# МАШИНОСТРОЕНИЕ И ТРАНСПОРТ: ТЕОРИЯ, ТЕХНОЛОГИИ, ПРОИЗВОДСТВО

**УДК 621. 882. 6**

**Б.Ф. Балеев**

## РАСЧЁТ ГРУППОВОГО БОЛТОВОГО СОЕДИНЕНИЯ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Рассмотрена методика расчёта группового болтового соединения, основанная на принципах и методах теоретической механики, применимая и к другим соединениям, например, сварным, заклёпочным. Необходимость применения единой методики связана с большим разнообразием подходов и отсутствием их обоснований. Предлагается единая схема, согласно которой определяются: положение центральной системы координат, внешние силы проецируются на оси, параллельные центральным, затем определяются проекции главного вектора и главного момента на центральные оси координат. Далее используется принцип независимости действия сил и определяется наиболее нагруженный болт, размер которого находится из условий прочности.

*Ключевые слова*: групповое болтовое соединение, центральные оси координат, главный вектор, главный момент.

Расчёты группы болтов, изложенные в учебниках, понятны лишь в простейших случаях. Что касается расчётных схем, то они выполнены в большом разнообразии, в котором не видны какие-либо принципы, представляющие предмет обучения.

Для расчёта обычно даётся схема конструкции с величинами и координатами приложения нагрузок (сил и моментов), координатами крепёжных элементов (болтов или шпилек), то есть частично схема конструкции и частично расчётная схема.

Расчётной является схема с необходимыми параметрами: составляющими главного вектора и главного момента, приведёнными к центру системы координат, расположенной в центре площади, образованной поперечными сечениями болтов крепления основания редуктора к раме или фундаменту, нагрузками (силами и моментами) и координатами их приложения. В дисциплине «Сопротивление материалов» этот центр приведения называют центром тяжести плоской фигуры. Тяжесть не имеет никакого отношения к плоской фигуре, поэтому далее будут использоваться термины «центр плоской фигуры» и «центральная система координат».

По исходной схеме находят центр фигуры, образованной поперечными сечениями болтов. Если площадь – симметричная фигура (при симметричным расположении болтов крепления), то центр системы координат будет в центре симметрии. При отсутствии симметрии координаты центра плоской фигуры определяются известным способом: берутся произвольные оси координат, относительно которых находят координаты центра площади, разделив сумму статических моментов элементов площади относительной каждой оси, на сумму площадей этих элементов:

$$X_c = \sum x_i A_i \,/\Sigma A_i\,; \qquad Y_c = \sum y_i A_i \,/\Sigma A_i. \tag{1}$$

Приведение внешних нагрузок (сил и моментов) опирается на известные принципы теоретической механики: любую систему сил можно свести к двум параметрам – главному вектору и главному моменту. Для расчётов удобно пользоваться проекциями главного вектора и главного момента на оси координат: $R_x$, $R_y$, $R_z$, $M_x$, $M_y$, $M_z$. Под действием сил $R_x$, $R_y$, $R_z$, приложенных в указанном центре и направленных вдоль центральных осей, закреплённое основание перемещается поступательно (в пределах упругости) параллельно соответствующей силе. Упругое перемещение ограничивается реакцией болтов. Под действием моментов $M_x$, $M_y$, $M_z$ закреплённое основание поворачивается (в пределах упругости) относительно соответствующей центральной оси. Но это происходить лишь в случае предварительной затяжки болтов, когда закреплённое основание составляет одно целое с рамой или фундаментом. При незатянутых болтах поворот будет происходить относительно кромки снования, а не центральной оси, и распределение нагрузок будет иным. В случае предварительной затяжки каждой из шести составляющих нагрузок соответствует своя упругая деформация: трём силам $R_x$, $R_y$, $R_z$, направленным по осям координат, соответствуют линейные деформации (перемещения в пределах упругости) вдоль центральных осей: $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$. Эти деформации ограничены сопротивлением болтов.

Трём моментам $M_x$, $M_y$, $M_z$ относительно центральных осей соответствуют угловые деформации (в пределах упругости):$\Delta\varphi_x, \Delta\varphi_y, \Delta\varphi_z$относительно тех же осей. Величины деформаций ограничены сопротивлением крепёжных элементов (болтов или шпилек).

В основе расчётов – принцип независимости действия сил: действие каждой силы (или момента) рассматривается отдельно и независимо от других, а эффекты действия векторно складываются. Наиболее нагруженным элементом будет тот, где наибольшая векторная сумма.

