УДК 501

С.В. Лещева, Т.В. Лухманова, А.В. Волохин

ЗАМЕЧАНИЕ О ТЕОРЕМЕ Э. НЕТЕР

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Предлагается один из вариантов изложения материала, связанного с теоремой Э. Нётер, в курсе дополнительных глав математики, изучаемых в технических вузах. До настоящего времени соответствующий круг идей во втузах не обсуждался, хотя его трудно переоценить.

Ключевые слова: законы сохранения, лагранжевы уравнения поля, симметрии, пространственно-временные симметрии.

Исследование взаимосвязи «симметрия – закон сохранения» имеет долгую историю, итогом которой нужно считать теорему Эмми Нётер, установленную ею в 1918 году [(1)]. Эта теорема хорошо известна физикам-теоретикам и, является одним из их рабочих инструментов. Прикладники обычно не знакомы с соответствующей тематикой. Можно указать две причины этой ситуации. Во-первых профессиональные обязанности оставляют прикладникам мало времени для занятий теоретическими вопросами. Во-вторых, в технических вузах при изучении соответствующих дисциплин в лучшем случае теорема Нётер лишь упоминается. Играет роль также и сложность математического аппарата, применяемого в доказательствах. К примеру, в технических вузах не знакомят с понятием «группы» и «группы Ли», без чего излагать теорему Нётер считается неприличным.

Однако значение законов сохранения в жизни людей достаточно велико. Так, закон сохранения энергии не позволяет построить вечный двигатель, химические реакции не могут изменить индивидуальность атомов, делая недостижимой цель алхимиков. Интерес подогревают и интригующие заявления типа: закон сохранения энергии есть следствие однородности времени. Поэтому оправдано ознакомление студентов с тем, какова природа законов сохранения. Предпосылки к этому имеются, поскольку учебные планы предусматривают изучение уравнений в частных производных и вариационное исчисление. Далее предлагается вариант изложения вопроса, служащий указанной цели.

Начнем с изучения интуитивно ясного понятия сохраняющей величины, т.е. величины, значение которой не меняется со временем.

В классической механике это понятие формализуется следующим образом. Исходной является система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию механической системы. Без ограничения общности ее можно записать в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, ..., x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{aligned}, \tag{1}$$

где $x_i = x_i(t)$, а точка означает дифференцирование по времени. Под сохраняющейся величиной (или законом сохранения) понимают любую функцию $F(t, x_1, ..., x_n)$, принимающую постоянное значение на решении из (1).

Если не интересоваться пока вопросом нахождения законов сохранения, то в остальном ситуация совершенно прозрачна. Именно, справедливо следующее утверждение.

Предложение. Система (1) имеет n законов сохранения $F_1, ..., F_n$ таких, что произвольный закон сохранения есть функция от $F_1, ..., F_n$.

Доказательство использует тот факт, что общее решение системы (1) содержит n произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1(t, C_1, ..., C_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= q_n(t, C_1, ..., C_n) \end{aligned} \qquad (2)$$

Решив эту систему относительно постоянных $C_1, ..., C_n$, получаем n законов сохранения

$$C_1 = F_1(t, x_1, ..., x_n), ..., C_n = F_n(t, x_1, ..., x_n). \qquad (3)$$

В произвольном законе сохранения $F(t, x_1, ..., x_n)$ величины $x_1, ..., x_n$ можно выразить через $C_1, ..., C_n$ с помощью (2), а последние – через $F_1, ..., F_n$ с помощью (3), что и завершает доказательство.

В качестве примера рассмотрим уравнение гармонического осциллятора $\ddot{x} + x = 0$. Если положить $y = \dot{x}$, то это уравнение сводится к системе $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ с общим решением

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ y = -_1 \sin t + C_2 \cos t \end{cases}.$$

Отсюда следуют равенства

$$C_1 = x\cos t - y\sin t$$

$$C_2 = x\sin t - y\cos t,$$

правые части которых и дают законы сохранения.

Произвольный закон есть $F(x\cos t - y\sin t,\ x\sin t + y\cos t)$.

