

УДК 621.382

В.В. Бирюков, В.А. Грачев, Т.В. Кожевникова

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК КРУГЛОГО И ПРЯМОУГОЛЬНОГО ВОЛНОВОДОВ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Рассмотрено решение краевой электродинамической задачи с импедансными граничными условиями методом, основанным на инвариантности уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца. Приведено сравнение результатов решения задач о распространении волн в круглом и прямоугольном волноводах с неидеально проводящими ограничивающими поверхностями с известными результатами.

Ключевые слова: круглый волновод, прямоугольный волновод, уравнение Гельмгольца, дисперсионное уравнение, импедансные граничные условия, преобразования Лоренца.

В настоящее время для телекоммуникаций и радиолокации освоен диапазон частот до 60 ГГц. Однако потребности этих и других областей знаний (медицины, радиосвязи, радиолокации и т.д. ставят задачи интенсивного освоения коротковолновой части миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов длин волн.

Базовыми узлами любой сверхвысокочастотной системы являются пассивные направляющие структуры, которые представляют собой, в самом простейшем случае, экранированные волноводы с каноническими формами поперечных сечений (прямоугольные, круглые, эллиптические). Данные структуры в указанных диапазонах имеют существенные потери, связанные с конечной проводимостью материала стенок и не идеальностью их механической обработки. Однако существующие на сегодняшний день методы расчета направляющих структур либо учитывают конечную проводимость стенок в некотором приближении, либо достаточно сложны и применимы лишь к узкому классу структур.

В связи с погрешностями расчётов, вызванными использованием приближений, реальные потери в направляющих структурах миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов могут быть существенно выше расчетных. Поэтому снижение погрешностей при расчетах для широкого класса волноведущих структур с конечной проводимостью материала стенок является актуальной задачей. Решению данной проблемы посвящено большое число работ [1]-[6].

Строгое решение уравнений Максвелла для адекватных реальным устройствам моделей представляет весьма трудную задачу. Один из эффективных методов упрощения этой задачи – метод эквивалентных граничных условий, позволяющий исключить из рассмотрения некоторую область пространства (и поле в ней), задавая соответствующие условия на ее границе [1]. Классическим примером такого подхода является использование импедансных граничных условий Щукина-Леонтовича, описывающих поглощение энергии электромагнитного поля в хорошо проводящих средах.

Основная сложность такого подхода состоит в необходимости получения точного выражения для поверхностного импеданса, учитывающего не только параметры материала, но и структуру электромагнитного поля в волноводе. В большинстве работ [2]-[5] используется приближенное выражение для импеданса проводящей поверхности [6], обеспечивающее точное выполнение граничных условий лишь при нормальном падении волны на поверхность металла.

Обойти эту трудность можно в ряде случаев соответствующим выбором движущейся системы отсчета (СО), в которой падение волны на стенки волновода будет нормальным, а граничные условия Щукина-Леонтовича – точными. Полученные при этом компоненты электромагнитного поля и волнового вектора можно затем с помощью преобразований Лоренца

пересчитать к исходной системе отсчета [7]-[9]. Но в новой системе отсчета электромагнитная волна падает на движущуюся проводящую поверхность. В случае идеального проводника это, очевидно, роли не играет, в случае же реального проводника с конечной удельной проводимостью коэффициент отражения электромагнитной волны зависит от её поляризации и скорости проводника.

В работах [8], [9] приведено рассмотрение трансформации структур поля электромагнитных волн круглого и прямоугольного волноводов с идеально проводящими стенками при переходе в движущуюся систему отсчета. Анализируются зависимости постоянной распространения, частоты, компонент полей и вектора Умова-Пойнтинга от скорости движущейся системы отсчета. Из результатов анализа следует, что строгое выполнение импедансных граничных условий возможно в рассматриваемом частотном диапазоне для волн типа квази- E_{mn} в прямоугольном волноводе и азимутально симметричных волн типа квази- H_{0q} и квази- E_{0q} в круглом волноводе. Для остальных типов направляемых волн граничные условия Щукина-Леонтовича будут являться уточненными.

Для введения поправок в импедансные граничные условия необходимо провести рассмотрение нормального падения плоских электромагнитных волн двух взаимно ортогональных поляризаций на поверхность движущегося со скоростью $v_{пр}$ проводника (рис. 1, а).

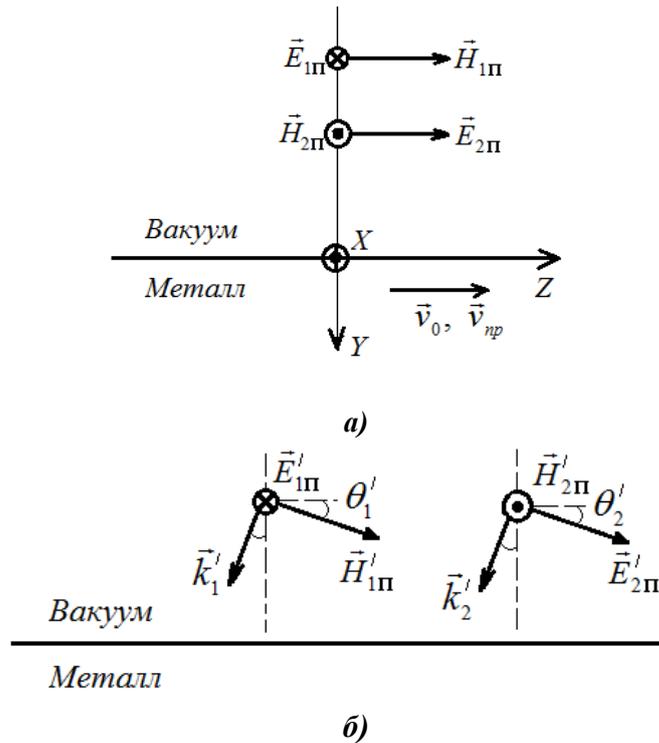


Рис. 1. Падение волн ортогональных поляризаций на металлическую поверхность в неподвижной (а) и движущейся (б) системах отсчета

В неподвижной системе отсчета выражения для полей падающих волн имеют вид:

- s -поляризация $\vec{E}_{1п} = -E_0 \mathbf{x}^0, \vec{H}_{1п} = H_0 \mathbf{z}^0$;
- p -поляризация $\vec{E}_{2п} = E_0 \mathbf{z}^0, \vec{H}_{2п} = H_0 \mathbf{x}^0$.

