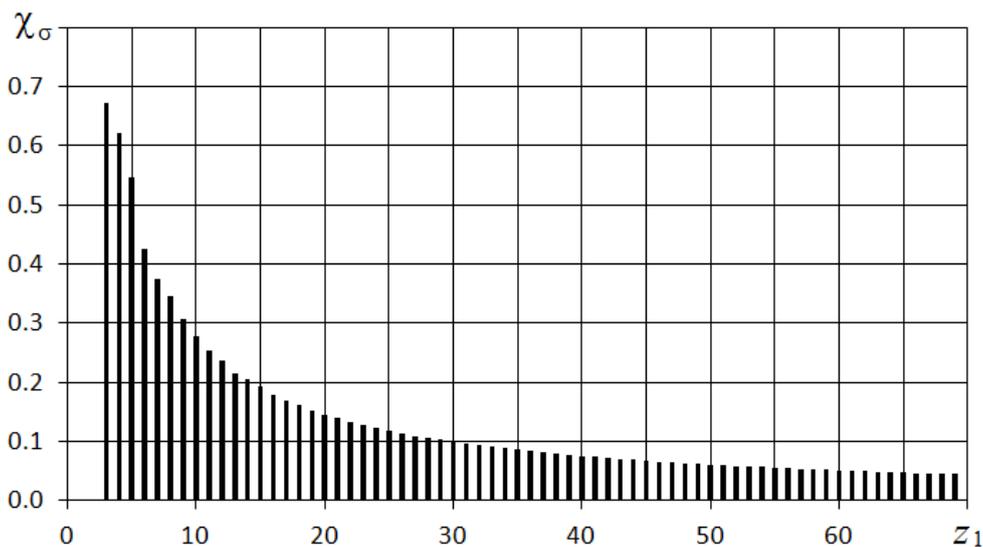


Рис. 5. Часть приводного момента, воспринимаемая в месте с максимальным напряжением контакта

По формулам (35), (38), (44) и (50) установлены независимые безразмерные параметры:  $\varphi_\sigma$ ,  $\rho_2^*$ ,  $l_\sigma$  и  $\chi_\sigma$ , удовлетворяющие максимальному значению целевой функции формы. Все параметры являются функциями одного аргумента – числа выступов циклоидальной шестерни  $z_1$ , и имеют асимптотический характер, рис. 6.

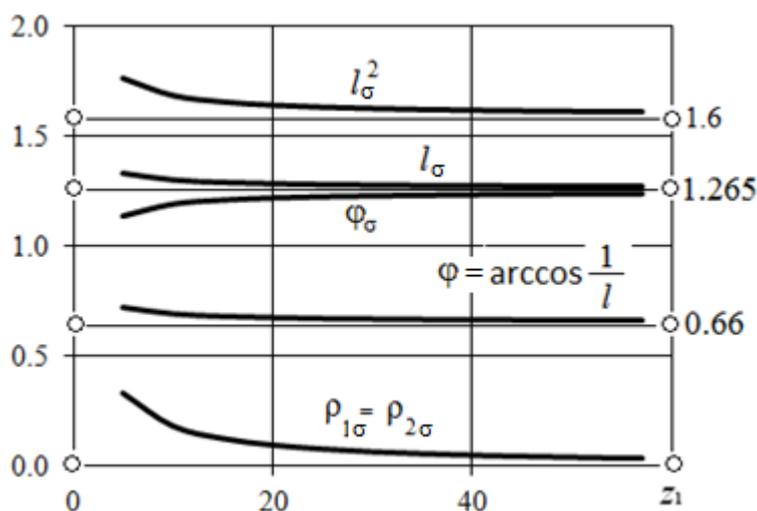


Рис. 6. Графики оптимизированных параметров

С ростом числа зубьев  $z_1$  квадрат коэффициента нецентроидности асимптотически приближается к 1.6, совпадая до второго знака с отношением "золотого сечения". Сам коэффициент  $l$  и полюсный угол  $\varphi_\sigma$  изменяются в узком интервале соответственно над и под общей асимптотой  $2\sqrt{2/5} \approx 1.265$ . График радиусов кривизны асимптотически приближается к оси абсцисс. На диаграмме рис. 6 показан график полюсного угла  $\varphi = \arccos(1/l)$ , при котором угол зацепления  $\alpha = 0$ , а плечо составляющей нагрузки имеет максимальное значение.

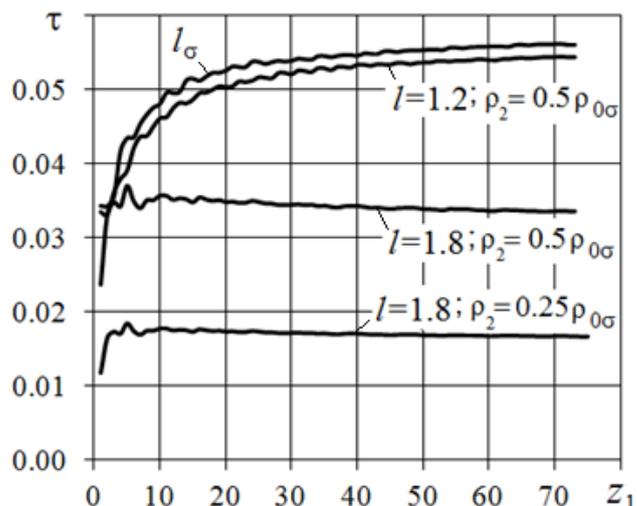


Рис. 7. Функции формы для различных значений параметров  $l$  и  $\rho$

Эффективность решения задачи оптимизации демонстрируется диаграммой на рис. 7. Негладкий вид графиков функции формы  $\tau$  отражает влияние нечетных чисел цевок на число мест контакта и распределение нагрузки. Графики показывают область возможного снижения нагрузочной способности зацепления при выборе коэффициента внецентроидности  $l$  из интервала (1.2; 1.8). Последний соответствует интервалу (0.15; 0.5) коэффициента коррекции  $x$ , рекомендуемого известными методиками. Графики функций формы для  $l \neq l_\sigma$  располагаются ниже графика для оптимизированного параметра  $l_\sigma$ . Если же радиусы цевок отклоняются от  $0.5\rho_{0\sigma}^*$  значение целевой функции падает до значений меньших 0.02, а возможная нагрузочная способность снижается вдвое.

