УДК 512

Н. В. Мохнина, Н. В. Юрова

КОММУТИРУЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ В КЛАССАХ СОПРЯЖЕННОСТИ В ГРУППЕ СУЗУКИ $^2B_2(q)$

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Статья продолжает ряд работ по проверке гипотезы о том, что в конечной простой группе неединичный класс сопряженности содержит коммутирующие элементы. В работе [1] гипотеза проверена для спорадических групп, проективных групп $L_n(q)$ и знакопеременных групп A_n. В работе [2] она проверена для простой группы Ри $^2G_2(q)$.

Ключевые слова: группа Сузуки, класс сопряженности, конечная группа, коммутирующие элементы, цетрализатор.

В предлагаемой статье проведем проверку гипотезы для простой группы Сузуки $^2B_2(q)$, где $q = 2^{2k+1}, k \ge 1$. Описание группы $^2B_2(q)$ рассматривается в [3], [4].

Нам понадобятся следующие сведения.

1. Силовская 2 – подгруппа состоит из матриц вида

$$(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^{\theta+1}+\beta & \alpha^{\theta} & 1 & 0 \\ \alpha^{\theta+2}+\alpha\beta+\beta & \beta & \alpha & 1 \end{pmatrix},$$

элементы которых лежат в конечном поле F_q.

2. Так называемая картановская подгруппа состоит из матриц вида

$$\hat{k}=\begin{pmatrix} k^{1+\theta^{-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k^{\theta^{-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^{-\theta^{-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k^{-1-\theta^{-1}} \end{pmatrix},$$

где $k \in F_q$.

Под θ подразумевается автоморфизм поля F_q такой, что

$$\theta : \alpha \to \alpha^{\sqrt{2q}}.$$

3. Имеют место следующие формулы:

$$(\alpha,\beta)(\gamma,\delta)=(\alpha+\gamma,\alpha\gamma^{\theta}+\beta+\delta) \tag{1}$$

$$\hat{k}^{-1}(\alpha,\beta)\hat{k}=(\alpha k,\beta k^{1+\theta}). \tag{2}$$

4. Группу ${}^2B_2(q)$, можно рассматривать как скрученный вариант группы Шевале $B_2(q)$.

Восстановим классы сопряженности элементов и соответствующие централизаторы из таблицы характеров, размещенной в [4].

Таблица 1

Классы сопряженности группы ${}^2B_2(q)$

Класс	**Порядок элементов класса**	**Порядок централизатора**	**Число классов**
1	1	$q^2(q-1)(q^2+1)$	1
2A	*2*	q^2	1
4A	4	$2q$	1
*4B***	4	$2q$	1
к-A	делит $q-1$	$q-1$	$\frac{q-2}{2}$
к-B	делит $q+\sqrt{2q}+1$	$q+\sqrt{2q}+1$	$\frac{q+\sqrt{2q}}{4}$
к-C	делит $q-\sqrt{2q}+1$	$q-\sqrt{2q}+1$	$\frac{q-\sqrt{2q}}{4}$

Порядок элементов в классе сопряженности делит порядок централизатора. Например, *к – A* – это класс элементов, порядок которых делит $q-1$.

Следует заметить, что классы

$$к-A,\ к-B,\ к-C$$

– это классы полупростых элементов, т.е. элементов, чьи порядки взаимно просты с характеристикой поля q.

Классы

$$2A,\ 4A,\ 4B^{**}$$

– это классы унипотентных элементов, т.е. элементов, чьи порядки являются степенью 2.

Смешанных элементов, порядки которых имеют в качестве делителя не только 2, в группе ${}^2B_2(q)$, нет.

Группу ${}^2B_2(q)$, можно рассматривать как скрученный вариант группы Шевалле $B_2(q)$, что позволяет использовать соответствующую терминологию и результаты из [5].

При проверке гипотезы необходима следующая лемма.

Лемма. *Отражение, являющееся композицией отражений относительно двух ортогональных корней, переводит каждый корень, компланарный с ним, в противоположный.*

Доказательство. Пусть α и β – два взаимно ортогональных корня. Без ограничения общности, можно считать их единичными.

Рассмотрим отражение ω, действующее на корень γ, следующим образом [5]:

$$\omega_\delta(\gamma) = \gamma - 2(\delta,\gamma)\delta.$$

$$\omega_\alpha\omega_\beta(\gamma)=\omega_\alpha(\gamma-2(\beta,\gamma)\beta)=\gamma-2(\beta,\gamma)\beta-2(\alpha,\gamma-2(\beta,\gamma)\beta)\alpha=\gamma-2((\beta,\gamma)\beta-(\alpha,\gamma)\alpha).$$

Учитывая, что

$$(\beta,\gamma)\beta+(\alpha,\gamma)\alpha=\gamma,$$

так как левая часть последнего равенства является разложением γ по взаимно ортогональным векторам, получаем

$$\omega_\alpha\omega_\beta(\gamma)=\gamma-2\gamma=-\gamma,$$

что и требовалось доказать.

Обратимся к проверке гипотезы. Проверим ее для полупростых элементов. Наличие в полупростых классах коммутирующих элементов следует из предложения.

Теорема 1. *В группе* ${}^2B_2(q)$, *полупростой элемент сопряжен со своим обратным.*

Доказательство. От группы $B_2(q)$ перейдем в алгебраическую группу B_2 над алгебраическим замыканием F_q, и покажем, что в ней полупростой элемент сопряжен со своим обратным.

Из [5] известно, что полупростой элемент сопряжен с картановским элементом

$$h=\prod_\alpha h_\alpha(t_\alpha).$$

В диаграмме Дынкина ([8], с. 296) имеется пара ортогональных корней (α,γ).

