

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЛЕКСЫ

УДК 537.311.3

А.Н. Мешков, С.В. Хорьков, А.Н. Яшина

НЕЛИНЕЙНЫЙ ОТКЛИК ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ КАК ФУНКЦИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ЕЕ МИКРОСТРУКТУРЫ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Показано, что эффективные характеристики неоднородных проводящих сред определяются одноточечными корреляторами полей: эффективная линейная проводимость среды выражается через квадратичный коррелятор, а нелинейная проводимость среды в целом определяется коррелятором четвёртой степени от электрического поля. Получена зависимость локального электрического поля в среде с неоднородностями углового типа. Проанализирована расходимость функции отклика в зависимости от характеристик среды.

Ключевые слова: неоднородные проводящие структуры, протекание, проводимость, нелинейная проводимость.

Рассмотрим неоднородную проводящую среду приготовленную из смеси изотропных материалов (композит), в каждом из которых плотность тока \vec{j} и электрическое поле \vec{e} связаны законом Ома $\vec{j} = \sigma \vec{e}$, где σ – проводимость материала. Характер неоднородности определяется как формой (острыми углами, сужениями и т. п.) и объемным содержанием материалов, так и различием их проводимостей. В сильно неоднородных средах, например в средах, находящихся в области перколяционного перехода, флуктуации локальных полей велики. Поэтому имеются участки, где в силу разогрева электронного газа проявляются нелинейные эффекты. Ограничимся изучением кубической нелинейности путём обобщения выражения для плотности тока в каждом материале

$$\vec{j} = \sigma \vec{e} + \chi \vec{e}^2 \vec{e}, \quad (1)$$

где χ – будет означать нелинейную локальную проводимость. В выражении (1) второе слагаемое мы будем полагать малым в сравнении с первым. Данное ограничение означает, что мы находимся в квазилинейном режиме. Определим эффективную линейную σ_{eff} и нелинейную χ_{eff} проводимости многокомпонентной среды из соотношения $\vec{J} = \sigma_{eff} \vec{E} + \chi_{eff} \vec{E}^3$, где

$$\vec{J} = \frac{1}{V} \int \vec{j} dV, \quad \vec{E} = \frac{1}{V} \int \vec{e} dV,$$

а V – объём композита. Выражение для диссипации энергии в единице объёма, в единицу времени имеет вид

$$\langle \vec{j} \vec{e} \rangle = \langle \sigma \vec{e}^2 \rangle + \langle \chi \vec{e}^4 \rangle. \quad (2)$$

В силу расщепления коррелятора $\langle \vec{j} \vec{e} \rangle$ и выражения (1) также можно записать:

$$\langle \vec{j} \vec{e} \rangle = \langle \vec{j} \rangle \langle \vec{e} \rangle = \sigma_{eff} \vec{E}^2 + \chi_{eff} \vec{E}^4. \quad (3)$$

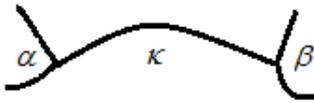


Рис. 1

Для определения эффективных характеристик разложим электрическое поле по степеням нелинейного параметра χ

$$\vec{e} = \vec{e}_0 + \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dots$$

В первом приближении по нелинейному параметру первое слагаемое в выражении (2) имеет вид $\langle \sigma \vec{e}^2 \rangle = \langle \sigma \vec{e}_0^2 \rangle + 2 \langle \sigma \vec{e}_0 \vec{e}_1 \rangle$. Покажем, что слагаемое

$2 \langle \sigma \vec{e}_0 \vec{e}_1 \rangle = 2 \int (\vec{e}_0, \vec{e}_1) dV / V$ обращается в ноль. Для этого от интегрирования перейдем к суммированию по проводящим каналам. $2 \langle \sigma \vec{e}_0 \vec{e}_1 \rangle = 2 \sum_k I_k U_k / V$ (рис. 1) Выражение в числителе представим в виде $2 \sum_k I_k U_k = \sum_{\alpha, \beta} I_{\alpha\beta} (\varphi_\alpha - \varphi_\beta)$, где α, β — независимые индексы суммирования, а $\varphi_\alpha - \varphi_\beta$ — разность потенциалов между узлами проводящих каналов связанная с первой поправкой по нелинейному параметру.

