

УДК. 621.752.3

Б.А. Гордеев<sup>1,2</sup>, С.Н. Охулков<sup>1,2</sup>, А.С. Плехов<sup>2</sup>, Д.Ю. Титов<sup>2</sup>**БИЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ СИНХРОНИЗАЦИИ ДВУХ ДВИГАТЕЛЕЙ,  
УСТАНОВЛЕННЫХ НА ОБЩЕМ ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ<sup>1</sup>**Институт проблем машиностроения Российской академии наук (ИПМ РАН)<sup>1</sup>,  
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева<sup>2</sup>

**Объект исследования:** Рассмотрены два основных варианта синхронизации двух двигателей: синхронизация на неподвижном вязкоупругом основании; синхронизация при вибрирующем основании.

**Цель:** В статье приводятся результаты экспериментальных исследований эффектов, возникающих при синхронизации двух двигателей, закрепленных на вязкоупругом основании.

**Результаты:** Проведен анализ спектров и выявлены информативные гармонические составляющие, позволяющие выявить основные гармоники генерируемых вибропроцессов.

**Область применения:** системы демпфирования ударных нагрузок силовых электромеханических установок и механического оборудования.

*Ключевые слова:* переходный процесс, синхронизация, вибрация, гидравлическая опора, эксперимент, низкочастотные биения, спектры вибропроцессов.

В системах со многими источниками вибраций всегда возможна синхронизация на одной или нескольких частотах [1, 2]. Вопросы синхронизации и захвата частоты при испытаниях механических систем с локальными источниками шума и вибрации приобретают все большую актуальность в современном машиностроении. Синхронизация и захват частоты при переходных режимах работы могут приводить к вредным последствиям, вплоть до разрушения силовых агрегатов [1, 2]. Эти процессы усугубляются влиянием внешних вибрационных полей, способствующих значительному увеличению времени переходных процессов в энергоемком оборудовании.

Возрастание времени переходных процессов, в частности, приводит к увеличению энергопотребления и дополнительному росту вредных вибраций, возникновению опасных низкочастотных биений. Эти процессы понижают ресурс работы силовых агрегатов и ведут к разрушению инженерных конструкций. Поэтому задача снижения уровней вибрации в стационарных и переходных режимах работы энергоемких машин всегда актуальна [2]. Захват угловой скорости вращения ротора электродвигателя и его синхронизация внешними источниками вибрации происходит во время разгона ротора из состояния покоя.

Переходный процесс может сопровождаться рядом нежелательных явлений. К примеру, угловая скорость вращения ротора может и не достичь своего номинального значения, а останется в установившемся режиме гораздо меньшей. Это свидетельствует о вредном действии вибрационного момента на вал ротора, от чего необходимо освободиться либо, по возможности, свести к минимуму. Отмеченные явления существенно осложняются действием внешнего вибрационного поля даже тогда, когда частоты внешних возмущений не совпадают с номинальной угловой скоростью вращения ротора [4–6]. Эффективным способом снижения уровня вибраций частей электромашин является использование гидравлических опор в качестве демпферов.

В некоторых электромеханических системах синхронизация играет положительную роль. Синхронизация механического или электрического колебательного контура и весьма стабильного кварцевого генератора широко используется в импульсной технике примерно с середины 50-х годов прошлого столетия. Здесь синхронизация является полезным эффектом. Синхронизация используется с пользой во многих горных машинах – сепараторах, грохотах.

Однако если синхронизация возникла в системе нескольких электродвигателей, кото-

рые создают повышенную нагрузку на платформу, где они установлены, то синхронизация, естественно, – явление вредное.

Экспериментальные исследования эффектов синхронизации проводились при работе двух электродвигателей на закрепленных на общем неподвижном основании и общем вязкоупругом основании. Общее вязкоупругое основание установлено на четырёх гидравлических опорах (рис .1).



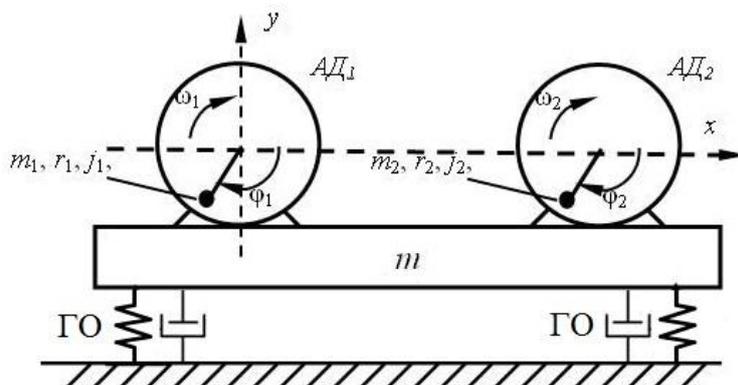
**Рис. 1. Электромеханическая система двух асинхронных двигателей, установленных на общем вязкоупругом основании**

На стальных крепежных пластинах жестко закреплены электродвигатели типа АИР 63 В4 0,37 1500, мощностью в 370 Вт с одинаковыми механическими и частотными характеристиками (рис. 1). Крепежные пластины, в свою очередь, жестко закреплены на стальной платформе (основание). Вся система установлена на вибростенде. Между вибростендом и платформой установлены гидроопоры.

