УДК. 53.072

Л.Н. Ерофеева, Н.В. Мохнина, Н.В. Юрова

НЕКОТОРЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Исследуются лакуны в распределении значений стохастических траекторий в логистической модели $x_{n+1} = a\left(x_n - x_n^2\right)$. Оцениваются границы соответствующих интервалов. Приводятся результаты компьютерных вычислений.

Ключевые слова: хаос, асимптотическая периодичность, лакуна.

Динамическая модель с дискретным временем (=*n*)

$$x_{n+1} = a\left(x_n - x_n^2\right),\ 0 < a \le 4\ \ x_0 \in (0,1)$$

в свое время привлекала к себе внимание исследователей необычным поведением своей траектории.

Отметим основные результаты, полученные при изучении этой модели [1, 2, 3]). Значения *a* можно разбить на интервалы, в каждом из которых почти все траектории имеют один и тот же тип. Для траекторий первого типа существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, траектории второго типа асимптотически периодичны. Для каждого целого $k > 0$ есть интервал значений *a,* для которых периоды траекторий равны

$$k \cdot 2^r\,(r = 0,1,...),$$

и по мере увеличения *a* наблюдается эффект «удвоения» периода. Такой интервал называется k – «окном». Наконец, для интервалов с траекториями третьего типа наблюдается хаотичность поведения траекторий.

Следующие рисунки иллюстрируют изложенное.

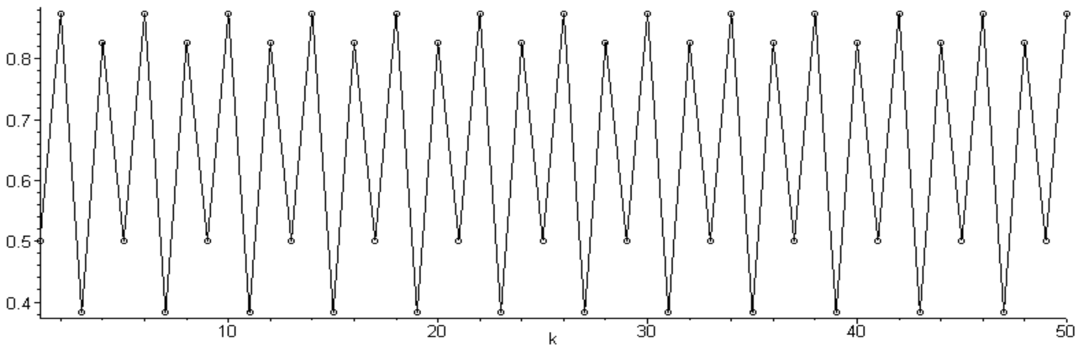

Рис. 1. *a*=3.5, *n*=50, *b*=0,5

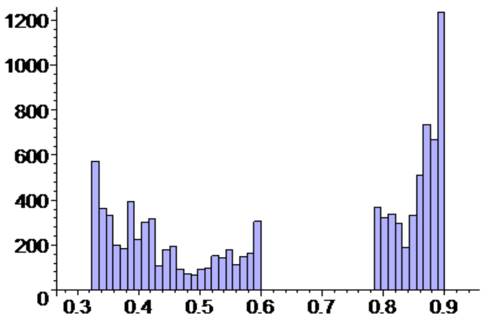

Рис. 2. *a*=3,60

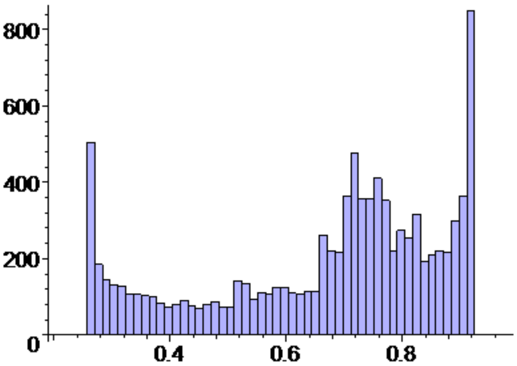

Рис. 3. ***a*****=3,70**

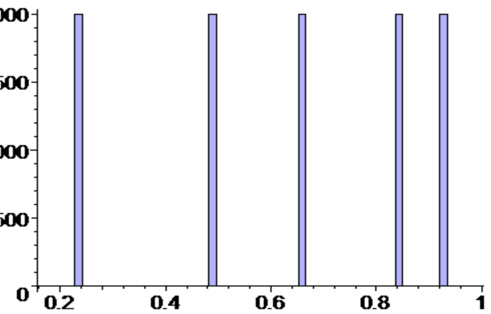

Рис. 4. ***a*****=3,74**

На рис. 2 и рис. 3 (взятые из [3]) изображены гистограммы для численных расчетов первых 1000 значений x_n. Для a<3 траектории относятся к первому типу. Второе окно занимает интервал (3; 3,56994567). Далее появляется стохастичность (3,5699…; 3,7389…), а затем 5 – окно. Попутно отметим, что в [2], на наш взгляд, ошибочно указан порядок последовательности окон периодичности: $k = 1,6,5,3,5,\ldots$.

