

УДК 519.24:004.67

**В.И. Ерофеев<sup>1</sup>, А.В. Иляхинский<sup>1</sup>, А. А. Хлыбов<sup>2</sup>****РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИРИХЛЕ КАК СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ  
ТРИБОСИСТЕМЫ**

Институт проблем машиностроения РАН филиал федерального государственного бюджетного научного учреждения "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук"<sup>1</sup>,  
Нижегородский Государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева<sup>2</sup>

На примере анализа состояния триботехнической системы показана возможность применения распределения Дирихле в качестве модели процессов, определяющих состояние сложных систем. Такое представление позволяет рассматривать моделируемую систему как единое целое, что значительно повышает эффективность управления с целью достижения поставленных целей.

*Ключевые слова:* системный анализ, функция плотности вероятности, распределение Дирихле, энтропия, триботехническая система.

**Введение**

Основная проблема системного анализа – обоснованная оценка состояния исследуемых систем, учитывающая сложный характер взаимодействия их составляющих и особенность поведения в результате внешнего воздействия. Одним из перспективных подходов к исследованиям сложных систем является представление процессов, определяющих состояние системы моделью, отражающей наиболее существенные закономерности ее структуры и процессы функционирования [1, 2]. Преимущество модели – выделение наиболее важных факторов реальной системы, которые подлежат изучению в данном конкретном исследовании. Эти факторы должны быть отражены в модели с наибольшей полнотой и детализацией, их характеристики в модели должны совпадать с реальными с точностью, определяемой требованиями данного исследования. Однако среди множества сложившихся к настоящему времени классических методов решения задачи построения математических моделей (аналитических и статистических) в основном используются модели данных и не используются вовсе или используются в ограниченном объеме гипотезы о структуре и процессах моделируемой системы – модели систем. Существующие методы непрерывного контроля параметров испытываемых трибосопряжений, как правило, оценивают интегральные характеристики фрикционных процессов, оставляя за кадром такие фундаментальные, основанные на термодинамике неравновесных процессов особенности изнашивания, как формирование в поверхностном слое фрактальных пространственных и временных структур. Поэтому, естественно, представляет научный и практический интерес рассмотрение механизма трения и изнашивания с термодинамической точки зрения. [3. 4].

**Математическая модель**

Если подходить к выбору модели исходя из принципов и гипотез, лежащих в основе функционирования анализируемой системы, то процессы, определяющие состояние анализируемой системы, можно представить статистической моделью в виде функции плотности вероятностей. Такое представление, согласно предложенной Клодом Шенноном [5] термодинамической концепции информации, позволяет рассматривать процессы, протекающие в анализируемой системе, с позиции термодинамики и одного из важнейших ее понятий - энтропии. Для нашего обсуждения важно, что энтропия, как универсальная функция состояния

материи, состоит из производства и потока [6]. Поток характеризует обмен объекта веществом или энергией с внешней средой, а производство - часть энтропии, обусловленная протеканием необратимых процессов.

Было показано [7, 8], что, если состояние объекта отражает результат совместной реализации  $n-1$  независимых процессов  $x_j$ , протекающих со скоростями (интенсивностями)  $v_j$  и противоположного им по смыслу процесса, протекающего со скоростью  $v_n$ , то статистическая модель, информационно эквивалентная объекту любой природы и степени сложности, может быть представлена распределением Дирихле. Функция плотности вероятности этого распределения, определенная на  $k$ -мерном симплексе, равна

$$D(x_1, \dots, x_k) = \frac{\Gamma(a_n)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(v_i)} \prod_{i=1}^k x_i^{v_i-1} (1 - \sum_{i=1}^k x_i)^{v_n-1}, \quad (1)$$

где  $x_i \geq 0$  относительное ( $\sum_{i=1}^k x_i \leq 1$ ) значение измеряемой величины (*измеряемых параметров анализируемой системы*);  $v_i \geq 0, \dots, v_n \geq 0$  - параметры формы, имеющие смысл скоростей противоположно направленных процессов взаимодействия трущихся тел,  $\sum_{i=1}^n v_i = a_n; n = k + 1$  число процессов, определяющих состояние анализируемой системы.

Энтропия распределения Дирихле может быть представлена в виде суммы

$$H(D) = H_i(v_1, \dots, v_n) + H_e(a_n), \quad (2)$$

в которой всегда положительное слагаемое

$$H_i(v_1, \dots, v_n) = \ln \prod_{i=1}^n \Gamma(v_i) - \sum_{i=1}^n (v_i - 1) \psi(v_i) \quad (3)$$

представляет собой отвечающее второму закону термодинамики производство энтропии обусловленное протеканием необратимых процессов, а слагаемое

$$H_e(a_n) = -\ln \Gamma(a_n) + (a_n - n) \psi(a_n) \quad (4)$$

может принимать как положительные, так и отрицательные значения, что соответствует потоку энтропии, отвечающему за процессы взаимодействия с внешней средой. Здесь  $\Gamma(x)$  - гамма функция, а  $\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x)$  - логарифмическая производная гамма функции.

### Результаты исследования и их обсуждение

В качестве примера применения распределения Дирихле было проанализировано состояние триботехнической системы, которая представляет собой совокупность твердотельных и жидкофазных объектов, взаимодействующих контактно-механическим способом.

