

УДК 681.3.513

Е.А. Никулин

**КОМПЬЮТЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ  
НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО И ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА**

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Работа посвящена изучению статистических свойств свободного и закрепленного броуновских движений, а также установлению фрактальных закономерностей случайного броуновского процесса. Впервые введено понятие фрактальной броуновской линии. Метод ее получения – случайное изотропное смещение средних точек отрезков полилинии. Предложен метод оценки размерности неоднородных фрактальных полилиний. Получены статистические свойства и фрактальная размерность случайных броуновских полилиний.

*Ключевые слова:* броуновское движение, фрактальная броуновская линия, фрактальная размерность.

**Введение**

Компьютерное моделирование броуновского движения (БД) – хаотического перемещения видимой частицы, возникающего при ее столкновениях с большим числом малых невидимых частиц – реализуется множеством методов [1-4]. Каждый из них в различной степени адекватен данному природному явлению, в действительности происходящему под воздействием большого числа неопределенных факторов: размеров и масс частиц, величин и направлений их скоростей, длин и длительностей свободного пробега, плотности и вязкости среды и т. п. Учет всех этих составляющих в процессе моделирования проблематичен, поэтому неизбежно принятие определенных идеализаций и упрощений, аналогичных замене трассировки всех световых лучей на отслеживание лишь приведенных обратных лучей в расчете освещенности поверхностей [5, 6]:

- использование модельных единиц измерения длины, времени и скорости, мало связанных с метриками реального БД;
- простейшие формы частиц, например, сферы одинакового диаметра либо просто точки;
- случайные или даже равные единицы длительности свободного пробега частиц;
- мгновенное изменение скорости либо перемещения частицы после ее столкновения с другой частицей на алгоритмически генерируемую случайную векторную величину;
- равномерное движение частицы с новой скоростью до следующего столкновения.

**Свободное броуновское движение**

В рамках принятых допущений построим на плоскости стохаговую траекторию *свободного броуновского движения*  $p_{i+1} = p_i + V_i \quad \forall i = \overline{0, 99}$  из начального положения  $p_0 = O$ , где  $O = [0 \ 0]$  – нулевой вектор. Для изменения векторов скорости  $V_i$  используем функцию  $rv(\sigma) = rf(\sigma) \cdot [\sin(\varphi) \ \cos(\varphi)]$  генерирования вектора со случайными длиной  $rf(\sigma)$  и углом направления  $\varphi = rnd(2\pi)$  рад, равномерно распределённым по кругу. При задании типа генератора случайных чисел (ГСЧ) с нулевым средним  $z = rf(\sigma)$  можно выбрать либо равномерный  $z = 2rnd(\sigma) - \sigma$  в интервале  $[-\sigma, \sigma]$ , либо нормальный ГСЧ с гауссовой плотностью вероятности  $e^{-z^2/2\sigma^2} / \sigma\sqrt{2\pi}$  со среднеквадратичным отклонением (СКО)  $\sigma$ .

На рис. 1 построены реализации броуновского движения с *равномерным* ГСЧ с параметром  $\sigma=1$  двумя методами изменения направления движения частицы после столкновения: (а)  $V_i=V_{i-1}+rv(\sigma)$  при  $V_{-1}=0$  и (б)  $V_i=rv(\sigma)$ . Насколько каждый из этих методов случайного блуждания близок к реальному броуновскому движению – судить тем, кто видел его воочию, возможно, даже в микроскоп.