Рассмотрены два основных варианта: синхронизация на вязкоупругом основании; и синхронизация при вибрирующем основании за счет сторонних внешних воздействий. Проведен анализ спектров и выявлены информативные гармонические составляющие, позволяющие судить о наличии биений.

### Теоретическая часть

Физическую модель системы двух двигателей, закрепленных на вязкоупругом основании с одной степенью свободы [3] представим как систему двух двигателей, закрепленных на платформе, установленной на вязкоупругих гидроопорах (рис. 2).



**Рис. 2. Физическая модель системы двух двигателей, вращающихся в одном направлении, закрепленных на платформе, установленной на вязкоупругие гидравлические опоры**

Для электромеханической системы на рис. 2 заданы: суммарная жесткость обечаек гидроопор –  $C$ ; массы первого и второго двигателей –  $m_1, m_2$ ; масса платформы –  $m$ ; моменты инерции роторов –  $I_1, I_2$ ; радиусы эксцентров –  $r_1$  и  $r_2$ ; крутящие моменты приложенные к валам двигателей –  $M_1, M_2$ ;  $\varphi_1, \varphi_2$  – углы поворота роторов отсчитываемые от направления оси  $x$ .

Для электромеханической системы также задаются коэффициенты вязкого сопротивления вертикальному движению корпусов двигателей –  $\eta_{1.1}, \eta_{1.2}$ ; коэффициенты вязкого сопротивления вращению роторов –  $\eta_{2.1}, \eta_{2.2}$  (рис. 2). Источники вибрации – двигатели с неуравновешенными роторами, обладающие моментами инерции  $I_j$ .

Неуравновешенные роторы двигателей генерируют под действием центробежных сил вынуждающие силы, действующие на вязкоупругое основание [2, 3, 13]:

$$F_1 = F_{01} \sin(\Omega_1 t + \varphi_1); F_2 = F_{02} \sin(\Omega_2 t + \varphi_2);$$

где  $F_{01} = m_1 \cdot \Omega_1^2 \cdot r_1, F_{02} = m_2 \cdot \Omega_2^2 \cdot r_2$  – центробежные силы,  $m_1, m_2$  – массы эксцентров с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  соответственно,  $\Omega_1, \Omega_2$  и  $\varphi_1, \varphi_2$  – угловые частоты и начальные фазы вращения неуравновешенных роторов первого, второго двигателей соответственно.

При этом предполагается, что значения  $\Omega_1, \Omega_2$  заданы и не зависят от процесса колебаний вязкоупругой платформы, на которой установлены двигатели с неуравновешенными роторами.

Если используются двигатели, обладающие небольшой мощностью, то процесс колебаний вязкоупругой электромеханической системы заметно влияет на величины  $\Omega_1, \Omega_2$  и последние также колеблются около некоторого среднего значения. Вследствие влияния колебаний вязкоупругой платформы на угловые скорости вращения роторов двигателей их работа в некотором диапазоне угловых скоростей становится неустойчивой [3, 13].

При эксплуатации двигателей, установленных на вязкоупругом основании, необходимо учитывать эти явления. Такие явления можно наблюдать у мотор-компрессора локомотива, энергетическая установка которого находится в общем корпусе, расположенном на вязкоупругом основании [7]. При составлении системы дифференциальных уравнений введем обобщенные координаты. За обобщенные координаты выбираем углы поворота роторов –  $\varphi_1, \varphi_2$  и вертикальные перемещения платформы с двигателями –  $y$ . По теореме о движении центров масс для первого и второго двигателей дифференциальные уравнения движения центров масс записываются в виде [13]

$$\begin{cases} (m + m_1) \cdot \frac{dV_{cm1}}{dt} = -\eta_{1.1} \dot{y}_1 - cy_1 + (m + m_1)g, \\ (m + m_2) \cdot \frac{dV_{cm2}}{dt} = -\eta_{1.2} \dot{y}_2 - cy_2 + (m + m_2)g. \end{cases} \quad (1)$$

где  $V_{cm1}; V_{cm2}$  – линейная скорость центра масс двигателей электромеханической системы;  $g$  – ускорение свободного падения.