Второе слагаемое в выражении (2), в том же приближении записывается, как $\langle \chi \vec{e}^4 \rangle = \langle \chi \vec{e}_0^4 \rangle$. Приравнявая выражения (2) и (3) и сопоставляя слагаемые одного порядка малости, находим

$$\sum_{\alpha, \beta} I_{\alpha\beta} (\varphi_\alpha - \varphi_\beta) = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} \sum_{\beta} I_{\alpha\beta} - \sum_{\beta} \varphi_{\beta} \sum_{\alpha} I_{\alpha\beta}. \quad \text{В силу первого правила Кирхгофа}$$

$$\sum_{\beta} I_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha} I_{\alpha\beta} = 0.$$

Второе слагаемое в выражении (2), в том же приближении записывается, как $\langle \chi \vec{e}^4 \rangle = \langle \chi \vec{e}_0^4 \rangle$. Приравнявая выражения (2) и (3) и сопоставляя слагаемые одного порядка малости, находим

$$\sigma_{eff} = \frac{\langle \sigma \vec{e}_0^2 \rangle}{\langle \vec{e}_0^2 \rangle}, \quad \chi_{eff} = \frac{\langle \chi \vec{e}_0^4 \rangle}{\langle \vec{e}_0^4 \rangle}. \quad (4)$$

Таким образом, в квазинелинейном приближении линейная и нелинейная эффективные проводимости определяются корреляторами соответственно второй и четвертой степенями от поля. Важно отметить, что в данном приближении величина χ_{eff} выражается через поле \vec{e}_0 эквивалентной линейной среды. Выражения (4) были получены в работе [1] иным способом.

Рассмотрим поликристаллическую плёнку, приготовленную из материалов с проводимостями σ_1 и σ_2 . При протекании по ней тока в местах геометрических неоднородностей электрические поля могут достигать огромных значений. Вследствие этого высшие корреляторы поля могут иметь особенности.

В данной работе определено электрическое поле плёнки вблизи неоднородностей углового типа, фрагменты которых представлены на рис. 2, а и 2, б. Для нахождения поля необходимо решить уравнения:

$$\vec{j} = \sigma \vec{e}, \quad \text{div} \vec{j} = 0, \quad \text{rot} \vec{e} = 0 \quad (5)$$

и удовлетворить граничным условиям

$$(\vec{j} \vec{n})_1 = (\vec{j} \vec{n})_2, \quad (\vec{e} \vec{\tau})_1 = (\vec{e} \vec{\tau})_2,$$

где \vec{n} и $\vec{\tau}$ — соответственно нормальный и тангенциальный векторы к границе раздела материалов среды. В силу соотношения $\vec{j} = -\sigma \nabla \varphi$, первые два из уравнений (5) сводятся к уравнению Лапласа для потенциала φ

$$\Delta \varphi = 0, \quad (6)$$

которое справедливо в каждой из областей проводящей среды исключая границы. Потенциал будем искать в виде $\varphi(r, \theta) = r^\lambda f(\theta)$, где r, θ – полярные координаты, а функция $f(\theta)$ удовлетворяет уравнения $\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \lambda^2 f = 0$.

В качестве первого примера рассмотрим наиболее часто встречающиеся неоднородности в виде «уединенных» «углов» с раствором α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) (рис. 2, а).