Изучим статистические свойства процесса со случайными приращениями положений, показанного на рис. 1, б. Каждая  $n$ -шаговая полилиния  $P=p_0p_1\dots p_n$  с вершинами  $p_i \forall i=0, n$  имеет следующие длину  $\gamma$  и квадраты максимального удаления  $\rho$  и расстояния  $\chi$  между начальной и последней вершинами  $p_0$  и  $p_n$ :

$$\gamma = \sum_{i=1}^n |p_i - p_{i-1}|, \quad \rho = \max_i (|p_i - p_0|^2), \quad \chi = |p_n - p_0|^2. \tag{1}$$

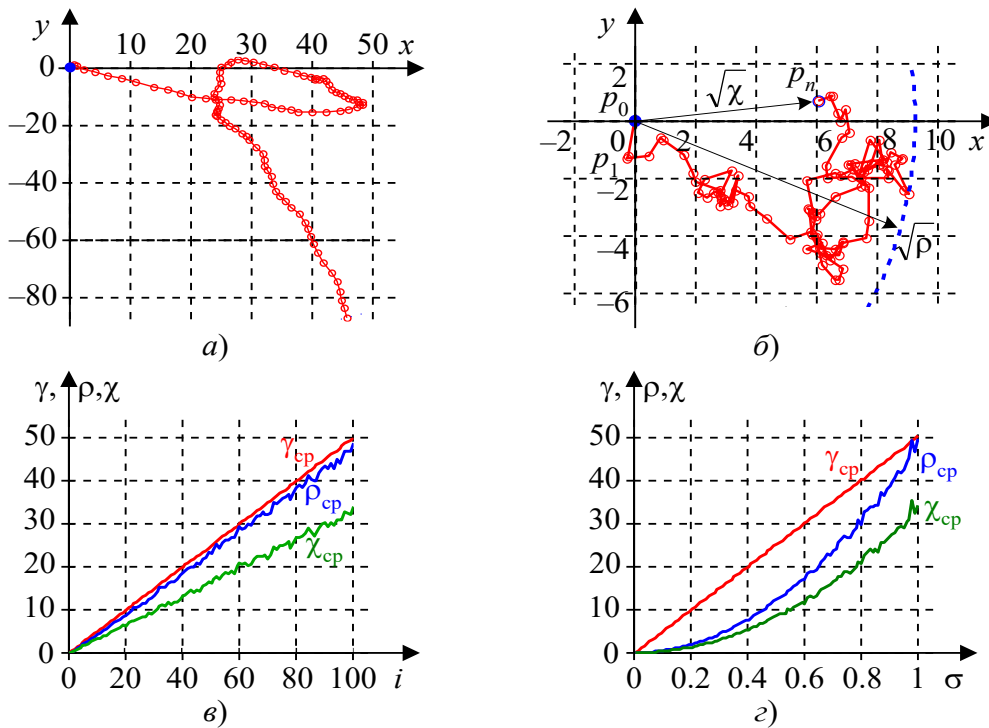


Рис. 1. Свободное броуновское движение

Сгенерируем ансамбль из  $K=1000$  случайных траекторий броуновского движения  $P_k$ ,  $k=\overline{1, K}$ , вычислим по (1) значения  $\gamma_k, \rho_k, \chi_k$  и рассчитаем средние параметры ансамбля:

$$\gamma_{cp} = \text{mean}(\gamma_k), \quad \rho_{cp} = \text{mean}(\rho_k), \quad \chi_{cp} = \text{mean}(\chi_k).$$

Соответствующие графики этих зависимостей от числа шагов моделирования  $i$  и параметра разброса *равномерного* ГСЧ  $\sigma$  приведены на рис. 1, в, г. Все они хорошо аппроксимируются следующими функциями:

$$\gamma_{cp}(i) \approx 0.5i, \quad \rho_{cp}(i) \approx 0.47i, \quad \chi_{cp}(i) \approx 0.33i,$$

$$\gamma_{cp}(\sigma) \approx 50\sigma, \quad \rho_{cp}(\sigma) \approx 48.2\sigma^2, \quad \chi_{cp}(\sigma) \approx 33.3\sigma^2.$$