Были выбраны два режима эксплуатации трибосистемы, параметры которых по величине момента трения составили 906 (режим 1) и 1072 (режим 2) условных единиц.

Параметры испытания	Режимы испытания	
	Режим 1	Режим 2
	M±σ	
Момент силы трения - у.е.	906±4.8	1072±13.66

В качестве информативного параметра состояния трибосистемы было выбрано отношение

$$K_{TC} = \frac{\sum K_{D-}^i}{\sum K_{D+}^i}, \quad (5)$$

в котором  $\sum K_{D-}^i$  - суммарное количество выявленных за анализируемый период во временном ряде регистрируемого момента трения двухмерных, трехмерных, четырехмерных, пяти-

мерных и т.д. моделей Дирихле, имеющих отрицательное значение внешней энтропии, а  $\sum K_{D+}^i$  - суммарное количество выявленных за анализируемый период двухмерных, трехмерных, четырехмерных, пятимерных и т.д. моделей Дирихле, имеющих положительное значение внешней энтропии [9].

Вычисление параметра  $K_{TC}$  для каждого из режимов испытаний показало, что при изменении величины момента трения при переходе от режима 1 (906 у.е.) к режиму 2 (1072 у.е.) в пределах 10% приводит к изменению величины параметра  $K_{TC}$  с 3.7 у.е до 1.01 у.е., соответственно, т.е. в три раза.

Диагностический параметр	Режимы испытания	
	Режим 1	Режим 2
	M±σ	
Коэффициент самоорганизации трибосистемы $K_{TC}$	3.71±0.96	1.01±0.31

При этом следует отметить, что, если такая интегральная характеристика как момент трения позволяет судить только о необратимых процессах, то диагностический параметр состояния трибосопряжения  $K_{TC}$  позволяет судить о неравновесных (*обратимых*) процессах, когда внешнее энергетическое воздействие превышает производство тепла и часть поглощенной энергии начинает накапливаться в контактных слоях и трансформироваться в другие недиссипативные формы.

### Выводы

Таким образом, применение для математического моделирования процессов и явлений статистической модели распределения Дирихле является дальнейшим развитием направления системного анализа, позволяющим рассматривать анализ системы с позиции о структурно-функциональной организации моделируемого объекта и возможных механизмах, лежащих в основе его функционирования. Представление процессов, определяющих состояние моделируемой системы распределением Дирихле, дает возможность рассматривать моделируемый объект как единое целое, что значительно повышает эффективность управления с целью достижения поставленных целей.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-08 -00715).*

### Библиографический список

1. **Качала, В.В.** Основы теории систем и системного анализа / В. В. Качала. – 2-е изд. испр. – М.: Горячая линия – Телеком, 2012. – 210 с.
2. **Чихос Х.** Системный анализ в трибонике: [пер. с англ.] / Х. Чихос. – М.: Мир, 1982. – 352 с.
3. **Бершадский, Л.И.** Структурная термодинамика трибосистем / Л.И. Бершадский. – Киев: Знание, 1990. – 38 с.
4. **Гершман, И.С.** Синергетика процессов трения // Трение, износ, смазка. – 2006. – Т. 8. – № 4(29). – С. 71–80.
5. **Шеннон, К.** Статистическая теория передачи электрических сигналов при наличии помех / К. Шеннон // Сборник переводов. – М.: Изд. иностранной литературы, 1953. – С. 7–87.
6. **Пригожин, И.** Время, структура и флуктуации // Успехи физических наук, 1980. – Т. 131. – Вып. 2. – С. 185–207.
7. **Иляхинский А.В.** Статистические модели в задачах зондирования / А.В. Иляхинский, Ю.С. Серeda // Известия ВУЗов, Радиофизика, 1989. – Т. 32, 12. – С. 1502–1505.
8. **Серeda, Ю.С.** Проблемы информационно-статистической теории / Ю.С. Серeda. – М.: Космосинформ, 1998. – 121 с.

9. **Иляхинский, А.В.** Распределение Дирихле в задаче оценки состояния металла методом акустического зондирования / А.В. Иляхинский, В.М. Родюшкин // Дефектоскопия. – 2015. – № 7. – С. 13–17.

*Дата поступления  
в редакцию 10.05.2018*

**V.I. Erofeev<sup>1</sup>, A.V. Ilyahinskii<sup>1</sup>, A.A. Khlybov<sup>2</sup>**

**DIRICHLET DISTRIBUTION AS A STATISTICAL MODEL  
OF THE TRIBOSYSTEM**

Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences,  
Nizhny Novgorod, 603024 Russia<sup>1</sup>,  
<sup>2</sup>Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev<sup>2</sup>

**Purpose:** Reviewed the status of the tribological system from a thermodynamic point of view.

**Design/methodology/approach:** In analyzing the processes view lies the determinants for the tribological system statistical model as a probability density function

**Findings:** Examination of the tribological system state shows possible application of Dirichlet distribution as a model of the processes that govern the state of sophisticated systems.

*Key words:* System analysis, probability density function, Dirichlet distribution, entropy, tribotekhnicheskaja system.