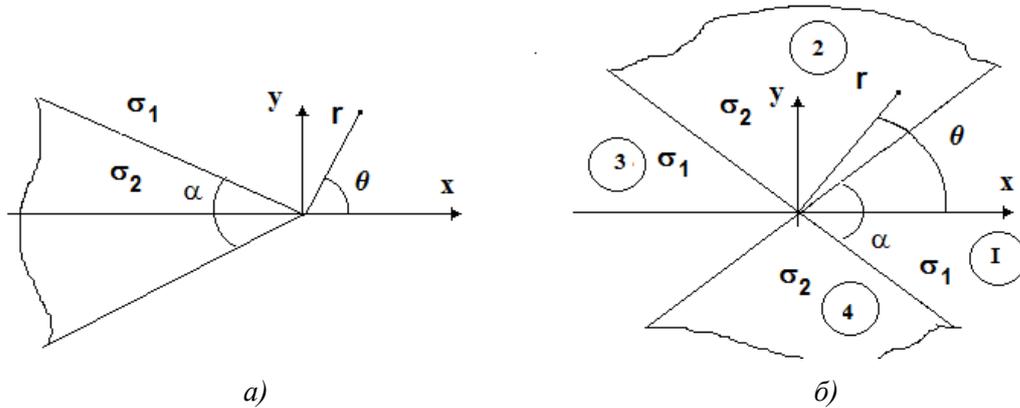


Рис. 2. Геометрии микрообластей пленки с различной проводимостью

Обозначим их проводимость как σ_2 , а проводимость оставшейся части среды – σ_1 . Представим потенциалы в областях с разной проводимостью в виде

$$\varphi_i(r, \theta) = r^\lambda A_i \sin(\lambda\theta + \theta_i), \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Определим распределение электрического поля в данной структуре соответствующее частному случаю, когда средний ток \vec{J} направлен по биссектрисе угла α . Тогда из симметрии задачи следует, что в каждом секторе справедливо соотношение $\varphi_i(r, \theta) = \varphi_i(r, -\theta)$, которое позволяет определить «начальные» фазы: $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = \pi/2 - \lambda\pi$. Условия непрерывности потенциала (это эквивалентно равенству тангенциальных составляющих поля) и нормальной составляющей тока на луче $\theta = \pi - \alpha/2$ приводит соответственно к уравнениям

$$A_1 \cos \lambda(\pi - \alpha/2) = A_2 \cos \lambda\alpha/2, \quad (8)$$

$$-\sigma_1 A_1 \sin \lambda(\pi - \alpha/2) = \sigma_2 A_2 \sin \lambda\alpha/2.$$

Из решения (8) соотношение, определяющее λ имеет вид

$$h = -\frac{\operatorname{tg} \lambda(\pi - \alpha/2)}{\operatorname{tg} \lambda\alpha/2}, \quad (9)$$

где $h = \sigma_2/\sigma_1$. Другой частный случай распределения локального поля соответствует ситуации, когда внешний ток \vec{J} направлен перпендикулярно к биссектрисе угла α . Из симметрии очевидно, что линия, совпадающая с биссектрисой угла, является эквипотенциалью. Это позволяет определить начальные фазы в выражениях (7). Если положить, что на луче $\theta = 0$ потенциал равен нулю, тогда $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -\lambda\pi$.

Граничные условия для потенциала и плотности тока на луче $\theta = \pi - \alpha/2$ соответствуют уравнениям

$$-A_1 \sin \lambda(\pi - \alpha/2) = A_2 \sin \lambda\alpha/2, \quad (10)$$

$$\sigma_1 A_1 \cos \lambda(\pi - \alpha/2) = \sigma_2 A_2 \cos \lambda\alpha/2,$$

из решения, которых следует

$$h = -\frac{\operatorname{tg} \lambda \alpha / 2}{\operatorname{tg} \lambda (\pi - \alpha / 2)}. \quad (11)$$

При произвольном направлении внешнего тока решением для поля будет являться суперпозиция частных решений со значениями λ из уравнений (9) и (11). Зная потенциал, запишем величину электрического в зависимости от расстояния до угла $|\vec{e}| \propto r^{\lambda-1}$. Нетрудно показать, что коррелятор $\langle \vec{e}^4 \rangle$, определяющий нелинейный кондактанс и другие эффективные и шумовые характеристики расходится при $\lambda \leq 1/2$.

Положим в уравнении (11) $\lambda = 1/2$, тогда $\operatorname{tg}^2 \alpha / 4 = -h$ ($h > 0$). Данное соотношение может быть выполнено только при условии, что $h = 0$, $\alpha = 0$. Таким образом, влияние угловых неоднородностей существенно на формирование нелинейного отклика среды, если они непроницаемы для тока и имеют предельно малый угол раствора. Если же внешний ток направлен по биссектрисе угла, то из уравнения (9) нетрудно установить, что коррелятор $\langle \vec{e}^4 \rangle$ ведет себя критическим образом при условии, что при малом угле раствора заострение является идеально проводящим.