Аналогичные зависимости при использовании *нормального* ГСЧ с СКО  $\sigma$  выглядят следующим образом:

$$\gamma_{cp}(i) \approx 0.8i, \quad \rho_{cp}(i) \approx 1.41i, \quad \chi_{cp}(i) \approx i,$$

$$\gamma_{cp}(\sigma) \approx 79.8\sigma, \quad \rho_{cp}(\sigma) \approx 142\sigma^2, \quad \chi_{cp}(\sigma) \approx 100\sigma^2.$$

Особо значимым результатом моделирования является пропорциональность среднего квадрата расстояния  $\chi_{\text{ср}}(i)$  от начальной до конечной точки броуновской полилинии числу шагов (времени движения при равномерном квантовании времени), экспериментально подтвердившая хорошо известную в молекулярной физике формулу Альберта Эйнштейна.

### Фрактальные броуновские линии

Понятие «фрактал» было введено Б. Мандельбротом в 1975 году для преодоления проблемы чрезвычайной громоздкости математического описания бесконечно дробимых объектов уравнениями линий или поверхностей [6]. Наибольшее распространение в компьютерной графике фрактальная тема получила для формирования объектов природного ландшафта. Нерегулярность самоподобия означает, что фрагменты объекта не точно повторяют его форму в уменьшенном масштабе, а имеют некоторые отклонения от регулярности, носящие случайный (стохастический) характер. Случайность доставляет фрактальному объекту неповторимость, живость и близость к реальным природным образованиям, каждый из которых уникален.

Рассмотренная выше броуновская линия в действительности не является фрактальной, так как в методе ее создания отсутствует процесс дробления элементов. Вместе с тем двусторонне закрепленная *фрактальная броуновская линия* (ФБЛ), проходящая между заданными точками  $a$  и  $b$ , дает классический пример устройства бесконечно дробимых самоподобных объектов. Для ее построения используется хорошо зарекомендовавший себя рекурсивный *метод срединного смещения* [4], состоящий в *изотропном гауссовом* смещении средних точек дробимых отрезков строящейся полилинии. В плоском варианте задачи изотропность и гауссовость означают следующее (рис. 2):

- случайный угол  $\varphi$  отклонения вектора смещения средней точки  $c=(a+b)/2$  отрезка  $ab$  от вертикали равномерно распределён в интервале  $[0, 2\pi)$ ;
- случайная величина смещения нормально распределена с нулевым средним значением и абсолютным СКО  $|b-a|\sigma$ .

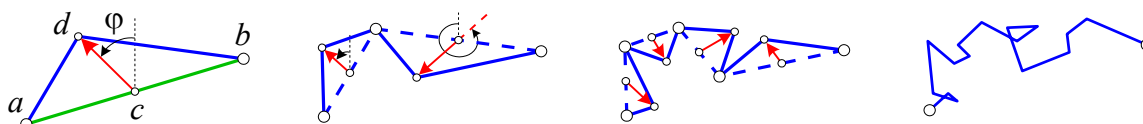


Рис. 2. Метод срединного смещения

Используя предложенную нами ранее методологию [7], для повышения гибкости алгоритма построения ФБЛ введем в список его параметров *признак направления срединного смещения*  $D_\varphi \in \{0,1\}$ : при  $D_\varphi=0$  смещение происходит по вертикали с углом  $\varphi=0$ , тогда как при  $D_\varphi=1$  производится генерирование случайного угла отклонения  $\varphi = \text{rnd}(2\pi)$ .

Начальное значение смещения задаётся пропорциональным длине исходного отрезка  $|b-a|$ , а на каждой следующей рекурсии параметр  $\sigma$  уменьшается в  $2^H$  раз, где  $H \in [0,1]$  – *показатель Херста*, задающий степень хаотичности ФБЛ и коррелированности смещений. При  $H=0$  неизменное значение  $\sigma$  при уменьшении длин отрезков приводит к максимальной изрезанности ФБЛ.