То есть компоненты полей падающих волн в исходной системе отсчета равны

$$E_{1пx} = -E_0, E_{1пy} = 0, E_{1пz} = 0, H_{1пx} = 0, H_{1пy} = 0, H_{1пz} = H_0;$$

$$E_{2пx} = 0, E_{2пy} = 0, E_{2пz} = E_0, H_{2пx} = H_0, H_{2пy} = 0, H_{2пz} = 0.$$

Используя преобразования Лоренца для компонент электромагнитного поля, найдем его структуру в системе отсчета, где проводник неподвижен. Для этого система отсчета

должна двигаться со скоростью, равной скорости проводника в исходной СО:

- для s-поляризованной волны:

$$E'_{1nx} = \frac{E_{1nx} - v_0 B_{1ny}}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} = -\frac{E_0}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}, \quad E'_{1ny} = \frac{E_{1ny} + v_0 B_{1nx}}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} = 0; \quad E'_{1nz} = E_{1nz} = 0;$$

$$H'_{1nx} = \frac{H_{1nx} + v_0 D_{1ny}}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} = 0; \quad H'_{1ny} = \frac{H_{1ny} - v_0 D_{1nx}}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}} = \frac{v_0 \varepsilon_0 E_0}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}; \quad H'_{1nz} = H_{1nz} = H_0.$$

- для p-поляризованной волны:

$$E'_{2nx} = 0, \quad E'_{2ny} = \frac{v_0 \mu_0 H_0}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}; \quad E'_{2nz} = E_0, \quad H'_{2nx} = \frac{H_0}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}; \quad H'_{2ny} = 0, \quad H'_{2nz} = 0.$$

Если коэффициент отражения от проводящей поверхности для волны s-поляризации равен ρ_1 , а для волны p-поляризации – ρ_2 , то суммарное поле над поверхностью проводника будет иметь вид

$$E'_{1\Sigma x} = E'_{1x}(1 + \rho_1), \quad H'_{1\Sigma y} = H'_{1y}(1 - \rho_1), \quad H'_{1\Sigma z} = H'_{1z}(1 - \rho_1);$$

$$E'_{2\Sigma y} = E'_{1y}(1 + \rho_1), \quad E'_{2\Sigma z} = E'_{2z}(1 + \rho_1), \quad H'_{2\Sigma x} = H'_{2x}(1 - \rho_1).$$

Таким образом, в движущейся системе отсчета рассматриваемые волны падают на поверхность неподвижного проводника под некоторыми углами θ'_1 и θ'_2 , которые можно найти из соотношений компонент полей падающих волн (рис. 1, б):

$$\operatorname{tg} \theta'_1 = \frac{H'_{1ny}}{H'_{1nz}} = \frac{v_0 \varepsilon_0 E_0}{H_0 \sqrt{1 - (v_0/c)^2}} = \frac{Z_0 v_0 \varepsilon_0}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}};$$

$$\operatorname{tg} \theta'_2 = \frac{E'_{2ny}}{E'_{2nz}} = \frac{v_0 \mu_0 H_0}{E_0 \sqrt{1 - (v_0/c)^2}} = \frac{v_0 \mu_0}{Z_0 \sqrt{1 - (v_0/c)^2}},$$

где $Z_0 = E_0/H_0$ - волновое сопротивление среды, в которой распространяется волна.

Используя соотношения $Z_0 \varepsilon_0 = Z_0^{-1} \mu_0 = c^{-1}$, получим

$$\operatorname{tg} \theta'_1 = \operatorname{tg} \theta'_2 = \frac{v_0/c}{\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}.$$

Соответственно другие тригонометрические функции угла падения, необходимые в дальнейших выражениях, равны

$$\cos \theta' = \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c}\right)^2}, \quad \sin \theta' = \frac{v_0}{c}.$$

Преломленные волны в металле с конечной проводимостью представляют собой плоские неоднородные волны, у которых поверхности равных фаз и амплитуд не совпадают. При этом истинный угол преломления в металле определяется выражением [10]

$$\operatorname{tg} \theta_m = \frac{k \sin \theta_0}{\operatorname{Re} \sqrt{k_m^2 - k^2 \sin^2 \theta_0}},$$

где k и k_m – волновые числа в среде, из которой падает волна, и металле соответственно; θ_0 – угол падения.

Знаменатель в этом выражении можно преобразовать к виду $\operatorname{Re} \sqrt{X} = \sqrt{(|X| + \operatorname{Re} X)}/2$, следовательно

$$\operatorname{tg} \theta_m = \frac{k \sin \theta_0}{\operatorname{Re} \sqrt{\frac{1}{2} (|k_m^2 - k^2 \sin^2 \theta_0| + \operatorname{Re}(k_m^2 - k^2 \sin^2 \theta_0))}} = \frac{k \sin \theta_0}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(\operatorname{Re} k_m^2 - k^2 \sin^2 \theta_0)^2 + (\operatorname{Im} k_m^2)^2} + \operatorname{Re} k_m^2 \right]}},$$

где $k_m = k_0 \sqrt{\varepsilon_k} = k_0 \sqrt{\varepsilon_m - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}}$ (σ – проводимость металла, ω – круговая частота электромагнитного поля).