При исследовании распределенных систем, описываемых одной или несколькими полевыми функциями $u_1(x_1, ..., x_n), ..., u_k(x_1, ...x_n)$ под законом сохранения понимают нечто иное. Именно, законом сохранения называют систему $T = (T_1, ..., T_n)$, компоненты которой зависят от полевых функций и для которой выполняется равенство

$$\mathrm{Div} T \equiv \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial T_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial T_n}{\partial x_n} = 0. \qquad (4)$$

Чтобы понять происхождение этого определения, обратимся к примеру скалярного поля $u = u(x, y, z, t)$, в котором аргументами служат декартовы координаты и время. Равенство (4) в этом случае перепишется в виде

$$\mathrm{div}\bar{S} + \frac{\partial T_4}{\partial t} = 0, \qquad (5)$$

где векторное поле $\bar{S}$ имеет компоненты T_1, T_2, T_3. Если $\bar{S}$ достаточно быстро убывает на бесконечности, то интегрирование (6) по всему пространству с использованием теоремы Гаусса-Острогорадского дает

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint T_4 dxdydz = 0,$$

т.е. соответствующий тройной интеграл есть сохраняющаяся со временем величина. Компоненту же T_4 интерпретируют как плотность этой величины. Проиллюстрируем изложенное на примере уравнения колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$. Уже само уравнение можно записать в виде (4)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c^2}u_t\right)=0,\ u_x\equiv\frac{\partial u}{\partial x},\ u_t\equiv\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{6}$$

Еще одно равенство такого же типа:

$$\left(-2u_x u_t\right)_x+\left(u_x^2+\frac{1}{C^2}u_t^2\right)_t=0. \tag{7}$$

Плотности сохраняющихся величин в (6) и (7) это $-\frac{1}{c^2}u_t$ и $u_x^2+\frac{1}{c^2}u_t^2$. Для первой из них общеупотребительного названия нет, а вторую физики интерпретируют как плотность энергии струны.

Обратимся теперь к фундаментальному понятию, фигурирующему в теореме Э. Нётер, – понятию симметрии. Термин «симметрия» в математике и физике связывается с понятием преобразования и означает сохранение какого-либо свойства объекта при этом преобразовании. Например, симметрией является преобразование поворота окружности вокруг ее центра, при котором окружность переходит в себя. Теорема Э. Нётер имеет дело с объектами, описываемыми дифференциальными уравнениями, получающимися из так называемого принципа наименьшего действия Гамильтона. Отвлекаясь от ненужных деталей, традиционно присутствующих при изложении принципа Гамильтона в литературе, исходим из наличия так называемой функции Лагранжа (или лагранжиана) $L=L\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, зависящей от аргументов $x_1,...,x_n$ полевых функций $u_1,u_2,...,u_k$ и первых производных $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\left(\equiv u_{i,k}\right)$. Уравнениями поля служат

$$\frac{\partial L}{\partial u_i}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{i,j}}\right)=0;\ i=1...n,\ j=1...k \tag{8}$$

Так, уравнение колебаний струны получается при $L=\frac{1}{2}\left(u_x^2-\frac{1}{c^2}u_t^2\right)$.

Как известно, описание полей (и механических систем) неоднозначно в том смысле, что полевые функции и их аргументы можно выбирать различными способами. Достаточно вспомнить широкое использование различных систем координат в курсе анализа. Поэтому мы приходим к понятию преобразования $u(x)\to u^*\left(x^*\right)$ от «старых» полевых функций и их аргументов к «новым». Отбор нужных в дальнейшем преобразований производится в несколько этапов. Сначала мы оставляем преобразования, не меняющие вид уравнений поля. Таким преобразованием для уравнения колебаний струны служит, например, $x^*=x,\ t^*=t$, $u^*\left(x^*,t^*\right)=\lambda u(x,t)$ с константой $\lambda\neq 0$.

Несколько искусственный пример
$x^*=x,\ t^*=t, u^*\left(x^*,t^*\right)=x^{*2}u(x,t)$ нужного преобразования не дает. Однако оставшийся класс преобразований еще достаточно широк для применения теоремы Э. Нётер. Мы сужаем его, ограничиваясь *симметриями.*

Определение. Симметрией называется преобразование $x\to x^*,\ u\to u^*$, не изменяющее форму $Ldx_1...dx_n$, т.е. при котором $L\left(x^*,u^*,\frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)dx_1^*...dx_n^*=L\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx_1...dx_n$. Техническая проверка последнего равенства не представляет особых трудностей, если вспомнить о процедуре преобразования координат в двойном и тройном интегралах.