Следовательно, в среде составленной из материалов с проводимостями σ_1 и σ_2 влияние «уединенных» углов на эффективные характеристики связанные с высшими моментами поля несущественно. Это связано с тем, что образование «иглообразных» микронеоднородностей маловероятно и, следовательно, их концентрация мала.

В качестве второго примера рассмотрим микрообласть, геометрия которой представлена на рис. 2, б. Области 1 и 3 имеют проводимость σ_1 , а области 2 и 4 – проводимость σ_2 . Найдём распределение электрического поля вблизи данной неоднородности. Электрическое поле определяется уравнениями (5) и условием на границе областей. Решение уравнения (6) для потенциала $\varphi(r, \theta)$ будем искать в виде

$$\varphi^{(k)} = r^\lambda A_k \cos(\lambda\theta + \theta_k), \quad (12)$$

где k – индекс, нумерующий области, образованные пересечением прямых, A_k, θ_k – некоторые постоянные. Данная структура имеет две оси симметрии, проходящие вдоль биссектрисы секторов с разной проводимостью. Направляя внешний ток вдоль одной из осей, замечаем, что потенциал электрического поля симметричен относительно этой оси и антисимметричен относительно другой. Такая симметрия позволяет однозначно определить значения фаз в каждом секторе.

Кроме того, рассматриваемая задача обладает симметрией инверсии $\vec{e}(-\vec{r}) = \vec{e}(\vec{r})$, что в итоге позволяет свести полную систему граничных условий (при любом направлении внешнего тока) к граничным условиям только между двумя соседними секторами. Выбирая систему координат с началом в точке пересечения прямых, направляя ось OX и внешний ток вдоль биссектрисы сектора с углом α и проводимостью σ_1 получим потенциал электрического поля в виде: $\varphi^{(1)} = r^\lambda A_1 \cos(\lambda\theta)$, $\varphi^{(2)} = -r^\lambda A_2 \sin(\lambda(\theta - \pi/2))$, где $k=1$ соответствует области $-\alpha/2 < \theta < \alpha/2$, а при $k=2$ угол θ меняется в интервале $\alpha/2 < \theta < \pi - \alpha/2$. При указанном направлении внешнего тока достаточно рассмотреть граничное условие лишь на одной границе между секторами, например, на луче $\theta = \alpha/2$. Приравнявая потенциалы и нормальные составляющие токов на данной границе, получаем систему алгебраических уравнений

$$A_1 \cos(\lambda \alpha / 2) + A_2 \sin(\lambda (\alpha - \pi) / 2) = 0, \quad (13)$$

$$A_1 \sigma_1 \sin(\lambda \alpha / 2) - A_2 \sigma_2 \cos(\lambda (\alpha - \pi) / 2) = 0.$$

Ненулевое решение существует только тогда, когда определитель системы равен нулю. Это приводит к выражению

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda \alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\lambda(\pi - \alpha)}{2} = h. \quad (14)$$

Уравнение (14) определяет значение λ , а одно из уравнений системы (13) (при вычисленном λ) дает величину A_1/A_2 .

Найдем теперь второе частное решение с направлением внешнего тока вдоль биссектрисы секторов с проводимостью σ_2 , т.е. по оси "OY". В данном случае потенциал (12) удовлетворяет соотношениям симметрии в первом и во втором секторах

$$\varphi^{(1)}(r, \theta) = -\varphi^{(1)}(r, -\theta), \quad (15)$$

$$\varphi^{(2)}(r, \theta) = \varphi^{(2)}(r, \pi - \theta).$$

Исходя из (12) и уравнений (15) приходим к следующим выражениям $\varphi^{(1)} = -r^\lambda A_1 \sin(\lambda\theta)$, $\varphi^{(2)} = -r^\lambda A_2 \cos \lambda(\theta - \pi/2)$. Используя непрерывность потенциала и нормальной составляющей плотности тока на луче с $\theta = \alpha/2$, приходим к уравнениям

$$A_2 \cos(\lambda(\alpha - \pi)/2) - A_1 \sin(\lambda\alpha/2) = 0,$$

$$A_2 \sigma_2 \sin(\lambda(\alpha - \pi)/2) + A_1 \sigma_1 \cos(\lambda\alpha/2) = 0,$$