Поскольку $\operatorname{Re} k_m^2 = k_0^2 \varepsilon_m$, $\operatorname{Im} k_m^2 = -k_0^2 \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}$, то выражение для угла преломления в рассматриваемой системе отсчёта примет вид

$$\theta'_m = \arctg \frac{\frac{v_0}{c}}{\sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\varepsilon_m - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 \right)^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \varepsilon_0^2}} + \left(\varepsilon_m - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 \right) \right]}}.$$

Коэффициенты отражения связаны с углами падения и преломления согласно формулам Френеля:

$$\rho_1 = \frac{Z_m \cos(\theta') - Z_0 \cos(\theta'_m)}{Z_m \cos(\theta') + Z_0 \cos(\theta'_m)}, \quad \rho_2 = \frac{Z_0 \cos(\theta') - Z_m \cos(\theta'_m)}{Z_0 \cos(\theta') + Z_m \cos(\theta'_m)}.$$

Компоненты результирующего поля вблизи поверхности проводника в движущейся системе отсчёта имеют вид:

$$E'_{1x} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}} (1 + \rho_1), \quad H'_{1y} = H_0 \frac{\frac{v_0}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}} (1 + \rho_1); \quad H'_{1z} = H_0 (1 - \rho_1),$$

$$E'_{2y} = \frac{E_0 \frac{v_0}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}} (1 - \rho_2); \quad E'_{2z} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}} (1 - \rho_2); \quad H'_{2x} = H_0 \frac{(1 + \rho_2)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}}.$$

Тангенциальные компоненты поля в исходной системе отсчёта в соответствии с преобразованиями Лоренца:

$$E_{1x} = \frac{E_0 \left(1 + \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}} (1 + \rho_1); \quad H_{1z} = H_0 (1 - \rho_1); \quad E_{2z} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}} (1 - \rho_2); \quad H_{2x} = H_0 (1 + \rho_2).$$

Таким образом, импеданс движущейся проводящей поверхности для волн различной поляризации определяется выражениями:

$$Z_{s1} = \frac{E_{1x}}{H_{1z}} = \frac{1 + \rho_1}{1 - \rho_1} \left(1 + \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 \right) Z_1 = \frac{Z_m}{\cos \theta'_m} \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2} \left(1 + \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 \right);$$

$$Z_{s2} = \frac{E_{2z}}{H_{2x}} = \frac{1 - \rho_2}{1 + \rho_2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}} Z_1 = Z_m \cos \theta'_m \frac{1}{1 - \left(\frac{v_0}{c} \right)^2}.$$

На рис. 2 приведены зависимости от скорости рассматриваемой системы отсчета поверхностных импедансов для волн перпендикулярной (s) и параллельной (p) поляризации соответственно.

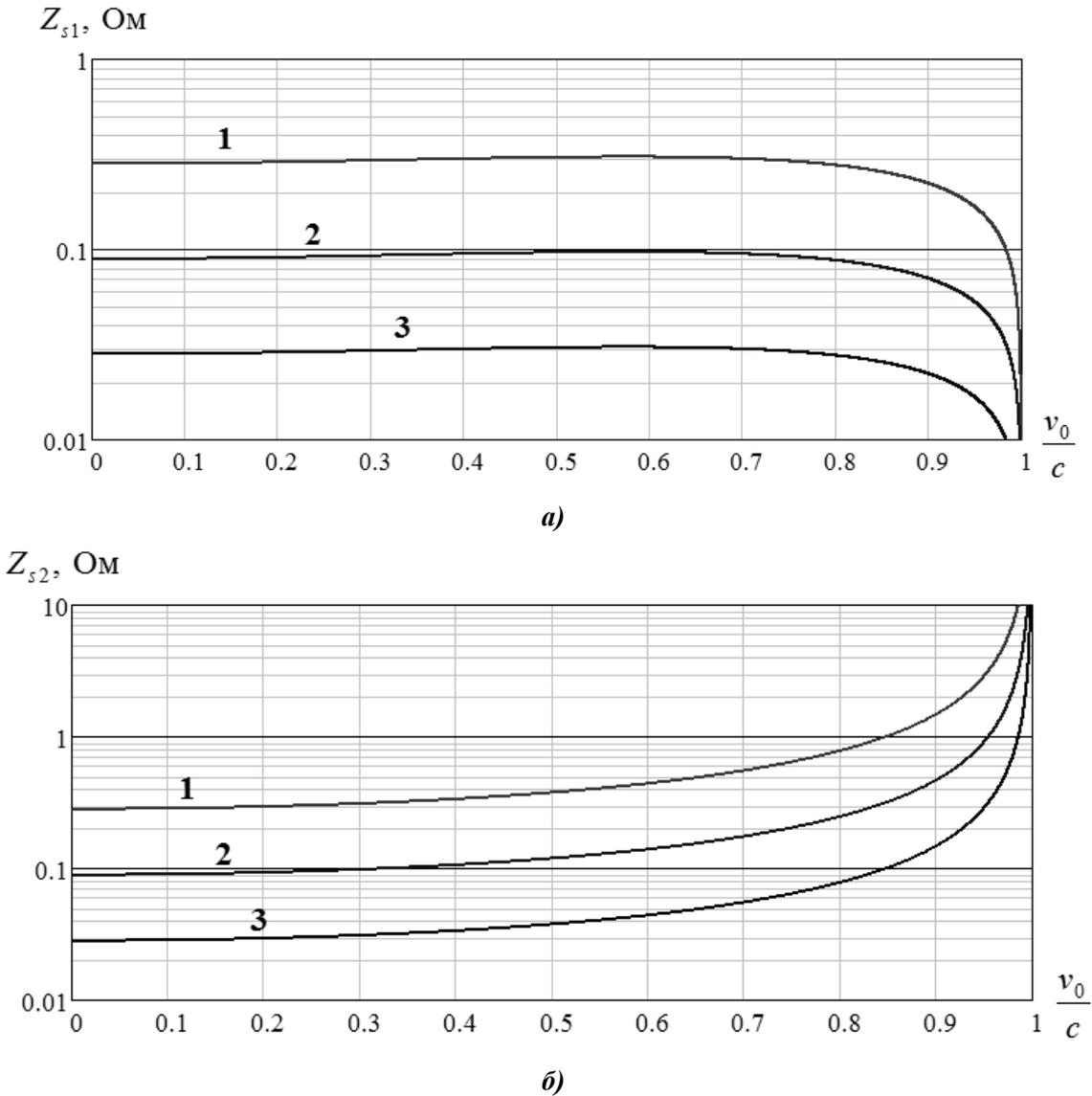


Рис. 2. Зависимость поверхностного импеданса проводящей поверхности для волны *p*-поляризации от скорости рассматриваемой системы отсчёта ($f = 10$ ГГц) при:
 1 - $\sigma = 10^6$ См/м; 2 - $\sigma = 10^7$ См/м; 3 - $\sigma = 10^8$ См/м