Ускорения центра масс первого и второго двигателей определим по формулам

$$\begin{cases} \frac{dV_{cm1}}{dt} = \ddot{y}_1 - \frac{m \cdot r_1}{m + m_1} \cdot (\dot{\Omega}_1 \cdot \sin \varphi_1 + \Omega_1^2 \cdot \cos \varphi_1), \\ \frac{dV_{cm2}}{dt} = \ddot{y}_2 - \frac{m \cdot r_2}{m + m_2} \cdot (\dot{\Omega}_2 \cdot \sin \varphi_2 + \Omega_2^2 \cdot \cos \varphi_2) \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получим первые дифференциальные уравнения движения для первого и второго двигателей:

$$\begin{cases} (m + m_1) \cdot \ddot{y}_1 - m \cdot r_1 \cdot (\ddot{\varphi}_1 \cdot \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1^2 \cdot \cos \varphi_1) = -\eta_{1.1} \dot{y}_1 - cy_1 + (m + m_1)g, \\ (m + m_2) \cdot \ddot{y}_2 - m \cdot r_2 \cdot (\ddot{\varphi}_2 \cdot \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 \cdot \cos \varphi_2) = -\eta_{1.2} \dot{y}_2 - cy_2 + (m + m_2)g. \end{cases} \quad (3)$$

Запишем дифференциальные уравнения вращательного движения эксцентриксов для первого и второго двигателей с эксцентриситетами  $r_1$  и  $r_2$ :

$$\begin{cases} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 = M_1 - \eta_{2,1} \cdot \dot{\varphi}_1 + m \cdot r_1 \cdot \ddot{y}_1 \cdot \sin \varphi_1 - m \cdot g \cdot r_1 \cdot \sin \varphi_1, \\ I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_2 - \eta_{2,2} \cdot \dot{\varphi}_2 + m \cdot r_2 \cdot \ddot{y}_2 \cdot \sin \varphi_2 - m \cdot g \cdot r_2 \cdot \sin \varphi_2. \end{cases} \quad (4)$$

Отправной пункт дальнейших рассуждений состоит в том, что механические колебания массы  $m$  влияют на угловую скорость роторов двигателей  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и моменты  $M_1$ ,  $M_2$ , передаваемые статорами на роторы, зависят от угловых скоростей  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ .

Зависимости  $M_1=M(\Omega_1)$  и  $M_2=M(\Omega_2)$  являются характеристиками двигателей и определяются их конструкцией и параметрами.

Во многих случаях характеристику электродвигателей можно принять в виде линейных функций:

$$\begin{cases} M_1 = M_{01} - b_1 \Omega_1 \\ M_2 = M_{02} - b_2 \Omega_2 \end{cases}, \quad (5)$$

где  $b_1, b_2 = \text{const}$ .

Величины  $M_{01}$  и  $M_{02}$  зависят от рабочего питающего напряжения двигателей. Изменяя рабочие питающие напряжения, можно изменять характеристики двигателей.

С учетом (5), обозначая

$$\eta_{1,1} = b_1 + \eta_{2,1} \text{ и } \eta_{1,2} = b_2 + \eta_{2,2},$$

преобразуем (4) к виду

$$\begin{cases} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 = M_{01} - \eta_{1,1} \cdot \dot{\varphi}_1 + m \cdot r_1 \cdot \ddot{y}_1 \cdot \sin \varphi_1 - m \cdot g \cdot r_1 \cdot \sin \varphi_1, \\ I_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_{02} - \eta_{1,2} \cdot \dot{\varphi}_2 + m \cdot r_2 \cdot \ddot{y}_2 \cdot \sin \varphi_2 - m \cdot g \cdot r_2 \cdot \sin \varphi_2. \end{cases} \quad (6)$$

Уравнения (3) и (6) представляют собой систему дифференциальных уравнений движения конструкции электромеханической системы, изображенной на рис. 2.

Далее рассмотрим вопрос о трансформации энергии в данной электромеханической колебательной системе (рис. 2). В таких колебательных системах часто наблюдается явление трансформации энергии одного вида колебаний в другой или от одного тела системы к другому. В первом случае происходит периодическое затухание колебания одного вида и возникновение вследствие этого колебания другого вида. Во втором случае возникают биения, проявляющиеся в периодической амплитудной модуляции вибросигналов, генерируемых двигателями системы [10-13].

Рассмотрим данную электромеханическую систему, имеющую две обобщенные координаты  $q_1$  и  $q_2$ , отсчитываемыми от положения устойчивого равновесия системы. Исходим из того, что электромеханическая система совершает малые колебания с номинальными частотами вращения роторов первого, второго двигателей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  около положения устойчивого равновесия.

Взаимное воздействие двух двигателей друг на друга в колебательной электромеханической системе определяется через отношение обобщенных координат, равное отношению амплитуд колебаний  $\mu_1$  и  $\mu_2$  [12, 13].