Мы ограничимся рассмотрением первого интервала хаотичности (3,5699…; 3,7389…). Конечная цель – установить вероятностный закон распределения. Пока она представляется недостижимой. Вот одна из причин, по которой ситуация именно такова. Имеется единственное нетривиальное значение a=4, где траектории могут быть описаны явно.

Подстановка, $x = \sin^2 S$ сводит рекуррентное соотношение $x_{n+1} = 4\left(x_n - x_n^2\right)$ к $\sin^2 S_{n+1} = \sin^2(2S_n)$ и $x_n = \sin^2 2^n S_0$.

Если предположить, что последовательность $\{2^n S_0\}$ имеет равномерное распределение, то нетрудно показать, что $\operatorname{mod}\pi\{x_n\}$ имеет плотность распределения

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (0 < x < 1).$$

В [2] авторы приводят это выражение, но не утверждают, что закон именно таков. В действительности это так, но для доказательства приходится использовать метрическую теорию чисел. Еще одна причина заключается в отсутствии априорных предположений о законе распределения и, следовательно, необходимо получить достаточно большой экспериментальный материал, чтобы можно было высказать какие-либо гипотезы.

Ввиду изложенного мы ставим перед собой более простую задачу. На рис. 2 показано, что значения x_n при a=3,6 попадают в два непересекающиеся интервала.

Вопрос следующий: наблюдается ли это явление для остальных a из рассматриваемого интервала хаотичности. Ну и, конечно же, желательно оценить границы указанных интервалов. В этом направлении в работе [3] получен важный результат.

Предложение. Если $x_0 \in \left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^3}{16}; \frac{a}{4} \right)$, то x_n при n>0 также принадлежит этому интервалу. Если же x_0 взято вне интервала, то при достаточно большом n x_n в этот интервал попадает.

Высказано также предположение, что границы $\frac{a^2}{4} - \frac{a^3}{16}$ и $\frac{a}{4}$ точны.

Далее приводятся некоторые данные компьютерных вычислений для a=3,57; 3,58; …; 3,74.

Таблица 1

a	$x_{\min}$	Лакуны X_1	X_2	$x_{\max}$	a_1	$a_0 = a/4$	a_3	a_2
3,57	0,34274	0,56210	0,80422	0,89242	0,34251	0,89250	0,56265	0,80396
3,58	0,33796	0,57065	0,80100	0,89446	0,33644	0,89500	0,57447	0,79927
3,59	0,33095	0,58529	0,79490	0,89726	0,33025	0,89750	0,58706	0,79406
3,60	0,32630	0,59430	0,79140	0,89920	0,32400	0,90000	0,60039	0,78848
3,61	0,31786	0,61388	0,78276	090243	031766	0,90250	0,61445	0,78247
3,62	0,31225	0,62651	0,77736	0,90465	0,31122	0,90500	0,62923	0,77600
3,63	0,30471	0,64472	0,76906	0,90750	0,30471	0,90750	0,64469	0,76906
3,64	0,29812	0,66074	0,76168	0,91000	0,29811	0,91000	0,66081	0,76164
3,65	0,29164	0,67693	0,75405	0,91243	0,29142	0,91250	0,67753	0,75371
3,66	0,29066	0,67775	0,75460	0,91302	0,28465	0,91500	0,69481	0,74527
3,67	0,27878	0,68120	0,70982	0,91718	0,27779	0,91750	0,71283	0,73625
3,68	0,27091	———		0,91998	0,27084	0,92000	0,73077	0,72676
3,69	0,26440	———		0,92231	0,26381	0,92250	0,74929	0,71665
3,70	0,25785	———		0,92463	0,25687	0,92500	0,76805	0,70595
3,71	0,25141	———		0,92689	0,24947	0,92750	0,78693	0,69464
3,72	0,24217	———		0,93000	0,24217	0,93000	0,80581	0,682711
3,73	0,24961	———		0,92788	0,23478	0,93250	0,82454	0,67012
3,74	0,23350			0,93309	0,22798	0,93500	0,84296	0,65687

Эти данные были получены при 50 первых значений x_n. Значение x_0 было взято равным 0,45, чтобы избежать попадания вне интервала $\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^3}{16}; \frac{a}{4} \right)$ из приведенного ранее предположения.