Полученные выражения можно применять для любой проводящей поверхности, радиус кривизны которой много больше толщины скин слоя. В частности, ими можно пользоваться при расчёте круглого и прямоугольного экранированных волноводов.

Рассмотрим круглый экранированный волновод без диэлектрического заполнения (рис. 3).

Считаем, что толщина проводящей стенки волновода много больше глубины проникновения поля. В случае конечной проводимости стенок волновода нельзя говорить только о *E*- либо *H*-волнах. Строго говоря, отличны от нуля все шесть компонент поля, т.е. волны являются гибридными. Выражения для компонент поля волн круглого волновода имеют вид:

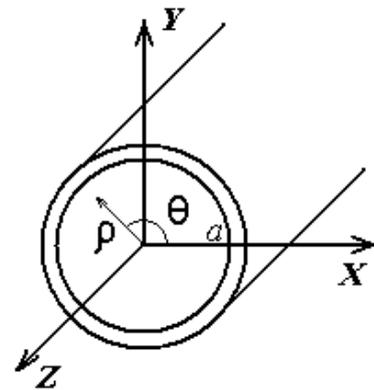


Рис. 3. Поперечное сечение круглого экранированного волновода

$$\begin{aligned}
 E_\rho &= -j \left(\frac{A\beta}{\chi} J'_n(\chi\rho) + \frac{Bn\omega\mu_0}{\chi^2\rho} J_n(\chi\rho) \right) \cos n\theta \exp[j(\omega t - \beta z)]; \\
 E_\theta &= j \left(\frac{An\beta}{\chi^2\rho} J_n(\chi\rho) + \frac{B\omega\mu_0}{\chi} J'_n(\chi\rho) \right) \sin n\theta \exp[j(\omega t - \beta z)]; \\
 E_z &= A J_n(\chi\rho) \cos n\theta \exp[j(\omega t - \beta z)]; \\
 H_\rho &= -j \left(\frac{An\omega\varepsilon_0}{\chi^2\rho} J_n(\chi\rho) + \frac{B\beta}{\chi} J'_n(\chi\rho) \right) \sin n\theta \exp[j(\omega t - \beta z)]; \\
 H_\theta &= -j \left(\frac{A\omega\varepsilon_0}{\chi} J'_n(\chi\rho) + \frac{Bn\beta}{\chi^2\rho} J_n(\chi\rho) \right) \cos n\theta \exp[j(\omega t - \beta z)]; \\
 H_z &= B J_n(\chi\rho) \sin n\theta \exp[j(\omega t - \beta z)].
 \end{aligned} \tag{1}$$

Гибридность волн, связанная с наличием потерь в стенках волновода, не является ярко выраженной. Для значений конечной удельной проводимости имеется семейство волн с отношением амплитудных коэффициентов $A/B \ll Z_0$, которые при стремлении удельной проводимости к бесконечности переходят в H -волны, и семейство волн с отношением амплитудных коэффициентов $A/B \gg Z_0$, которые при стремлении удельной проводимости к бесконечности переходят в E -волны. То есть можно говорить о квази H -волнах и квази E -волнах.

Дисперсионное уравнение волн круглого экранированного волновода с неидеально проводящей стенкой

$$\left[J_n(\chi a) - jZ_s \frac{\omega\varepsilon_0}{\chi} J'_n(\chi a) \right] \left[j \frac{\omega\mu_0}{\chi} J'_n(\chi a) - Z_s J_n(\chi a) \right] = Z_s \left[\frac{n\beta}{\chi^2 a} J_n(\chi a) \right]^2, \tag{2}$$

где β - постоянная распространения (в данном случае величина комплексная: $\beta = \text{Re}\beta + j \text{Im}\beta$ ($\text{Re}\beta$ - фазовая постоянная, $\text{Im}\beta$ - коэффициент затухания)), Z_s - импеданс проводящей поверхности стенок волновода.

Решение данного дисперсионного уравнения для нескольких волн круглого волновода с медными стенками было дано в [2]. Однако дисперсионное уравнение было получено с использованием импедансных граничных условий, которые выполняются строго только в случае нормального падения волн на проводящую стенку. Данное ограничение можно обойти, если воспользоваться полученными ранее выражениями для поверхностного импеданса.

Сначала запишем выражения для полей в системе отсчёта, движущейся вдоль оси волновода со скоростью, при которой действительная часть постоянной распространения волны равна нулю. В этом случае падение парциальных волн, образующих азимутально симметричные направляемые моды, на поверхность проводящего экрана будет нормальным и граничные условия Шукина-Леонтовича выполняются строго.