Действие первого двигателя на второй определяется через отношение обобщенных координат, равное отношению амплитуд колебаний  $\mu_1$ :

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{F_{02}}{F_{01}} = \mu_1,$$

откуда

$$q_1 = F_{01} \sin(\Omega_1 t + \varphi_1); \quad q_2 = \mu_1 \cdot q_1 = \mu_1 \cdot F_{01} \sin(\Omega_1 t + \varphi_1).$$

Действие второго двигателя на первый определяется через отношение обобщенных координат, равное отношению амплитуд колебаний  $\mu_2$ :

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{F_{01}}{F_{02}} = \mu_2,$$

откуда

$$q_2 = F_{02} \sin(\Omega_2 t + \varphi_1); \quad q_1 = \mu_2 \cdot q_2 = \mu_2 \cdot F_{02} \sin(\Omega_2 t + \varphi_1).$$

Угловые частоты  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  являются частотами свободных колебаний электромеханической системы. Соответствующие этим частотам колебания называют *главными колебаниями системы*. Меньшую из частот  $\Omega_1$  или  $\Omega_2$  называют *основной частотой*, а первое главное колебание, имеющее эту частоту, – *основным колебанием*. Колебание с меньшей частотой является основным в результирующем колебании системы [11].

Величины  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , представляющие собой отношение обобщенных координат или амплитуд колебаний в каждом из главных колебаний, характеризуют *формы главных колебаний* и их называют *коэффициентами распределения*. *Формы главных колебаний электромеханической системы не зависят от частоты колебаний и определяются только параметрами колебательной системы*.

В электромеханической колебательной системе каждый из двух двигателей может совершать биения. При упрощающем предположении  $A_1=A_2=Y_m$  и  $\varphi_{01} = \varphi_{02}$  в результате сложения двух гармонических колебаний с близкими частотами возникают биения

$$y_{\text{рез}} = y_1 + y_2 = Y_m [\sin(\Omega_1 t) + \sin(\Omega_2 t)] = 2 \cdot Y_m \cdot \cos\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t\right). \quad (7)$$

Если частоты  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  очень близки друг к другу, то в электромеханической колебательной системе движение можно рассматривать как гармоническое колебание с амплитудой и фазой, медленно изменяющимися во времени [10-13]. Период изменения амплитуды колебаний двигателей и период биений определяются по формулам

$$T_Y = \frac{4\pi}{\Omega_1 + \Omega_2}, \quad (8)$$

$$T_6 = \frac{2\pi}{\Omega_1 - \Omega_2}. \quad (9)$$

Период биений равен половине периода изменения амплитуды биений. В процессе биений за время, равное половине периода  $T_6$ , двигатели обмениваются энергией.

### Экспериментальная часть

В электромеханической системе на каждом из двигателей типа АИР 63 В4 0,37 1500 в 370 Вт жестко закреплены диски с эксцентриситетами (рис.1). На левом и правом дисках закреплены грузики, создающие моменты инерции  $J_1 = 10,125 \cdot 10^{-5}$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_2 = 6,125 \cdot 10^{-5}$  кг·м<sup>2</sup> соответственно. Круговая частота вращения роторов обоих двигателей  $\Omega_1 = \Omega_2 = 157$  рад/с, или  $f_{\text{вр}} = 25$  Гц. Круговая частота вибростенда  $\Omega_{\text{вс}} = 113,1$  рад/с.

Измерения уровней вибрации при работе двух электродвигателей, закрепленных на общем неподвижном основании и общем вязкоупругом основании, проводились виброанализатором «ОКТАВА – 110ВМ», предназначенным для измерения среднеквадратичных, эквивалентных и пиковых уровней виброускорения, а также октавных и третьоктавных уровней виброускорения в децибелах низкочастотной широкополосной вибрации. Акселерометры закреплялись на платформе между двигателями. Измеряемые прибором виброускорения в децибелах (дБ) затем переводились в линейные виброускорения ( $A$ , м/с<sup>2</sup>) и линейные виброперемещения ( $S$ , м).

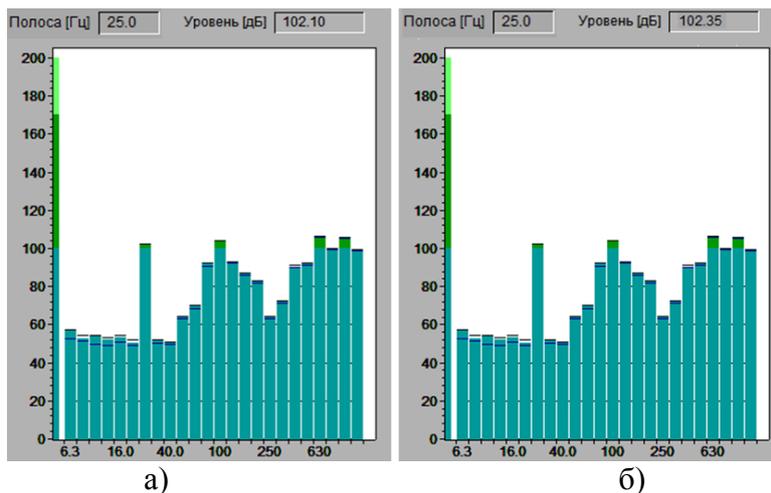
Виброускорения в линейных единицах получают из соответствующих уровней по формулам, которые взяты из руководства по применению измерителя общей и локальной вибрации ОКТАВА-110В/101ВМ [14]. Соответствующие формулы для уровней определяют взаимосвязи между уровнями виброускорения, скорости и смещения в  $L_A$ (дБ),  $L_V$ (дБ) и  $L_S$ (дБ) соответственно [14]:

$$L_A = L_V + 20\lg(f) - 10; L_V = L_S + 20\lg(f) - 60; L_S = L_A - 20\lg(f) + 70.$$

