**УДК 512.54**

**Л.Н. Ерофеева, С.В. Лещева, Н.В. Мохнина, Н.В. Юрова**

# О ПРОСТОЙ ГРУППЕ РИ $^2G_2(q)$

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

В статье для исключительной группы лиевского типа $^2G_2(q)$ проверяется выдвинутая в [2] гипотеза о том, что неединичный класс сопряженности в конечной простой неабелевой группе содержит коммутирующие элементы.

*Ключевые слова:* класс сопряженности, конечная группа, коммутирующие элементы, централизатор.

Обоснование гипотезы о существовании коммутирующих элементов в произвольной конечной простой неабелевой группе и частичная ее проверка изложена в [1], [3], [5], [6], [8], [13]. Основной причиной для введения гипотезы являются результаты Л. Н. Ерофеевой в [7] о транзитивности группы трансляций одного класса группоидов.

В предлагаемой статье проведем проверку гипотезы для простой группы Ри $^2G_2(q)$, где $q=3^{2k+1}, k\geq 1$. Сведения о группе $^2G_2(q)$ можно найти в [15], где приведен ряд утверждений о группе $^2G_2(q)$ и таблица характеров. Из таблицы характеров можно восстановить классы сопряженности элементов и соответствующие централизаторы, используя атлас Конвея [14]. Эта информация приводится в табл. 1.

***Таблица 1***

**Классы сопряженности группы $^2G_2(q)$**

| Класс | Порядок элементов класса | Порядок централизатора | Число классов |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | $q^3(q-1)(q^3+1)$ | 1 |
| $R^a$ | делит $\frac{q-1}{2}$ | $q-1$ | $\frac{q-3}{4}$ |
| $S^a$ | делит $\frac{q+1}{2}$ | $q+1$ | $\frac{q-3}{8}$ |
| $V^b$ | делит $q-\sqrt{3q}+1$ | $q-\sqrt{3q}+1$ | $\frac{q-\sqrt{3q}}{6}$ |
| $W^b$ | делит $q+\sqrt{3q}+1$ | $q+\sqrt{3q}+1$ | $\frac{q+\sqrt{3q}}{6}$ |
| $X$ | 3 | $q^3$ | 1 |
| $Y$ | 9 | $3q$ | 1 |
| $T$ | 3 | $2q^2$ | 1 |
| $T^{-1}$ | 3 | $2q^2$ | 1 |
| $YT$ | 9 | $3q$ | 1 |
| $YT^{-1}$ | 9 | $3q$ | 1 |
| $JT$ | 6 | $2q$ | 1 |

*Окончание табл. 1*

| *1* | 2 | *3* | 4 |
|---|---|---|---|
| $JT^{-1}$ | 6 | $2q$ | 1 |
| $JR^a$ | делит $q$–1 | $q-1$ | $\frac{q-3}{4}$ |
| $JS^a$ | делит $q$+1 | $q+1$ | $\frac{q-3}{8}$ |
| $J$ | 2 | $q(q^2-1)$ | 1 |

Отметим, что централизатор инволюции $J$ равен $C(J)=\langle J\rangle\times L_2(q)$. Группа проста для $k\geq 1$ [4, с. 175]. Порядок элементов в классе сопряженности делит порядок централизатора. Например, $R^a$– это класс элементов, порядок которых делит $q$–1.

Следует заметить, что классы $R^a$, $S^a$, $V^b$, $W^b$, $JR^a$, $JS^a$ – это классы полупростых элементов, т.е. элементов, чьи порядки взаимно просты с характеристикой поля $q$. Классы $X$, $T$, $T^{-1}$, $YT$, $YT^{-1}$ – это классы унипотентных элементов, т.е. элементов, чьи порядки равны степени $q$. В действительности это порядки 3 и 9. Классы $JT$, $JT^{-1}$ – классы смешанных элементов. Порядки смешанных элементов имеют в качестве делителя не только $q$. Кроме степеней с основанием 3, есть множитель 2. $J$ — класс инволюций, содержащий элементы второго порядка.

Проверим гипотезу для полупростых элементов. Наличие в полупростых классах коммутирующих элементов следует из теоремы.