Указанное преобразование $x\to x,\ t\to t,\ u\to\lambda u$, хотя и сохраняет вид уравнения струны, но симметрией не является поскольку $Ldxdt$ при этом переходит в $\lambda^2 Ldxdt$. Однако преобразование $x \to \lambda x,\ t \to \lambda t,\ u \to u$ уже симметрией является.

Наконец, из симметрий выделяется подмножество «непрерывных симметрий». Под таковыми понимаются симметрии, зависящие от параметра, от которого непрерывно зависят функции, определяющие преобразования. Предполагается также, что тождественное преобразование получается при некотором значении параметра. Без ограничения общности можно считать это значение нулевым.

Пусть ε – такой параметр. Тогда с точностью до слагаемых более высокого порядка чем ε (при $\varepsilon \to 0$) можно записать симметрию в виде

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon X \\ u^* &= u + \varepsilon U \end{aligned}. \tag{9}$$

Именно для таких (бесконечно малых или инфинитезимальных) симметрий имеет место теорема Э.Нётер. Мы приводим ее формулировку для скалярного поля $u = u(x_1,...,x_n)$.

Теорема. Пусть $x_i^* = x_i + \varepsilon X_i,\ u^* = u + \varepsilon U -$ инфинитезимальная симметрия для лагранжиана $L = L\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$. Тогда уравнения Лагранжа (8) допускают закон сохранения $T = (T_1,...,T_n)$, где $T_i = LX_i + \left(U - \sum_j x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\frac{\partial L}{\partial u_i}$.

Здесь

$$u_i \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}. \tag{10}$$

Мы не будем давать доказательство, которое можно найти в литературе, чтобы не повторять громоздких выкладок, неизбежных в общем случае. Однако отметим ряд «подводных камней» при приведении этих выкладок. Один из них – это необходимость различать так называемые полные производные от просто частных производных. По замечанию В.И. Арнольда, [2] аппарат частных производных «удручающе» неинвариантен. Так, в производной $\frac{\partial}{\partial x_i} L\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ двусмысленность заключается в символе $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Если считать аргументы в L независимыми переменными, то при вычислении производной получаем один результат. Если же аргументы u и $\frac{\partial u}{\partial x}$ нужно учитывать как функции от x, то получаем «полную» производную и она дает другой результат. В формуле (4) для закона сохранения производные являются «полными». Можно было бы «полную» производную отличать символом $\frac{d}{dx_i}$, но обычно этого не делают.

Другой «подводный камень»: в условии симметрии фигурирует $L\left(x^*, u^*, \frac{\partial u^*}{\partial x^*}\right)$. Бесконечно малая симметрия, согласно (9), дает выражение для первых аргументов, но проблемой является нахождение аналогичного выражения для $\frac{\partial u^*}{\partial x^*}$, не фигурирующего в законе сохранения (10), но необходимого при проведении доказательства. Эта задача так называемого «продолжения преобразования», и она не является тривиальной.

Для поля, имеющего несколько компонент – $u = (u_1, u_2,...,u_k)$, закон сохранения незначительно изменяется: в правой части добавляются слагаемые типа второго из них для каждой компоненты поля. Если к тому же $n=1$, т.е. остается один аргумент $x=t$ (время!), то этим охватывается и случай классической механики.

Проиллюстрируем алгоритмическую сторону теоремы Нётер примерами.

1. Гармонический осциллятор, $\ddot{x}+x=0$.

Здесь $L=\frac{1}{2}\left(x^2-\dot{x}^2\right)$ и симметрией является сдвиг по времени $t^*=t+\varepsilon,\ x^*=x$. Инвариантность формы Ldt очевидна. В (10) надо положить $X=1$ и $U=0$ и тогда получаем $L\cdot 1-\dot{x}\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(x^2+\dot{x}^2\right)$, что является энергией. Вот здесь и иллюстрируется утверждение, по которому сохранение энергии следует из однородности времени.