$$\begin{aligned}
 E'_\rho &= -j \left(\frac{A\beta'}{\chi'} J'_n(\chi'\rho') + \frac{Bn\omega'\mu_0}{\chi'^2\rho'} J_n(\chi'\rho') \right) \cos n\theta' \exp[\text{Im}(\beta' z')] \exp[j\omega' t']; \\
 E'_\theta &= j \left(\frac{An\beta'}{\chi'^2\rho'} J_n(\chi'\rho') + \frac{B\omega'\mu_0}{\chi'} J'_n(\chi'\rho') \right) \sin n\theta' \exp[\text{Im}(\beta' z')] \exp[j\omega' t']; \\
 E'_z &= A J_n(\chi'\rho') \cos n\theta' \exp[\text{Im}(\beta' z')] \exp[j\omega' t']; \\
 H'_\rho &= -j \left(\frac{An\omega'\varepsilon_0}{\chi'^2\rho'} J_n(\chi'\rho') + \frac{B\beta'}{\chi'} J'_n(\chi'\rho') \right) \sin n\theta' \exp[\text{Im}(\beta' z')] \exp[j\omega' t']; \\
 H'_\theta &= -j \left(\frac{A\omega'\varepsilon_0}{\chi'} J'_n(\chi'\rho') + \frac{Bn\beta'}{\chi'^2\rho'} J_n(\chi'\rho') \right) \cos n\theta' \exp[\text{Im}(\beta' z')] \exp[j\omega' t'];
 \end{aligned}$$

$$H'_z = B J_n(\chi' \rho') \sin n\theta' \exp[\text{Im}(\beta' z')] \exp[j\omega' t'].$$

Граничные условия записываются в виде

$$\frac{E'_z}{H'_0} = -Z_s, \quad \frac{E'_0}{H'_z} = Z_s, \quad \text{где в случае квази-} H\text{-волн берётся } Z_{1s}, \text{ а в случае квази-} E\text{-волн - } Z_{2s}.$$

В результате получаем дисперсионное уравнение

$$\left[J_n(\chi'a) - jZ_s \frac{\omega' \epsilon_0}{\chi'} J'_n(\chi'a) \right] \left[j \frac{\omega' \mu_0}{\chi'} J'_n(\chi'a) - Z_s J_n(\chi'a) \right] = Z_s \left[\frac{n \text{Im}(\beta')}{\chi'^2 a} J_n(\chi'a) \right]^2,$$

которое в сочетании с соотношением $\chi'^2 - \text{Im}^2(\beta') = \left(\frac{\omega'}{c}\right)^2$ позволяет найти зависимость $\beta'(\omega')$.

При переходе к неподвижной системе отсчета компоненты поля, волнового вектора и частота изменяются в соответствии с преобразованиями Лоренца: $\chi = \chi'$, $\omega = \frac{\omega' + v\beta'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$.

Продольное волновое число находится из выражения $\beta = \sqrt{\left(\frac{\text{Re}(\omega)}{c}\right)^2 - \chi^2}$. Величина потерь на единицу длины волновода $L(\text{дБ/м}) = 20 \lg(\exp(\text{Im}(\beta)))$.

На рис. 4 показана зависимость погонных потерь от частоты для волн H_{01} и E_{01} круглого экранированного волновода в случае медных стенок.

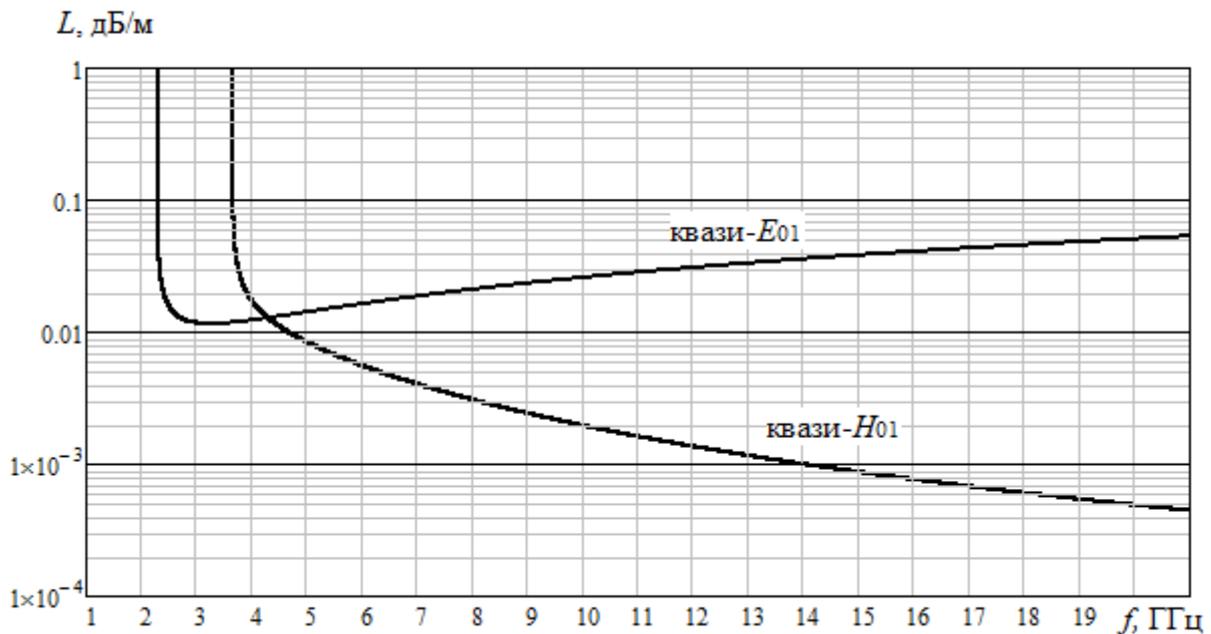


Рис. 4. Зависимость погонных потерь от частоты, $a = 5$ см

Как видно из графиков, затухание обеих волн уменьшается при удалении от критической частоты. Однако далее характер зависимостей заметно различается. В то время как затухание волны H_{01} продолжает неограниченно уменьшаться, затухание волны E_{01} достигает минимума и далее начинает возрастать. Это связано с разной зависимостью поверхностного импеданса от частоты для полей разной структуры. Эти зависимости для рассматриваемых волн приведены на рис. 5.

Как видно из приведенных зависимостей погонных потерь от частоты результаты, полученные предлагаемым методом, хорошо согласуются с известными результатами [6], [10],

позволяя, кроме того, учесть зависимость импеданса экранирующей поверхности от частоты и структуры поля.