**Теорема.** *В группе* $^2G_2(q)$ *полупростой элемент сопряжен со своим обратным.*

**Доказательство**. От группы $G_2(q)$ перейдем в алгебраическую группу $G$ над алгебраическим замыканием $F_q$, и покажем, что в ней полупростой элемент сопряжен со своим обратным. Из [10] известно, что полупростой элемент сопряжен с картановским элементом

$$h=\prod_{\alpha}h_\alpha(t_\alpha).$$

В диаграмме Дынкина ([12], с.296) имеется пара ортогональных корней $(\alpha,\gamma)$. Отражение с помощью $\omega=\omega_\alpha\omega_\gamma$, где $\alpha\perp\gamma$, $\omega$ – представитель элемента из группы Вейля, переводит элемент вида $h_\alpha(t_\alpha)$ в $h_{\omega(\alpha)}(t_\alpha)$ такой, что $\omega h_\alpha(t_\alpha)\omega^{-1}=h_{\omega(\alpha)}(t)$.

Это следует из соотношения $\omega_\alpha h_\beta(t)\omega_\alpha^{-1}=h_{\omega_\alpha(\beta)}(t)$ в формулировке леммы 20 ([10], с. 31).

Отражение, являющееся композицией отражений относительно двух ортогональных корней

$$\omega=\omega_\alpha\omega_\gamma,$$

переводит каждый корень в противоположный: $h_{\omega(\alpha)}(t_\alpha)=h_{-\alpha}(t_\alpha)$. Но из соотношения (8) определения 1([10], с. 32) $h_\alpha(t)x_\beta(u)h_\alpha(t^{-1})=x_\beta(t^{\langle\beta,\alpha\rangle}u)$,

следует $h_{-\alpha}(t_\alpha)=h_\alpha(t_\alpha^{-1})$.

Таким образом, сопряжение картановского элемента элементом $\omega$ переводит каждый множитель в $h$ в обратный:

$$\omega h_\alpha(t)\omega^{-1}=h_{\omega(\alpha)}(t)=h_{-\alpha}(t)=h_\alpha^{-1}(t).$$

Но так как множители коммутируют, значит и $h$ переходит в обратный:

$$\omega h\omega^{-1}=\prod_{\alpha}h_{\omega(\alpha)}(t_\alpha)=\prod_{\alpha}h_{-\alpha}(t_\alpha)=\prod_{\alpha}h_\alpha(t_\alpha^{-1})=h^{-1}.$$

Следовательно, полупростой элемент сопряжен со своим обратным в алгебраической группе – некотором максимальном торе.

Далее мультипликатор Шура группы $^2G_2(q)$ равен 1 [4]. Теперь воспользуемся результатом из статьи Т.А. Спрингера и Р. Штейнберга из ([11], с. 200), по которому и в группе $^2G_2(q)$ полупростой элемент сопряжен со своим обратным.

Наши рассуждения проходят при $t \neq t^{-1}$, когда $h$ не является инволюцией. Но по Теореме 2.1 из [2] в любой конечной простой группе класс инволюций содержит коммутирующие элементы. Следовательно, это верно и для группы $^2G_2(q)$. Полупростые классы разобраны.

Перейдем к рассмотрению унипотентных элементов. Централизаторы любого элемента и его обратного имеют один и тот же порядок. Из таблицы заключаем, что $X$ и $X^{-1}$ содержатся в одном классе.

Для остальных классов подобные рассуждения не проходят, так как имеются классы с одинаковым порядком централизатора. Это $T$ и $T^{-1}$ (3-элементы); $Y$, $YT$ и $YT^{-1}$ (9-элементы). Элементы классов Т и Т-1 помещаем в централизатор инволюции $C(J) = \langle J \rangle \times L_2(q)$. Точнее, в множитель $L_2(q)$, то есть в проективную группу. Но в проективной группе гипотеза верна [2].

Доказательство того, что унипотенты классов $Y$, $YT$ и $YT^{-1}$ содержат коммутирующие элементы основано на лемме из [2].

***Лемма.*** *Пусть x элемент порядка k в группе П и его централизатор* $z(x)$ *имеет порядок n. Если число классов сопряженности элементов порядка k с централизаторами порядков n меньше* $\varphi(k)$, *то x сопряжен с некоторой своей степенью. Здесь φ(k) – теоретико-числовая функция Эйлера.*

Заметим, что $\varphi(9) = 9(1 - \frac{1}{3}) = 6,$ а всего три класса порядка 9. Значит, в каждом классе есть коммутирующие элементы.