Виброускорение, скорость и перемещения в линейных единицах могут быть получены из соответствующих уровней по формулам [13]

$$A = 10^{\frac{L_A - 120}{20}}, V = 10^{\frac{L_V - 146}{20}}, S = 10^{\frac{L_S - 222}{20}}.$$

Амплитудно-частотные спектры виброускорений, полученные после обработки вибросигналов от акселерометров при проведении замеров вибрационного воздействия на первый и второй двигатели, закреплённых на платформе, установленной на гидроопоры, выявляют (рис. 3) преобладающие частоты колебаний в спектре вибрационного воздействия и уровни виброускорений.

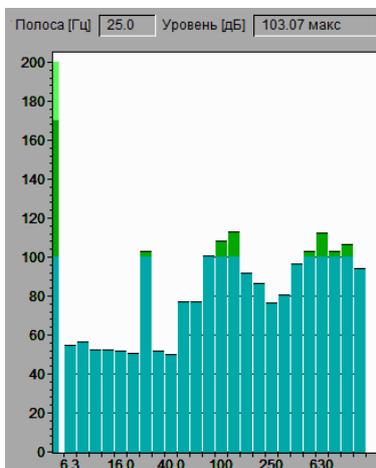


**Рис. 3. Спектры виброускорений (1/3 октавы) при неподвижном вязкоупругом основании:**  
а – при работе левого двигателя; б – при работе правого двигателя

Для представленных на рис. 3 при частоте 25 Гц уровни виброускорений в 102,10 дБ и 102,35 дБ для работающих левого и правого двигателей при выключенном виброростенде виброперемещения составят величину  $\approx 0,137 \cdot 10^{-3}$  м, определяемую как  $L_S = 102,1 - 20\lg(25) + 70 = 144,76$  дБ,

$$S = 10^{\frac{L_S - 222}{20}} = 10^{\frac{144,76 - 222}{20}} \approx 0,137 \text{ мм.}$$

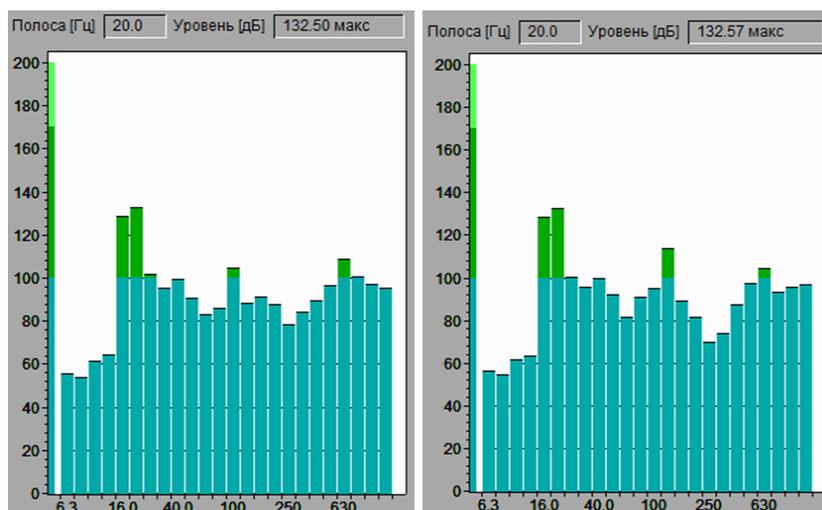
На рис. 4 представлен спектр виброускорений на неподвижном вязкоупругом основании и одновременной работе левого и правого двигателей (на частоте 25 Гц уровень виброускорения составляет 103,07 дБ).



**Рис. 4. Спектр виброускорений (1/3 октавы) при одновременной работе левого и правого двигателей и неподвижном вязкоупругом основании**

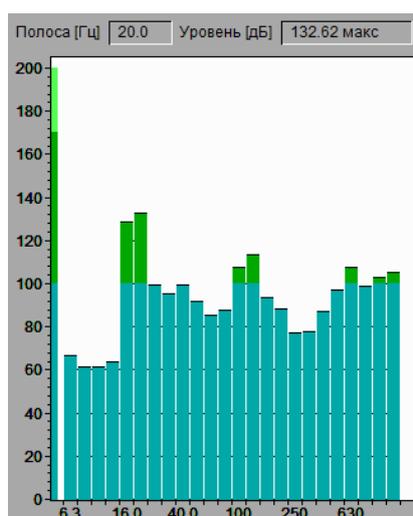
Амплитудно-частотный спектр виброускорений (рис. 4), полученный после обработки вибросигналов от вибрационного воздействия при первом и втором работающих двигателях и выключенном вибростенде не является равномерным. Здесь спектр виброускорений во всей полосе повторяет спектры отдельно работающих двигателей. Это указывает, что периодического перетока энергии колебательного движения в электромеханической системе от одного двигателя к другому двигателю нет, т.е. данная энергия периодически не оказывается как бы сосредоточенной то в одном, то в другом двигателе [2, 3].