из которых следует соотношение, определяющее λ :

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda \alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\lambda(\pi - \alpha)}{2} = \frac{1}{h}. \quad (16)$$

Таким образом, из решения данной задачи следует, что имеется два значения λ , определяемые соотношениями (14) и (16). К сингулярному значению электрического поля в начале координат приводит зависимость (14) при условии, что $h < 1$. Найдем такое значение h_c , при котором коррелятор поля $\langle \bar{e}^4 \rangle$ начинает расходиться. Подставляя в (14) значение $\lambda = 1/2$, получим

$$h_c = \operatorname{tg}(\alpha/4) \frac{1 - \operatorname{tg}(\alpha/4)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha/4)}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что максимальное значение $h_c = (\sqrt{2} - 1)^2$ соответствует значению угла $\alpha = \pi/2$.

Выводы

Выведены общие соотношения, определяющие эффективную линейную и нелинейную проводимости неоднородных сред. Из них следует, что для определения отклика необходимо знать распределение в них электрического поля.

Если проводящая среда сильно неоднородна, то следует ожидать усиления нелинейных свойств, определяемых коррелятором $\langle \bar{e}^4 \rangle$.

Такие свойства обнаруживались в многочисленных экспериментах, например, в [2-5]. В работе получено распределение электрического поля в двухкомпонентных плёнках с неоднородностями угловых типов. Для одной из них (рис. 2, б) показано, что при некотором конечном значении отношения линейных проводимостей компонент h_c коррелятор $\langle \bar{e}^4 \rangle$ расходится, что свидетельствует об усилении нелинейной проводимости среды. Современные планарные технологии способны создавать плёнки с заданным составом и заданной структурой неоднородностей. Допустим приготовлена плёнка, текстурированная ромбами с разной

линейной проводимостью компонент. Тогда варьированием проводимостей можно управлять нелинейным откликом такой проводящей структуры.

Библиографический список

1. **Stroud, D.** Nonlinear susceptibilities of granular matter / D. Stroud, P.M. Hui // Phys.Rev. – 1988. – V. B37. – P. 8719–8724.
2. **Yagil, Y.** Electrical breakdown measurements of semicontinuous metal films / Y. Yagil, G. Deutcher, D.J. Bergman // Phys. Rev. Lett. – 1992. – V. 69. – P. 1423–1426.
3. **Yagil, Y.** Third-harmonic generation in semicontinuous metal films / Y. Yagil, G. Deutscher // Phys. Rev. – 1992. – V. B46. – P. 16115–16121.
4. **Gefen, Y.** Nonlinear behavior near the percolation metal-insulator transition / Y. Gefen, W.H. Shih, R.B. Laibowitz, J.M. Viggiano // Phys. Rev. Lett. – 1986. – V. 57. – P. 3097–3100.
5. **Chakrabarty, R.K.** Nonlinear $I-V$ characteristics near the percolation threshold / R.K. Chakrabarty, K.K. Bardhan, A. Basu // Phys. Rev. – 1991. – V. B44. – P. 6773–6779.

*Дата поступления
в редакцию 18.10.2016*

A.N. Meshkov, S.V.Khorkov, A.N. Yashina

NONLINEAR RESPONSE OF A CONDUCTING MEDIUM AS A FUNCTION OF THE HETEROGENEITY OF ITS MICROSTRUCTURE

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeyev

It is shown that the effective characteristics of inhomogeneous conducting media are determined by the one-point correlators of fields: effective linear conductivity of the medium is expressed through a quadratic correlator and the non-linear conductivity of the medium as a whole is determined by the correlator to the fourth power from the electric field. The dependence of the local electric field in a medium with inhomogeneities of angular type. Analyzed the divergence of the response function depending on the characteristics of the environment.

Key words: inhomogeneous conducting structures, percolation, conductivity, nonlinear conductivity.