При доказательстве гипотезы для смешанных элементов (классы $JT$, $JT^{-1}$) помещаем их в централизатор инволюции, где они имеют вид $J \times T$ и $J \times T^{-1}$ соответственно. Поскольку элементы $T$ сопряжены в проективной группе $L_2(q)$, а компоненты на первом множителе совпадают, то элементы будут сопряжены в централизаторе инволюции. Следовательно, элементы из смешанных классов сопряженности коммутируют. Для элемента из смешанного класса найдётся коммутирующий элемент в том же классе.

**Библиографический список**


1. **Галкин, В.М.** Леводистрибутивные квазигруппы: дис. … д-ра мат. наук. – Горький, 1986.
2. **Галкин, В.М.** Коммутирующие элементы в классе сопряженности / В.М. Галкин, Л.Н. Ерофеева, С.В. Лещева // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 8. –С. 12–20.
3. **Галкин, В.М.** О φ - структуре на группах $E_7(q);E_8(q)$; $q$ - нечетно / В.М. Галкин, Н.М. Мохнина // IV Международная алгебраическая конференция,посвященная 60-летию профессора Ю.И. Мерзлякова: тез. докл. – Новосибирск: Ин-т математики. - 2000. – С. 135–143.
4. **Горенстейн, Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985. – 352 с.
5. **Елисеев, М. Е.** О $\varphi$-структуре на простых ортогональных группах в четной характеристике // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Математика. – 2004. – № 1 (2). – С. 61–70.
6. **Елисеев, М. Е.** О некоторых автоморфизмах групп $E_{7;8}(q)$; $q$ - нечетно // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. – 2004. – № 6. – С. 52–56.

7. **Ерофеева, Л.Н.** Об одном классе группщоидов / Л.Н. Ерофеева // Записки научных семинаров ПОМИ 305. – 2003. – 134 с.
8. **Лещева, С.В.** О φ - структуре на ортогональных группах $O_{2n+1}(q)$, $O_{2n}(q)^{\pm}$; $q$- нечетно / С.В. Лещева, Н.М. Мохнина // Международный алгебраический семинар, посвященный 70-летию кафедры Высшей алгебры МГУ: тез. докл. – М.: МГУ. 1999. – С. 38–46.
9. **Мохнина, Н.В.** $\varphi$- структура на симплектических и ортогональных конечных группах в нечетной характеристике: дисс. канд. мат. наук. – СПб., 2000. – 230 с.
10. **Стейнберг, Р.** Лекции о группах Шевалле / Р. Стейнберг. – М.: Мир, 1975. – 263 с.
11. Семинар по алгебраическим группам. – М.: Мир, 1973. – 315 с.
12. **Серр, Ж.-П.** Алгебры Ли и группы Ли / Ж.-П. Серр. – М.: Мир, 1969. – 375 с.
13. **Galkin, V.M.** On the $\varphi$-structure on the group $Sp_{2n}(q)$; $q$-odd / V.M. Galkin, N.V. Mochnina // International Conference dedicated to the 90 th Anniversary of L.S. Pontryagin. Avgust, 31 - September, 6. –M., 1998. – 28 p.
14. **Conway, I.H.** Atlas of finite Groups / I.H. Conway. – Oxford, 1965. – 252 p.
15. **Ward, H. N.** On Ree's series of simpie group / H. N. Ward // Trans. Amer. Math.Soc. – 1966. 121. № 1. – P. 62–89.

*Дата поступления*
*в редакцию 01.06.2017*

**L.N. Erofeeva, S.V. Leshcheva,N.V. Mokhnina, N.V. Yurova**

## ABOUT SIMPLEGROUP $^2G_2(q)$

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

**Purpose:** There is the conjecture that every conjugacy class of fin noabelian group contains the commuting elements. The conjecture for Ree group $^2G_2(q)$ is verified.
**Design/methodology/approach:** The formation on the structure of the exclusive groups of the Lie type is using.
**Findings:** This result is an stage of the testing of the general conjecture.
**Research limitations/implications:** Methods of this paper may be used for the investigation the other groups.
**Originality/value**: The result is new.

*Key words:* conjugacy class, simple group, switching elements, centralizer.