Отражение с помощью

$$\omega=\omega_\alpha\omega_\gamma,$$

где $\alpha\perp\gamma$,

ω – представитель элемента из группы Вейля, переводит элемент вида $h_\alpha(t_\alpha)$ в $h_{\omega(\alpha)}(t_\alpha)$ такой, что

$$\omega h_\alpha(t_\alpha)\omega^{-1}=h_{\omega(\alpha)}(t).$$

Это следует из соотношения

$$\omega_\alpha h_\beta(t)\omega_\alpha^{-1}=h_{\omega_\alpha(\beta)}(t)$$

в формулировке леммы 20 ([5], с. 31).

Отражение, являющееся композицией отражений относительно двух ортогональных корней

$$\omega=\omega_\alpha\omega_\gamma,$$

переводит каждый корень в противоположный (лемма):

$$h_{\omega(\alpha)}(t_\alpha)=h_{-\alpha}(t_\alpha).$$

Но из соотношения (8) определения 1 ([5], с. 32) имеем

$$h_\alpha(t)x_\beta(u)h_\alpha(t^{-1})=x_\beta(t^{\langle\beta,\alpha\rangle}u).$$

Откуда следует, что

$$h_{-\alpha}(t_\alpha) = h_\alpha(t_\alpha^{-1}),$$

по крайней мере, с точностью до множителя из центра группы.

Таким образом, сопряжение картановского элемента элементом ω переводит каждый множитель в h в обратный:

$$\omega h_\alpha(t)\omega^{-1} = h_{\omega(\alpha)}(t) = h_{-\alpha}(t) = h_\alpha^{-1}(t).$$

Но так как множители коммутируют, значит, и h переходит в обратный:

$$\omega h \omega^{-1} = \prod_\alpha h_{\omega(\alpha)}(t_\alpha) = \prod_\alpha h_{-\alpha}(t_\alpha) = \prod_\alpha h_\alpha(t_\alpha^{-1}) = h^{-1}.$$

Следовательно, полупростой элемент сопряжен со своим обратным в алгебраической группе – некотором максимальном торе.

Далее, мультипликатор Шура группы $B_2(q)$ равен 1 [9]. Теперь воспользуемся результатом статьи Т. А. Спрингера и Р. Штейнберга ([6], с. 200), по которому и в группе ${}^2B_2(q)$ полупростой элемент сопряжен со своим обратным.

Наши рассуждения проходят при $t \neq t^{-1}$, то есть когда h не является инволюцией. Но по теореме 2.1 из работы [1]: в любой конечной простой группе класс инволюций содержит коммутирующие элементы. Следовательно, это верно и для группы ${}^2B_2(q)$. Полупростые классы разобраны.

Перейдем к рассмотрению унипотентных элементов. Централизаторы любого элемента и его обратного имеют один и тот же порядок.

В $B_2(q)$ имеются классы с одинаковым порядком централизатора. Это $4A$ и $4B^{**}$ (4 – элементы). Элемент из класса $4A$ имеет обратный.

$$\text{Если } x \in 4A, \text{ то } x^{-1} \in 4B^{**}.$$

Теорема 2. *В классе* $4A$*, а также* $4B^{**}$ *имеются коммутирующие элементы.*

Доказательство. Пусть (α,β) – 4 элемент.

Пользуясь равенствами (1) и (2) замечаем, что

$$\alpha \neq 0 \text{ и } \hat{k}^{-1}(\alpha,\beta)\hat{k} = (\alpha k, \beta k^2).$$

Если взять $k^\theta = 1$, то из (1) устанавливаем, что оба элемента коммутируют.
Что и требовалось доказать.

Библиографический список

1. **Галкин, В.М.** Коммутирующие элементы в классе сопряженности / В.М. Галкин, Л.Н. Ерофеева, С.В. Лещева // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 8. – С. 12-20.
2. **Ерофеева, Л.Н.** О простой группе Ри ${}^2G_2(q)$ / Л. Н. Ерофеева, С. В. Лещева, Н. В. Мохнина, Н. В. Юрова // Труды НГТУ. – 2017. – № 3(118). – С. 24-27.
3. **Бусаркин, В. М.** Конечные расщепляемые группы / В. М. Бусаркин, Ю. М. Гончаров. – М.: Мир, 1985. – 111 с.
4. **Abdullah, A.** / The solvable subgroups of large order of Suz(q) / A. Abdullah, Abduh and Gaitha M. Alzabeedy // Global Journal of Mathematics. Vol. 4. – No. 2. – October 06. – 2015.

5. **Стейнберг, Р.** Лекции о группах Шевалле / Р. Стейнберг. – М.: Мир, 1975. – 263 с.
6. Семинар по алгебраическим группам. – М.: Мир, 1973. – 315 с.
7. **Серр, Ж.-П.** Алгебры Ли и группы Ли / Ж.-П. Серр. – М.: Мир, 1969. – 375 с.
8. **Горенстейн, Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985. – 352 с.

Дата поступления
в редакцию 02.11.2017

N.V. Mokhnina, N.V. Yurova

Commuting elements in conjugacy classes in the group Suzuki

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

Purpose: There is the conjecture that every conjugacy class of fin noabelian group contains the commuting elements. The conjecture for Ree group ${}^2B_2(q)$ is verified.
Design/methodology/approach: The formation on the structure of the exclusive groups of the Lie type is using.
Findings: This result is an stage of the testing of the general conjecture.
Research limitations/implications: Methods of this paper may be used for the investigation the other groups.
Originality/value: The result is new.

Key words: group Suzuki, conjugacy class, simple group, switching elements, centralizer.