На рис. 5 представлены спектры виброускорений при вибрирующем вязкоупругом основании и работе левого и правого двигателей. При частоте 20 Гц уровень виброускорения составляет 132,5 дБ при работающем левом и 132,57 дБ правом двигателях.



**Рис. 5. Спектры виброускорений (1/3 октавы) при вибрирующем вязкоупругом основании:**  
*a* – при работе левого двигателя; *б* – при работе правого двигателя

На рис. 6 представлен спектр виброускорений при вибрирующем вязкоупругом основании и одновременной работе левого и правого двигателей (на частоте 20 Гц уровень виброускорения составляет 132,62 дБ).



**Рис. 6. Спектр виброускорений (1/3 октавы) при одновременной работе левого и правого двигателей и вибрирующем вязкоупругом основании**

Амплитудно-частотный спектр виброускорений (рис. 6), полученный после обработки вибросигналов от вибрационного воздействия при первом и втором работающих двигателях

и включенном вибростенде не является равномерным, и в основном данный спектр также повторяет спектры отдельно работающих двигателей (рис. 5). На рис. 6 амплитуды спектральных составляющих виброускорений во всей полосе повышены по сравнению с амплитудами спектра виброускорений на (рис. 5). Это можно объяснить только возросшим уровнем возбуждаемой вибростендом вибрации.

Кроме того, в спектре (рис. 6), а также и в спектрах виброускорений отдельно работающих двигателей (рис. 5) наблюдается рядом стоящие с полосой частот 20 Гц и спектральные составляющие в полосе частот 16 Гц. Их средняя частота равна частоте возбуждения вибростенда  $f_{вс} = (f_{16} + f_{20})/2 = 18$  Гц.

В электромеханической системе (рис.1) возникает взаимное действие вибростенда и работающих двигателей. В этом случае может наблюдаться переток энергии колебательного движения в электромеханической системе от одного двигателя к другому через платформу вибростенда за счёт возбуждаемой им вибрации. В результате чего в электромеханической системе могут возникать биения, когда частоты  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  главных колебаний двигателей близки друг к другу.

Для представленных на рис. 5 и рис. 6 в полосе частот 20 Гц уровней виброускорений в 132,50 дБ, 132,57 дБ и 132,62 дБ максимальные уровни виброперемещений работающих левого и правого двигателей при включенном вибростенде и совместно составят величину  $\approx 4,99 \cdot 10^{-3}$  м, определяемую как  $L_S = 132,62 - 20\lg(20) + 70 = 175,979$  дБ

$$S = 10^{\frac{L_S - 222}{20}} = 10^{\frac{175,979 - 222}{20}} \approx 4,99 \text{ мм.}$$

Для оценки распределения энергии колебательного движения в электромеханической системе от одного двигателя к другому через платформу вибростенда по возникающим биениям, когда частоты  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  главных колебаний двигателей близки друг к другу, необходимо моделирование гармонических колебаний по данным, полученным в ходе эксперимента.

#### *Моделирование гармонических колебаний*

В данной работе авторы исследуют влияние параметров вибрационного процесса двух работающих двигателей с неуравновешенными роторами, закреплённых на одной платформе, установленной на гидроопорах. Целью работы являлось моделирование процессов сложения колебаний от двух работающих двигателей, а также как частный случай выделение биения этих колебаний.

При моделировании процессов сложения двух гармонических колебаний по данным, полученным в ходе эксперимента, удобно эти гармонические колебания двигателей представить по формулам:

$$y_1 = A_1 \cos(\Omega_1 t + \varphi_1); y_2 = A_2 \cos(\Omega_2 t + \varphi_2).$$

При действии вибрации – на работающие левый и правый двигатели их уровни виброускорений в полосе спектра виброускорений 25 Гц примем 102,35 дБ, что соответствует их равным амплитудам виброперемещений  $A_1 = A_2 = Y_m = 0,137 \cdot 10^{-3}$  м, (рис. 3) и (рис. 6). Пусть при действии вибрации вибростенда имеем расстройки двигателей по частоте  $\Delta f_{дв.1} = f_{1.1} - f_{1.2} = 1$  Гц и  $\Delta f_{дв.2} = f_{2.1} - f_{2.2} = 1$  Гц.