Внешние силы в точках приложения раскладываются по трём осям, параллельным центральным, что существенно упрощает приведение сил и моментов, например, $R_x$ – проекция главного вектора на ось $x$, равна сумме проекций всех сил на ось $x$:

$$R_x = \sum F_{ix} \ .$$

Аналогично получаются $R_y = \sum F_{iy}$ и $R_z = \sum F_{iz}$, то есть силы, направленные параллельно одной из осей, нужно просто алгебраически сложить, взяв со знаком плюс те из них, которые расположены в положительном направлении оси.

Моменты представлены в виде векторов, поэтому с ними проводятся аналогичные действия: векторы-моменты алгебраически складываются, так как у них всего два направления: положительное – вдоль положительного направления оси, и отрицательное – противоположного направления, то есть

$$M_x = \sum M_{ix}, M_y = \sum M_{iy} \ , \qquad M_z = \sum M_{iz} \ .$$

Три из шести компонентов главного вектора и главного момента дают перемещения (в пределах упругости) закреплённого болтами основания в горизонтальной плоскости, а три оставшихся – в вертикальной плоскости.

В горизонтальной плоскости нагрузки на болты дают: горизонтальные силы $R_x$, $R_z$ и момент относительно оси $y$ – $M_y$.

Нагрузки на болты в вертикальном направлении (вдоль оси y) дают: сила $R_y$, и моменты $M_x$ и $M_z$.

Используется правосторонняя система координат, где ось $y$ направлена вертикально, ось $z$ – горизонтально вправо, вдоль оси валов, как принято в курсе «Сопротивление материалов». Ось $x$ – перпендикулярна плоскости $yz$.

Рассмотрим горизонтальную плоскость, действующие в ней нагрузки и реакции болтов.

Горизонтальная внешняя сила $R_x$, направленная по оси $x$, уравновешивается горизонтальными реакциями всех болтов. Так как сила $R_x$ приложена в центре площади, то поступательное смещение основания (в пределах упругости) вызывает реакции всех болтов равными по величине и направленными противоположно вектору $R_x$. Условие равновесия

$$R_x - zF_{R_x} = 0, \quad \text{откуда} \quad F_{R_x} = R_x / z,$$

где $F_{R_x}$ – реакция на одном болте на силу $R_x$ ; $z$ – число болтов.

Горизонтальная внешняя сила $R_z$, направленная по оси $z$, уравновешивается горизонтальными реакциями всех болтов. Так как сила $R_z$ приложена в центре площади, то поступательное смещение основания (в пределах упругости) вызывает реакции всех болтов равными по величине и направленными противоположно вектору $R_z$. Условие равновесия

$$R_z - zF_{R_z} = 0, \quad \text{откуда} \quad F_{R_x} = R_z / z,$$

где $F_{R_z}$ – реакция на одном болте на силу $R_z$; $z$ – число болтов.

Момент $M_y$ уравновешивается горизонтальными реакциями всех болтов, направленными перпендикулярными прямым, соединяющим начало координат с осями болтов. Направления реакций противоположны элементарным перемещениям осей болтов, которые перпендикулярны прямым, соединяющим начало координат с осями болтов. Эти прямые поворачиваются под действием момента $M_y$ относительно центра – начала координат, поэтому элементарные перемещения перпендикулярны им. Внешний момент $M_y$ уравновешивается несколькими моментами (по числу болтов), равными произведениям реакций болтов на их расстояния до центра поворота (начала координат).

Условия равновесия для группы болтов равноудалённых от центра поворота (начала координат)

$$M_y = zR_{M_y}\rho, \quad \text{откуда} \quad R_{M_y} = M_y / z\rho,$$

где $R_{M_y}$– реакция болта на момент $M_y$; $z$ – число болтов; ρ – расстояние от центра поворота до осей болтов.

Если болты находятся на разных расстояниях от центра поворота, то реакции $R_{M_y}$ будут разными, но их можно выразить через одну из них из условий пропорциональности расстояний болтов от центра поворота и величины реакции.

Теперь на каждом болте две реакции на силы $R_x$ и $R_z$ и, в общем случае, по одной разной реакции как по величине, так и по направлению, на момент $M_y$. Три вектора на каждом болте нужно сложить и набольшая сумма $F_0$ определит наиболее нагруженный болт. Затем записывается условие прочности соединения – отсутствие сдвига основания под действием максимальной горизонтальной силы: сила трения $F_{тр}$ должна быть не менее максимальной сдвигающей силы $F_0$. Сила трения обеспечивается усилием затяга $Q_з$:

$$F_{тр} = Q_з f, \quad \text{откуда} \quad Q_з = F_{тр}/f.$$

Определением усилия затяга заканчивается рассмотрение горизонтальных сил.