Решением задачи оптимизации внецентроидного циклоидального зацепления установлены формулы для расчета геометрических параметров, удовлетворяющих максимальному значению удельной нагрузочной способности. Решение обеспечивает разработку зацепления по двум исходным ограничениям: передаточному числу:  $u_{H2}$  или  $u_{H1}$ , и приводному моменту  $T_1$ , что исключает неопределенность известных конструктивных рекомендаций и реализует идею аналитического проектирования [5].

Проектный расчет зацепления удобно выполнять в следующей последовательности:

1. Вычислить функцию  $q$  допускаемых напряжений по формулам (29) и/или (31).
2. Вычислить параметры:  $\varphi_\sigma, \rho_{2\sigma}^*, \rho_{0\sigma}^*, l_\sigma$  по формулам (38), (39), (40), (44).
3. Определить часть приводного момента  $\chi_\sigma$  по формулам (45) - (50) или рис.5.
4. Вычислить функцию формы  $\tau$  по формуле (42).
5. Вычислить показатель удельной нагрузочной способности  $t$  по формуле (2).
6. Вычислить характерный объем  $V$  зацепления, используя формулу (1).
7. Вычислить произведение  $r_{w1}^2 b_w$ , используя формулу (27).
8. Для ряда стандартных роликов сформировать параметрический массив:  $[\rho_j \times b_j; r_{w1j}]$ ,

где

$$r_{w1j} = \frac{1}{\rho_{2\sigma}^*} \sqrt{\frac{r_{w1}^2 b_w}{b_j}},$$

где  $j$  – номер варианта и номер параметров стандартного ролика.

9. Из массива  $[\rho_j \times b_j; r_{w1j}]$  выбрать вариант в наибольшей степени удовлетворяющий условиям компоновки.

### Выводы

1. Решением задачи оптимизации внецентроидного циклоидального зацепления получены формулы для расчета независимых параметров, удовлетворяющих максимальному значению удельной нагрузочной способности.

2. Расчетные зависимости исключили неопределенность выбора независимых параметров и позволили создать аналитическую систему автоматического проектирования зацепления по двум исходным ограничениям: передаточному числу и нагрузке.

3. Решение задачи создает предпосылки параметризации и стандартизации внецентроидного циклоидального зацепления.

### Библиографический список

1. Литвин, Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений / Ф.Л. Литвин. – М.: Наука, 1968. – 584 с.
2. Кудрявцев, В.Н. Планетарные передачи / В.Н. Кудрявцев. – 2-е изд., перераб. – М., 1986. – 308 с.
3. Алипиев, О.Л. Геометрия и формообразование на эпи- и гипоциклоидных колесах от коригирующей циклопредавки: дисс. ... док. техн. наук. – Рязань, 1990. 208 с.
4. Киреев, С. О. Теоретические основы методов анализа и синтеза планетарных механизмов с внецентроидным внутренним цевочным зацеплением: дисс. ... доктора техн. наук. – Новочеркасск: Южно-рус. гос. техн. универ. 2002. – 441 с.
5. Попов, П.К. Обобщенная оценка совершенства механических передач / П.К. Попов, Л.А. Андриенко, А.Н. Петровский // Справочник. Инженерный журнал. – 2009. – № 7. – С 20–31; – №8. – С 6–12.
6. Петровский, А.Н. Конструктивно-технологическая оптимизация геометрических параметров эвольвентного зацепления. Вестник машиностроения. 2012. № 3. С 41 – 49.
7. Петровский, А.Н. Конструктивно-технологическая оптимизация зацепления Новикова. Критерий, целевые функции, параметры // Вестник машиностроения. – 2014. – № 5. – С 3–9.
8. Петровский, А.Н. Конструктивно-технологическая оптимизация зацепления Новикова. Условия существования и качества зацепления. Численное решение // Вестник машиностроения. – 2014. – № 7. – С 3–11.
9. Тимошенко, С.П. Теория упругости: [пер. с англ.] / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер; под ред. Г.С. Шапиро. – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
10. Прочность, устойчивость, колебания: справочник в трех томах. Т. 2 / под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 463 с.

Дата поступления  
в редакцию 22.10.2015

A.N. Petrovskiy<sup>1</sup>, S.V. Voronkov<sup>2</sup>

### TO THE PROBLEM OF THE CYCLOID GEARING OPTIMIZATION

Nizhny Novgorod state technical university n. a. R. E. Alexeev<sup>1</sup>,  
Federal Research and Production Centre

“Nizhniy Novgorod Institute of Radio Engineering”, Joint-Stock Company<sup>2</sup>

**Purpose:** The load capacity improvement and parameterization of the cycloid gearing.

**Methods:** The parameters analysis and optimization by virtue specific load capacity criterion

**Results:** The equations for calculating the geometric parameters, satisfying to the maximum load capacity.

*Key words:* cycloid gearing, parameters analysis and optimization, specific load capacity.