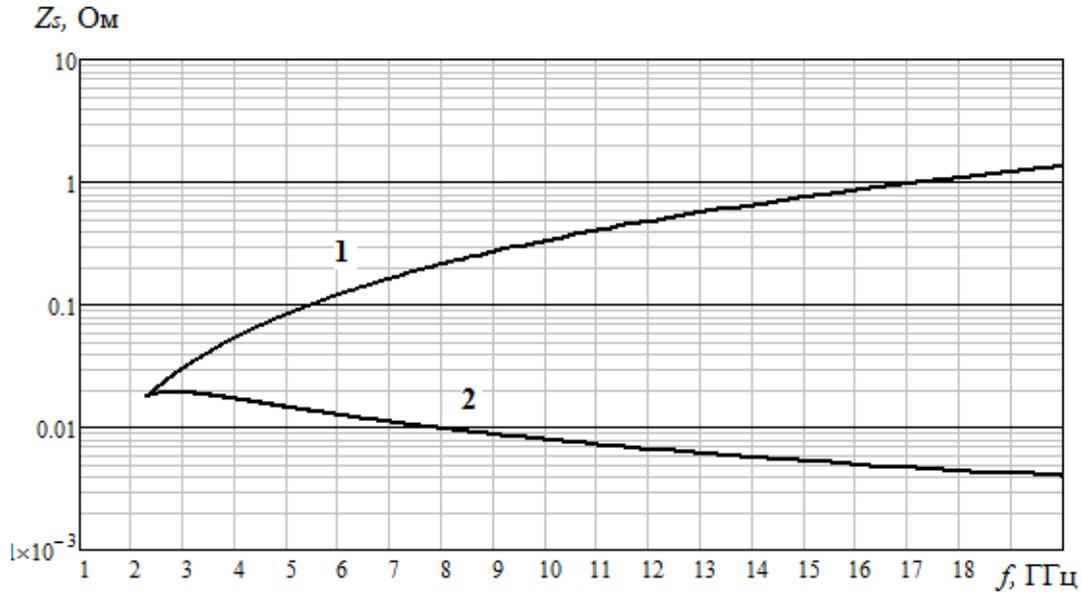


Рис. 5. Зависимость от частоты импеданса поверхности:
 1 – для волны p -поляризации; 2 – для волны s -поляризации

Рассмотрим прямоугольный экранированный волновод без диэлектрического заполнения. Считаем, что толщина проводящих стенок волновода много больше глубины проникновения поля. В случае конечной проводимости стенок волновода отличны от нуля все шесть компонент поля – волны являются гибридными. Выражения для компонент поля волн прямоугольного волновода имеют вид:

$$E_x = -\frac{j}{\chi^2} (E_0 \gamma \chi_x - H_0 \omega \mu_0 \chi_y) \cos(\chi_x x + \varphi_x) \sin(\chi_y y + \varphi_y) e^{-j\gamma z};$$

$$E_y = -\frac{j}{\chi^2} (E_0 \gamma \chi_y + H_0 \omega \mu_0 \chi_x) \sin(\chi_x x + \varphi_x) \cos(\chi_y y + \varphi_y) e^{-j\gamma z};$$

$$E_z(x, y) = E_0 \sin(\chi_x x + \varphi_x) \sin(\chi_y y + \varphi_y) e^{-j\gamma z};$$

$$H_x = \frac{j}{\chi^2} (H_0 \gamma \chi_x + E_0 \omega \epsilon_0 \chi_y) \sin(\chi_x x + \varphi_x) \cos(\chi_y y + \varphi_y) e^{-j\gamma z};$$

$$H_y = \frac{j}{\chi^2} (H_0 \gamma \chi_y - E_0 \omega \epsilon_0 \chi_x) \cos(\chi_x x + \varphi_x) \sin(\chi_y y + \varphi_y) e^{-j\gamma z};$$

$$H_z(x, y) = H_0 \cos(\chi_x x + \varphi_x) \cos(\chi_y y + \varphi_y) e^{-j\gamma z};$$

где $\varphi_x = \frac{1}{2}(m\pi - \chi_x a)$, $\varphi_y = \frac{1}{2}(n\pi - \chi_y b)$.

Дисперсионные уравнения волн прямоугольного экранированного волновода с неидеально проводящими стенками

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{j\omega\mu_0\chi_y \operatorname{tg}(\chi_y b + \varphi_y)}{\chi_x^2 + \chi_y^2} + Z_s \right) \left(\frac{j\omega\epsilon_0\chi_y \operatorname{ctg}(\chi_y b + \varphi_y)}{\chi_x^2 + \chi_y^2} - \frac{1}{Z_s} \right) = \left(\frac{\gamma\chi_x}{\chi_x^2 + \chi_y^2} \right)^2; \\ & \left(\frac{j\omega\mu_0\chi_x \operatorname{tg}(\chi_x a + \varphi_x)}{\chi_x^2 + \chi_y^2} + Z_s \right) \left(\frac{j\omega\epsilon_0\chi_x \operatorname{ctg}(\chi_x a + \varphi_x)}{\chi_x^2 + \chi_y^2} - \frac{1}{Z_s} \right) = \left(\frac{\gamma\chi_y}{\chi_x^2 + \chi_y^2} \right)^2. \end{aligned} \right.$$

Данные дисперсионные уравнения являются приближенными, поскольку получены с использованием импедансных граничных условий, которые выполняются строго только в случае нормального падения волн на проводящую стенку. Для получения строгих дисперсионных уравнений нужно воспользоваться полученными ранее выражениями для поверхностного импеданса.