Осевые реакции болтов вызывают три фактора – осевая внешняя сила $R_y$ и два момента: $M_x$ и $M_z$.

Внешняя сила $R_y$ приложена в центре площади, образуемой сечениями болтов, поэтому реакции болтов будут одинаковы. Условие равновесия

$$\sum F_{iy} = 0 = R_y - zF_{R_y}, \quad \text{откуда} \; F_{R_y} = R_y / z.$$

Момент $M_x$ поворачивает основание относительно оси $x$, поэтому болты, расположенные по одну сторону от оси $x$, будут испытывать растяжение дополнительно к усилию затяга ($Q_з$), а по другую сторону – ослабление усилия затяга вследствие уменьшения деформации сжатия стыка. Условие равновесия

$$\sum M_{ix} = 0 = M_x - F_{M_x} z\,a, \quad \text{откуда } F_{M_x} = M_x / z\,a,$$

где $F_{M_x}$– сила растяжения одного болта, вызванная моментом $M_x$; $z$ – число болтов в ряду (по оси, параллельной $x$); $a$ – расстояние от болтов до оси $x$.

Момент $M_z$ поворачивает основание относительно оси $z$, вызывая растяжение болтов по одну сторону оси $z$, и ослабление затяжки по другую сторону оси. Условие равновесия

$$\sum M_{iz} = 0 = M_z - F_{M_z} z в, \quad \text{откуда } F_{M_z} = M_z / z\, в,$$

где $F_{M_z}$ – сила растяжения одного болта, вызванная моментом $M_z$; $z$ – число болтов в ряду (по оси, параллельной $z$); $в$ – расстояние от болтов до оси $z$.

Один из болтов находится одновременно в двух рядах, поэтому силы $F_{M_x}$и $F_{M_z}$ сложатся. Кроме этих, есть сила $F_{R_y}$, действующая одновременно на все болты, поэтому на одном из болтов, который расположен сразу в двух рядах, сложатся три силы:$F_{R_y}$, $F_{M_x}$и $F_{M_z}$и определят внешнюю нагрузку на на болт$_в$:

$$F_в = F_{R_y} + F_{M_x} + F_{M_z}.$$

Кроме внешней нагрузки, болт ещё нагружен усилием затяга $Q_з$. Силы не сложатся арифметически, так как болт и стык имеют разные податливости, поэтому внешняя нагрузка перераспределится в соответствии с этими податливостями. Известен закон Гука:

$$\Delta = FL/EA = F\lambda,$$

где $\Delta$ – деформация; $F$ – сила; $L$– длина элемента; $E$ – модуль упругости; $A$ – площадь поперечного сечения; $\lambda$ – податливость.

Реальная картина такова: вся внешняя нагрузка передаётся на болт, но при удлинении болта сжатый стык распрямляется, уменьшая свою реакцию на болт с усилия затяга $Q_з$ до величины остаточного затяга $Q_{з\ ост}$, поэтому максимальная нагрузка на болт будет равна:

$$F_{max} = Q_{з\ ост} + F_в\,.$$

По этой формуле невозможно найти максимальную нагрузку на болт ($F_{max}$), так как неизвестна величина остаточного затяга. Эту нагрузку определяют из условия совместности деформаций болта и стыка. Совместная деформация $\Delta$ равна

$$\Delta = F_в \chi \lambda_b = F_в (1\text{-})\chi \lambda_{ст}, \tag{2}$$

где $F_в$ – внешняя нагрузка; $\chi$ – коэффициент внешней нагрузки; $\lambda_b$ – податливость болта; $\lambda_{ст}$ – податливость стыка.

Из равенства (2) можно определить коэффициент внешней нагрузки $\chi$ **:**

$$\boldsymbol{X} = \lambda_{ст} / (\lambda_b + \lambda_{ст}).$$

Для грубой оценки можно использовать значение коэффициента внешней нагрузки для наиболее распространённых соединений. Он лежит в пределах 0,2 - 0,3. Можно определить податливости болта и стыка и найти $x$.

Площадь основания деформируется не вся. Деформация от болта или гайки распространяется вглубь под углом $45^0$. Для расчётов вместо конуса используют эквивалентный цилиндр с внутренним диаметром отверстия под болт, а наружным диаметром – большим внутреннего на толщину стыка.