Тогда круговые частоты главных колебаний двигателей при включённом вибростенде равны  $\Omega_1 = 2\pi f_1 = 157,0795$  рад/с и  $\Omega_2 = 2\pi f_2 = 150,796$  рад/с.

При таких условиях для результирующего колебания, применяя формулу для суммы косинусов, получим

$$y_{рез} = 2 \cdot A_1 \cdot \cos\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t + \frac{\pi}{2}\right),$$

где  $a = \left| 2 \cdot A_1 \cdot \cos\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t\right) \right|$  определяет закон изменения амплитуды результирующего колебания со временем. Так как множитель  $a$  может изменяться от  $-2$  до  $+2A$ , берем его абсолютную величину.

На рис. 7 – рис. 10 и представлены результаты моделирования гармонических колебаний по данным, полученным в ходе эксперимента.

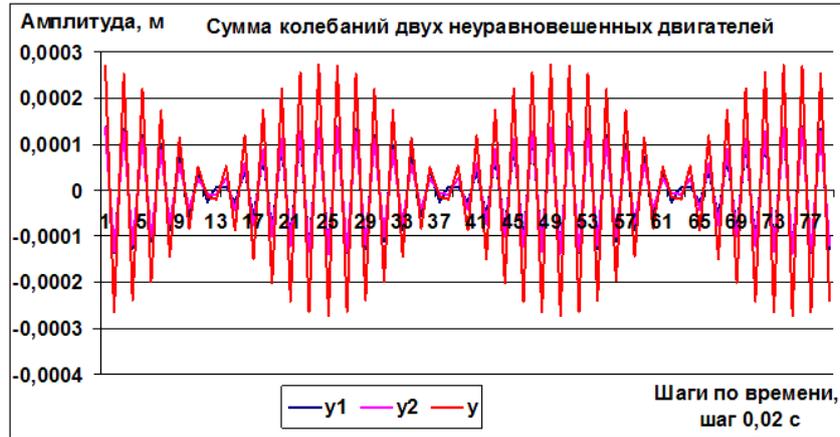


Рис. 7. Сумма колебаний двух неуравновешенных двигателей при  $\Delta f_{дв.1} = 1$  Гц



Рис. 8. Биения колебаний двух неуравновешенных двигателей при  $\Delta f_{дв.1} = 1$  Гц

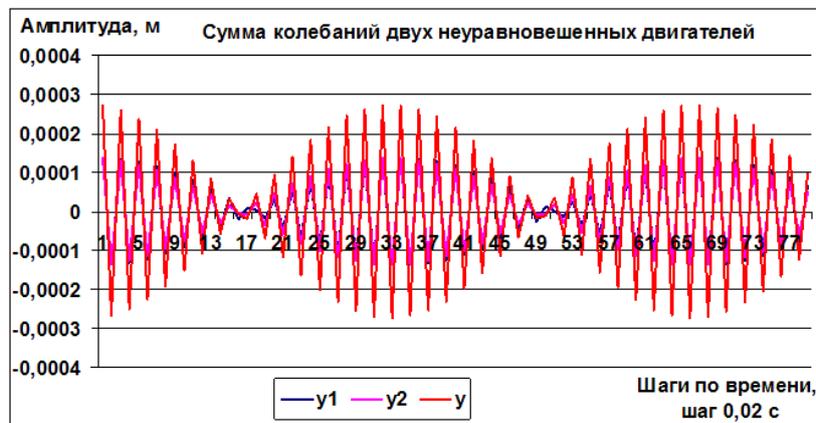


Рис. 9. Сумма колебаний двух неуравновешенных двигателей при  $\Delta f_{дв.2} = 0,75$  Гц

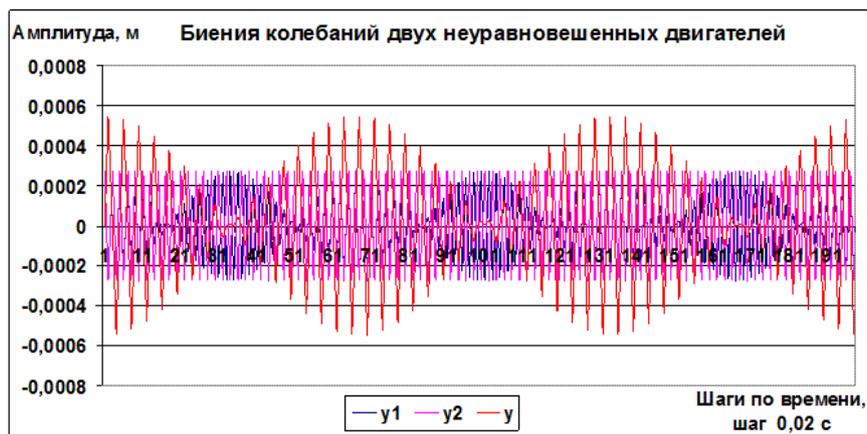


Рис. 10. Биения колебаний двух неуравновешенных двигателей при  $\Delta f_{дв.2} = 0,75$  Гц

В результате эксперимента было выявлено, что синхронизация осуществляется по тому двигателю, который ранее достиг стационарного режима. Обнаружено возрастание амплитуд низкочастотных гармоник спектра при синхронизации двигателей на вибрирующем основании. При этом за счет зависимости амплитуды колебаний от частоты нарушается линейность всей электромеханической системы, что вызывает низкочастотные биения. Следовательно, в данном случае синхронизация нарушается.