Запишем выражения для полей в системе отсчёта, движущейся вдоль оси волновода со скоростью, при которой действительная часть постоянной распространения волны равна нулю. В этом случае падение парциальных волн, образующих квази- E_{mn} направляемые моды, на поверхность проводящего экрана будет нормальным, и граничные условия Щукина-Леонтовича выполняются строго.

$$E'_x = -\frac{j}{\chi^2} (E_0 \gamma' \chi'_x - H_0 \omega' \mu_0 \chi'_y) \cos(\chi'_x x' + \varphi'_x) \sin(\chi'_y y' + \varphi'_y) \exp[\operatorname{Im}(\gamma' z')] \exp[j\omega' t'];$$

$$E'_y = -\frac{j}{\chi'^2} (E_0 \gamma' \chi'_y + H_0 \omega' \mu_0 \chi'_x) \sin(\chi'_x x' + \varphi'_x) \cos(\chi'_y y' + \varphi'_y) \exp[\operatorname{Im}(\gamma' z')] \exp[j\omega' t'];$$

$$E'_z = E_0 \sin(\chi_x x + \varphi_x) \sin(\chi_y y + \varphi_y) \exp[\operatorname{Im}(\gamma' z')] \exp[j\omega' t'];$$

$$H'_x = \frac{j}{\chi'^2} (H_0 \gamma' \chi'_x + E_0 \omega' \varepsilon_0 \chi'_y) \sin(\chi'_x x' + \varphi'_x) \cos(\chi'_y y' + \varphi'_y) \exp[\operatorname{Im}(\gamma' z')] \exp[j\omega' t'];$$

$$H'_y = \frac{j}{\chi'^2} (H_0 \gamma' \chi'_y - E_0 \omega' \varepsilon_0 \chi'_x) \cos(\chi'_x x' + \varphi'_x) \sin(\chi'_y y' + \varphi'_y) \exp[\operatorname{Im}(\gamma' z')] \exp[j\omega' t'];$$

$$H'_z = H_0 \cos(\chi'_x x' + \varphi'_x) \cos(\chi'_y y' + \varphi'_y) \exp[\operatorname{Im}(\gamma' z')] \exp[j\omega' t']$$

Граничные условия записываются в виде:

$$y' = 0; \quad b: \frac{E'_z}{H'_x} = -\frac{E'_x}{H'_z} = Z_S; \quad x' = 0, \quad a: \frac{E'_y}{H'_z} = -\frac{E'_z}{H'_y} = Z_S,$$

где в случае квази- H -волн берётся Z_{1s} , а в случае квази- E -волн – Z_{2s} .

В результате получаем систему дисперсионных уравнений:

$$\left[\left(\frac{j\omega' \mu_0 \chi'_y \operatorname{tg}(\chi'_y b + \varphi'_y)}{\chi_x'^2 + \chi_y'^2} + Z_S \right) \left(\frac{j\omega' \varepsilon_0 \chi'_y \operatorname{ctg}(\chi'_y b + \varphi'_y)}{\chi_x'^2 + \chi_y'^2} - \frac{1}{Z_S} \right) = \left(\frac{\operatorname{Im}(\gamma') \chi'_x}{\chi_x'^2 + \chi_y'^2} \right)^2, \right.$$

$$\left[\left(\frac{j\omega' \mu_0 \chi'_x \operatorname{tg}(\chi'_x a + \varphi'_x)}{\chi_x'^2 + \chi_y'^2} + Z_S \right) \left(\frac{j\omega' \varepsilon_0 \chi'_x \operatorname{ctg}(\chi'_x a + \varphi'_x)}{\chi_x'^2 + \chi_y'^2} - \frac{1}{Z_S} \right) = \left(\frac{\operatorname{Im}(\gamma') \chi'_y}{\chi_x'^2 + \chi_y'^2} \right)^2, \right.$$

которая в сочетании с соотношением $\chi'^2 - \operatorname{Im}^2(\gamma') = \left(\frac{\omega'}{c} \right)^2$ позволяет найти зависимость $\gamma'(\omega')$.

При переходе к неподвижной системе отсчета компоненты поля, волнового вектора и частота изменяются в соответствии с преобразованиями Лоренца

$$\chi = \chi', \quad \omega = \frac{\omega' + v\gamma'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Продольное волновое число находится из выражения $\gamma = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{Re}(\omega)}{c} \right)^2 - \chi^2}$.

Зависимость коэффициентов затухания от частоты для волн квази- H_{10} и квази- E_{11} для прямоугольного волновода с размерами поперечного сечения 7,2x3,4 мм и проводимостью материала стенок $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ см/м приведены на рис. 6.