## Определение опрокидывающего момента редуктора

Опрокидывающий момент редуктора возникает от окружных сил $F_t$ в зацеплении. Рассмотрим одноступенчатый редуктор. Если силы в зацеплении привести к осям валов, то будем иметь два крутящих момента, уравновешенных внешними моментами, и неуравновешенную пару сил, приложенную к корпусу редуктора, называемую опрокидывающим моментом $M_о$, вектор которого направлен по оси $z$:

$$M_о = F_t a_w = F_t(r_{w1} + r_{w2}) = M_б + M_т,$$

где $a_w$ – межосевое расстояние; $r_w$ – начальный радиус первого зубчатого колеса; $r_w$ – начальный радиус второго зубчатого колеса; $M_б$ – крутящий момент на быстроходном валу; $M_т$ – крутящий момент на тихоходном валу.

Этот момент следует добавить к приведённому моменту $M_z$. С каким знаком? Если передача нереверсивная, то со своим знаком. В одноступенчатом редукторе опрокидывающий момент направлен в сторону крутящего момента на ведущем (быстроходном) валу. Если вектор-момент совпадает с осью $z$, то знак «плюс». В случае реверсивной передачи знак опрокидывающего момента будет таким, который даст наибольшую абсолютную величину приведённого момента $M_z$.

В двухступенчатой передаче опрокидывающий момент равен разности крутящих моментов на входном и выходном валах. Крутящий момент на выходном валу больще момента на входном валу, поэтому опрокидывающий момент будет противоположен крутящему моменту на входном валу.

Осевые силы $F_{a.}$ и радиальные силы $F_r$ не дают моментов, приложенных к корпусу редуктора.

## Пример приведения внешних сил

На выходном конце вала расположено косозубое зубчатое колесо. Силы в зацеплении приведём к оси вала в месте установки колеса. Возьмём вспомогательную систему координат $x_1$,$y_1$, начало которой расположено в точке пересечения плоскости колеса с осью. После приведения получим три силы: $F_{t1}$, $F_{a1}$, $F_{r1}$ и два момента: $M_{x1}$ и $M_{z1}$. Будем считать все их положительными. Для удобства представления сил без чертежа обозначим их индексы в соответствии с осями координат, параллельно которым они направлены: $F_{t1} = F_x$, $F_{a1}= F_z$, $F_{r1}= F_y$.

Координаты начала вспомогательной системы в центральной системе координат: $x, y, z$.

Найдём проекции главного вектора и главного момента на центральные оси координат.

Проекции главного вектора равны сумме проекций всех внешних сил на центральные оси координат. В нашем случае действуют по одной внешней силе вдоль каждой оси, поэтому

$$R_x = F_x,\ R_y = F_y,\ R_z = F_z.$$

Проекции главного момента равны сумме проекций всех внешних моментов на центральные оси координат

$$M_x = - F_y z+ F_z y + M_{x1};\quad M_y= F_x z- F_z x;\quad M_z = - F_x y + F_y x + M_o + M_{z1}.$$

## Выводы

Предложена единая методика расчёта группового болтового соединения с опорой на методы и принципы теоретической механики. Внешние нагрузки (силы и моменты) проецируются на оси, параллельные центральным.

Проекции главного вектора и главного момента на центральные оси координат находятся алгебраическим сложением сил, параллельных соответствующим осям и аналогичным сложением векторов-моментов.

**Библиографический список**

1. **Андреев, В.В.** Детали машин и основы конструирования / В.В. Андреев, А.А. Ульянов; Нижегород. гос. техн. ун-т им. Р.Е. Алексеева. – Н. Новгород, 2013. – 267 с.
2. **Дунаев, П.Ф.** Конструирование узлов и деталей машин / П.Ф. Дунаев, О.П. Леликов. – М.: Машиностроение, 2002. – 536 с.

*Дата поступления*
*в редакцию 02.05.2017*

**B. F. Baleyev**

## CALCULATION OF THE GROUP BOLTED CONNECTION

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alexeyev

**Purpose:** Conversion to a common methodology of calculation of the group bolted connection based on the principles and methods of theoretical mechanics.
**Method:** Projection of the main vector and main moment on the central coordinate axis. Projecting loads on auxiliary coordinate axes. Definition of the projections of the main vector and main moment. Using the principle of independence of action forces.

*Key words*: the central coordinate axis, the main vector, the main moment.