2. Волновое уравнение $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-\frac{1}{c^2}u_{tt}=0$ получается исходя из лагранжиана $L=\frac{1}{2}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2-\frac{1}{c^2}u_t^2\right)$. Сдвиги по координатам x,y,z и по времени являются симметриями. Инфинитизимальная симметрия $x^*=x+\varepsilon,\ y^*=y,\ z^*=z,\ t^*=t,\ u^*=u$, т.е. при $X=1, U=0$ дает

$$T_1=L-u_x\frac{\partial L}{\partial u_x}=\frac{1}{2}\left(-u_x^2+u_y^2+u_z^2-\frac{1}{c}u_t^2\right)$$

$$T_2=\quad -u_x\frac{\partial L}{\partial u_y}=-u_xu_y$$

$$T_3=\quad -u_x\frac{\partial L}{\partial u_z}=-u_xu_z$$

$$T_4=\quad -u_x\frac{\partial L}{\partial u_t}=\frac{1}{c^2}u_xu_t$$

Плотность сохраняющейся величины $T_4=\frac{1}{c^2}u_xu_t$ вместе с полученными таким образом при сдвигах по y и z физики объединяют в вектор $\overline{p}=\left\{\frac{1}{c^2}u_xu_t,\ \frac{1}{c^2}u_yu_t\ ,\frac{1}{c^2}u_zu_t\right\}$, который они интерпретируют как плотность импульса поля. Сдвиг по времени приводит к плотности $W=\frac{1}{2}\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2+\frac{1}{c^2}u_t^2\right)$ интерпретируемой как плотность энергии поля.

Редукцией получаются аналогичные результаты для двумерного уравнения $u_{xx}+u_{yy}-\frac{1}{c^2}u_{tt}=0$ и для одномерного (уравнения колебаний струны) $u_{xx}-\frac{1}{c^2}u_{tt}=0$.

В механике с понятием импульса тесно связано понятие момента импульса. В простейшем случае движения одной частицы момент определятся формулой $\overline{M}=\left[\overline{r},\ \overline{p}\right]$, где $\overline{r}-$ радиус вектор частицы, а $\overline{p}-$ ее импульс. Можно также поступить и с введенной ранее плотностью импульса и получить плотность момента импульса для волнового уравнения. Для нее имеет место закон сохранения.

Теорема Нётер допускает обращение, т.е. закону сохранения соответствует некоторая симметрия. Таким образом, отыскание всех законов сохранения сводится к отысканию симметрий. Не вдаваясь в подробности, отметим, что эта задача, так называемого группового анализа [3] , где приходится решать системы уравнений в частных производных. Общая ситуация аналогична таковой в классической механике: Существует набор законов сохранения, из которых можно получить остальные. Обычно этот набор конечен, но есть исключения, к числу которых относится уравнение колебаний струны. Так, можно проверить, что $T=(T_1,T_2)$ – закон сохранения, если положить $T_1=F_1(x+t,\,u_x+u_t)+F_2(x+t,u_x-u_t)$, $T_2=-F_1(x+t,\,u_x+u_t)+F_2(x+t,u_x-u_t)$, где F_1 и F_2 – произвольные функции.

Библиографический список

1. E. Noeter Invariante Variationsprobleme. (русский перевод: Нётер Э. Инвариантные вариационные задачи // Вариационные принципы механики. – М.: Физматиздат, 1959.
2. **Арнольд, В.И.** Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М.: Наука, 1979
3. **Олвер, П.** Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. – М.: Мир, 1989.
4. **Визгин, В.П.** Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике / В.П. Визгин. – М.: Наука, 1972.

Дата поступления
в редакцию 22.11.2017

S.V. Leshcheva, T.V. Luhmanova, A.V.Volohin,

A NOTE ON E. NOETER THEOREM

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

Purpose: A variant of the presentation of information on the Noeter theorem and its applications suitable for students of technical universities is suggested.
Design/methodology/approach: The computations associated with partial differential equations are used.
Findings: The formulation of the theorem do not use multi dimensional integrals.
Research limitations/implications: This article should be consider as an initial introduction to de course of mathematics the ideas associated with the theorem.
Originality/value: This is first experience in the teaching this subject in the course mathematics in NNSU.

Key words: conversation laws, Lagrange, field equations, symmetries, time space symmetries.