Как видно из табл. 1, лакуны в распределении значений x_n действительно наблюдаются, но не при всех значениях a. Во втором и в третьем столбцах приведены граничные значения лакун.

Таблица 2

$a = 3{,}60$										
S	0,89100	0,34963	0,81862	0,53453	0,89570	0,33632	0,80358	0,56822	0,88325	0,37123
	0,84029	0,48312	0,89896	0,32700	0,79226	0,59250	0,86920	0,40929	0,87035	0,40623
	0,86833	0,41160	0,87189	0,40211	0,86551	0,41904	0,87638	0,39002	0,85647	0,44255
	0,88813	0,35768	0,82705	0,51494	0,89920	0,32630	0,79140	0,59430	0,86800	0,41247
	0,87242	0,40069	0,86450	0,42170	0,87792	0,38583	0,85308	0,45121	0,89145	0,34836
T	0,32630	0,32700	0,33632	0,34836	0,34963	0,35768	0,37123	0,38583	0,39002	0,40069
	0,40211	0,40623	0,40929	0,41160	0,41247	0,41904	0,42170	0,44255	0,45121	0,48312
	0,51494	0,53453	0,56822	0,59250	0,59430	0,79140	0,79226	0,80328	0,81862	0,82705
	0,84029	0,85308	0,85647	0,86450	0,86551	0,86800	0,86833	0,86920	0,87035	0,87189
	0,87242	0,87638	0,87792	0,88325	0,88813	0,89100	0,89145	0,89570	0,89896	0,89920

В качестве иллюстрации приведем полные данные вычислений x_n $(n = 1,...,50)$ для a = 3,6 (табл. 2).

В табл. 2 S – последовательность $\{x_n\}$, а T – она же, но упорядоченная по возрастанию. Как видим: лакуна имеет место между 0,59430 и 0,79140.

Возвращаясь к табл. 1, обратим внимание на последние два столбца. В них даются значения a_2 и a_3 членов последовательности $a_0 = \frac{a}{4}, a_1, a_2, a_3, ...$ с $a_{n+1} = a \cdot a_n(1 - a_n)$.

Обнаруживается, что a_2 и a_3 при $a_2 > a_3$ дают хорошее приближение к границам лакуны. При $a_2 < a_3$ лакун нет. Равенство $a_2 = a_3$ достигается при a=3,678573510…, что получено численным решением уравнения $a_2 = a_3$ или равносильного ему $a_2 = 1 - \frac{1}{a}$.

Интересен вопрос о точности в оценке размера лакуны в зависимости от числа N первых членов последовательности $\{x_n\}$, используемых при вычислениях.

Далее в табл. 3 приводятся данные для a=3,6, N =10,50, 100,1000.

Таблица 3

N	$x_{\min}$	Лакуны X_1	X_2	$x_{\max}$	a_1	$a_0 = a/4$	a_3	a_2
10	0,34162	0,576000	0,80981	0,88933	0,32400	0, 9000	0,60039	0,78848
50	0,32630	0,59430	0,79140	0,89920				
100	0,32412	0,60011	0,78862	0,89996				
1000	0,32570	0,60039	0,78849	0,89941				

Можно выдвинуть предположение, что границы a_1, a_0, a_3, a_2 – точные.

В заключение отметим, что интервалы, разделенные лакуной, содержат почти одинаковое количество членов последовательности $\{x_n\}$.

Библиографический список

1. **Берже, П.** Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. – М.: Изд. «Мир», 1991.
2. **Лихтенберг, А.** Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман. – М.: Меркурий Пресс, 2000.
3. **Галкин, В.М.** Вероятностные характеристики одного детерминированного процесса / В.М. Галкин, Л.Н. Ерофеева, И.Н. Толкачев // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – Н.Новгород. – 2013. – №1(98).

Дата поступления
в редакцию 19.01.2017

L.N. Erofeeva, N.V. Mokhnina, N.V. Yurova

SOME PROBABILITY CHARACTERISTICS OF LOGISTIS MODEL

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeyev

Purpose: To study some aspect of the trajectory values distribution at discrete logistic model.
Design/methodology/approach: Numerical methods for obtaining information are used.
Findings: The lacunae in the value distribution are discovered. The estimates of the boundaries of the corresponding intervals are given.
Research limitations/implications: There are some unresolved questions.
Originality/value. The theoretical explanation of the exact bounds is given.

Key words: Haos**,** asimptotic periodicy, lacuna.