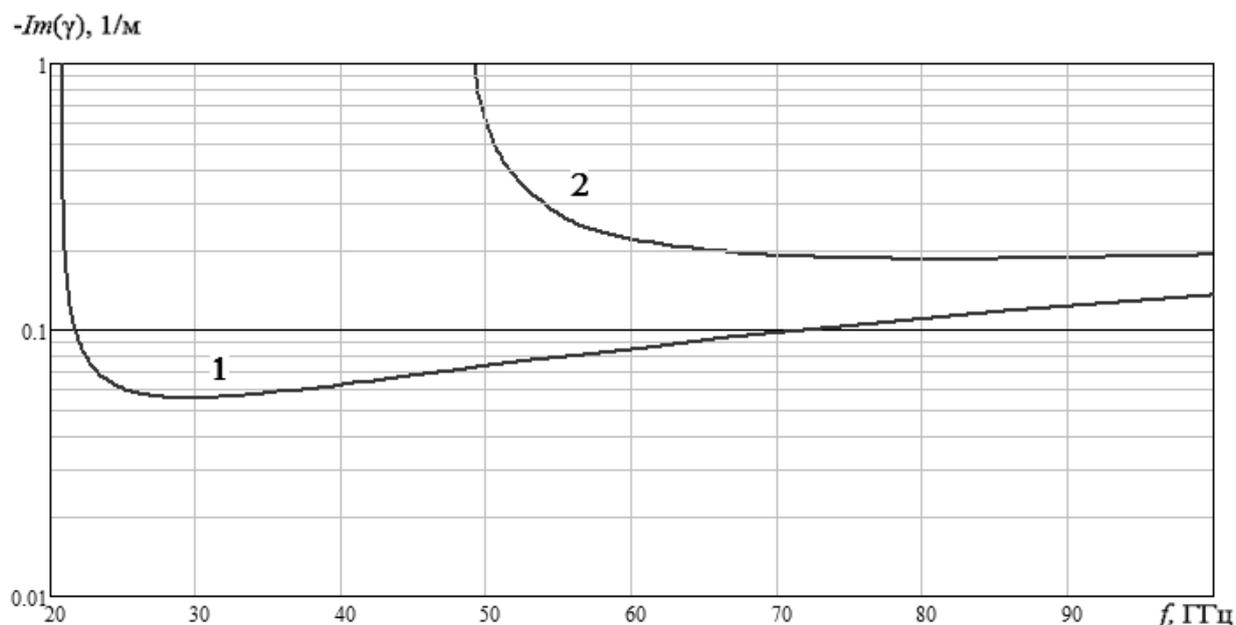


Рис. 6. Частотные зависимости коэффициента затухания направляемых мод при проводимости $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ см/м:
 1 – квази- H_{10} ; 2 – квази- E_{11}

Представленные зависимости погонных потерь от частоты, полученные предлагаемым методом, хорошо согласуются с известными результатами [6-8].

Таким образом, была поставлена и решена задача о нормальном падении электромагнитных волн взаимно ортогональных поляризации на поверхность движущегося проводника. В результате решения этой задачи показано, что зависимости поверхностных импедансов от скорости движения проводника (или скорости рассматриваемой системы отсчета) имеют разный характер для волн ортогональных поляризации.

На основании проведенных расчетов и полученных зависимостей сформулирована методика строгого электродинамического расчета направляющих структур, ограниченных неидеально проводящими поверхностями, учитывающая зависимости поверхностного импеданса от поляризации электромагнитной волны и проводимости материала ограничивающих стенок.

Приведены результаты расчета погонных потерь в круглом волноводе с неидеально проводящими стенками, рассчитанные с помощью разработанного метода, основанного на инвариантности уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца. При расчетах учтены зависимости поверхностного импеданса экранирующих поверхностей от их проводимости, а также частоты и поляризации направляемой моды.

Библиографический список

1. **Ильинский, А.С.** Колебания и волны в электродинамических системах с потерями / А.С. Ильинский, Г.Я. Слепян. – М. : Изд-во МГУ, 1983. – 232 с.
2. Conductor Loss in Hollow Waveguides Using a Surface Integral Formulation / M. Swaminathan [et al.]. – IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. V. 40. №. 11. 1992. P. 2034–20413.
3. **Кураев, А.А.** О влиянии конечной проводимости металлических стенок на характеристики мощных релятивистских приборов СВЧ с нерегулярными электродинамическими системами / А.А. Кураев, А.К. Сеницын // СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии (КрыМико 2006): материалы 16-й Междунар. Крымской конф., 11-15 сентября 2006 г. – Севастополь: Вебер, 2006. Т. 1. С. 238–240.

4. **Кураев, А.А.** Поля в продольно-периодических волноводах с учетом потерь в металлических стенках / А.А. Кураев, А.К. Сеницын, С.И. Яроменок // Доклады БГУИР. 2008. № 1(31). С. 48–53.
5. **Котельников, И.А.** О затухании в волноводе / И.А. Котельников // Журнал технической физики. 2004. Т. 74. № 9. С. 95–966.
6. **Никольский, В.В.** Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – 3-е изд. перераб. и доп. – М.: Наука, 1989. – 544 с.
7. **Бирюков, В.В.** Учет конечной проводимости при расчете волноводов СВЧ и КВЧ диапазонов на основе релятивистского подхода / В.В. Бирюков // Письма в ЖТФ. – 2008. Т. 34. Вып. 2. С. 75–82.
8. **Бирюков, В.В.** Структура электромагнитного поля круглого экранированного волновода в движущейся системе отсчета / В.В. Бирюков, В.А. Грачев // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40. Вып. 14. С. 21–29.
9. **Бирюков, В.В.** Моделирование электромагнитного поля прямоугольного волновода с использованием преобразований Лоренца / В.В. Бирюков, В.А. Грачев // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 2(1). С. 164–169.
10. **Неганов, В.А.** Электродинамика и распространение радиоволн: учеб. пособие для вузов / В.А. Неганов, О.В. Осипов, С.Б. Раевский, Г.П. Яровой; под ред. В.А. Неганова и С.Б. Раевского. – М.: Радио и связь, 2005. – 648 с.
11. **Yeap, K.H.** Wave Propagation in Lossy and Superconducting Circular Waveguides / K.H. Yeap [at al.] // Radioengineering. 2010. V. 19. № 2. P. 320–325.
12. **Бирюков, В.В.** Влияние конечной проводимости стенок на структуру поля и характеристики круглого волновода / В.В. Бирюков, В.А. Грачев // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17. № 1. С. 50–53.

*Дата поступления
в редакцию 10.02.2016*

V.V. Biryukov, V.A. Grachev, T.V. Kozhevnikova

A RELATIVISTIC METHOD OF CALCULATION CHARACTERISTICS OF CIRCULAR AND RECTANGULAR WAVEGUIDES

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeev

Purpose: The article presents the method of calculating the characteristics of the circular waveguide.

Design/methodology/approach: The solution of the boundary electrodynamic problem with impedance boundary conditions method, based on invariance of the Maxwell equations relative to the Lorentz transformations is presented.

Finding: The ability to use rigorous boundary conditions is shown.

Research limitations/implications: The article presents application of the proposed method, its comparison with known results.

Originality/value: It is shown that the transition to the moving reference frame and using the Lorentz transformations allows to achieve strict implementation of impedance boundary conditions throughout the frequency range.

Key words: circular waveguide, rectangular waveguide, Helmholtz equation, dispersion equation, impedance boundary conditions, the Lorentz transformations.