Выражение (7) дает возможность определить разностную частоту низкочастотных биений, которую невозможно измерить без сложных акустических приборов. Эти значения позволят сравнить их с диапазоном возможных резонансных частот и принять решение по подавлению виброколебаний.

Факт нарушения синхронизации при дополнительном вибровозмущении вязкоупругого основания предоставляет еще одну возможность нивелировать это отрицательное явление взаимной синхронизации.

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект №15-19-10026).*

#### Библиографический список

1. **Блехман, И.И.** Синхронизация в природе и технике / И.И. Блехман. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
2. **Кононенко, В.О.** Нелинейные колебания механических систем / В.О. Кононенко. – Киев: Наук. думка, 1980. – 382 с.
3. Вибрации в технике. Т. 2. Колебания нелинейных механических систем / И.И. Блехман [и др.]. – М.: Машиностроение, 1979. – 351 с.
4. **Фролов, К.В.** Колебания машин с ограниченной мощностью источника энергии и переменными параметрами // Нелинейные колебания и переходные процессы в машинах. – М.: Наука, 1972. – С. 5–16.
5. **Нагаев, Р.Ф.** Квазиконсервативные синхронизирующиеся системы / Р.Ф. Нагаев. – СПб.: Наука, 1996. – 252 с.
6. **Ходжаев, К.Ш.** Резонансные и нерезонансные случаи в задаче о возбуждении механических колебаний // Прикладная математика и механика. – 1968. – Т. 32. Вып. 1. – С. 85–100.
7. **Гордеев, Б.А.** Причины возникновения синхронизации в рельсовом транспорте / Б.А. Гордеев [и др.] // Приволжский научный журнал. – 2009. – № 4. – С. 47–53.
8. **Гордеев, Б.А.** Задача синхронизации вращения пары двигателей на упругом основании / Б.А. Гордеев, Д.А. Ковригин, А.В. Леонтьева // Вестник машиностроения. – 2011. – № 10. – С. 3-7.
9. **Гордеев, Б.А.** Причины возникновения фазовой синхронизации двух асинхронных двигателей в зависимости от параметров системы / Б.А. Гордеев, А.В. Леонтьева // Прикладная механика и технологии машиностроения: моделирование динамических систем: сборник научных трудов. – 2011. – Вып. 3. – С. 80–90.

10. **Бабаков, И.М.** Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 1968. – 560 с.
11. **Тимошенко, С.П.** Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М.: Наука. 1967. – 444 с.
12. **Журавлев, В.Ф.** Прикладные методы в теории колебаний / В.Ф. Журавлев, Д.М.Климов. – М.: Наука, 1988. – 328 с.
13. **Быховский, И.И.** Основы теории вибрационной техники / И.И. Быховский. – М.: Машиностроение, 1968. – 362 с.
14. Измеритель общей и локальной вибрации портативный ОКТАВА-110В/101ВМ. Руководство по эксплуатации. РЭ 4277-002-76596538-05; «ОКТАВА-ЭЛЕКТРОНДШАЙН» ООО «ПКФ Цифровые приборы». – М., 2006. С. 28.

*Дата поступления  
в редакцию 17.05.2016*

**Gordeev B. A.<sup>1,2</sup>, Okhulkov S. N.<sup>1,2</sup>, Plekhov A. S.<sup>2</sup>, Titov D. Yu.<sup>2</sup>**

### **BEATS OCCURRING AT UNSTABLE SYNCHRONIZATION OF THE TWO ENGINES MOUNTED ON A COMMON VISCOELASTIC BASE**

Institute of problems of mechanical engineering Russian Academy of Sciences (KIAM RAS)<sup>1</sup>,  
Nizhny Novgorod state technical university n. a. R. E. Alexeyev<sup>2</sup>

**The object of study:** In the article considered two main options of synchronization of two motors: synchronization on a fixed elastic base and synchronization with a vibrating base.

**Objective:** The article presents the results of experimental studies of the effects occurring at synchronization the two engines mounted on elastic foundation.

**Results:** Carry out spectral analysis and identify informative harmonic components that allow defining main harmonics generated by the vibration process.

**Application field:** in the system of shock damping of power electrical installations and mechanical equipment.

*Key words:* transitional process; synchronization; vibration; hydraulic support; experiment; low frequency beats; spectrum of vibrating processes.