Рекурсивная функция  $FBLrec(L, b, \sigma, \delta, r, D_\varphi, H)$  построения фрактальной броуновской линии с аргументами  $L$  (списком вершин построенной части линии, последняя точка которого  $a$  является началом следующего отрезка  $ab$ ), точкой  $b$ , абсолютным СКО  $\sigma$ , минимальной длиной разбиваемого отрезка  $\delta$  и глубиной рекурсии  $r$  работает по следующему алгоритму.

```

☐ FBLrec( $L, b, \sigma, \delta, r, D_\varphi, H$ )
{  $a = L_{size}(L), V = b - a$ ; // начало отрезка и его направление
  если  $\{r=0\} \vee \{|V| < \delta\}$ , то // условия остановки разбиения отрезка
    {  $b \rightarrow L$ ; // добавление в список новой точки
      line( $a, b$ ); // вывод отрезка  $ab$ 
      возврат  $L$  }; // выход из рекурсии
     $\varphi = D_\varphi \cdot rnd(2\pi), \sigma = \sigma / 2^H$ ; // параметры смещения
     $d = a + 0.5V + rf(\sigma) \cdot [\sin(\varphi) \cos(\varphi)]$ ; // смещение средней точки
     $L = FBLrec(L, d, \sigma, \delta, -r, D_\varphi, H)$ ; // разбиение отрезка  $ad$ 
    возврат FBLrec( $L, b, \sigma, \delta, r, D_\varphi, H$ ); // разбиение отрезка  $db$ 
  }
☐

```

Построение ФБЛ на отрезке  $ab$  осуществляется заданием начального значения погонного СКО  $\sigma$ , соответствующего единице длины отрезка  $|b-a|$ , и однократным вычислением списка её вершин  $L = FBLrec(a, b, |b-a|, \sigma, \delta, r, D_\varphi, H)$ . Для создания броуновского фрактала на базовой полилинии  $p_1 p_2 \dots p_n$  инициализируется начальный список, состоящий из её первой вершины  $L = \{p_1\}$ , после чего в цикле:

$$L = FBLrec(L, p_i, |p_i - p_{i-1}|, \sigma, \delta, r, D_\varphi, H) \quad \forall i = \overline{2, n}$$

к нему подстраиваются сегменты ФБЛ на отрезках  $p_{i-1} p_i$ .

На рис. 3 показаны четыре группы реализаций алгоритма *FBLrec* на базовом единичном отрезке за  $r=8$  рекурсий при разных значениях параметров  $\sigma$ ,  $D_\varphi$  и  $H$ . Изучение графиков приводит к следующим выводам:

- при строго вертикальных срединных смещениях ( $D_\varphi = 0$ ) абсциссы всех точек ФБЛ изменяются монотонно, что позволяет строить на таких базовых линиях самонепересекающиеся ландшафтные поверхности [4];
- изотропность срединного смещения ( $D_\varphi = 1$ ) создает на фрактальных линиях хаотически расположенные петли и участки попятного движения – совсем как на реальных траекториях случайного блуждания частиц в молекулярной среде. Однако такое поведение ФБЛ усложняет их использование в качестве базовых линий фрактальных броуновских поверхностей, моделирующих строение поверхности природных ландшафтов, – они получаются чрезвычайно самопересекающимися и комковатыми, в чем мы скоро сможем убедиться;
- влияние показателя Херста  $0 \leq H \leq 1$  на форму фрактальных линий сказывается на относительном содержании в их спектре высокочастотных гармоник (шума) и коррелированности соседних смещений. При малых значениях  $H \approx 0$  доля шума максимальна, а направления соседних смещений в среднем противоположны. Наоборот, выбор  $H \approx 1$  позволяет создать ФБЛ с малым уровнем высокочастотных колебаний и сильной коррелированностью соседних смещений.

Важной статистической характеристикой полилинии, отражающей ее непрямолинейность, является коэффициент удлинения – отношение полной длины линии к расстоянию между ее концами:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n-1} |p_i - p_{i+1}| / |p_1 - p_n| \quad (2a)$$

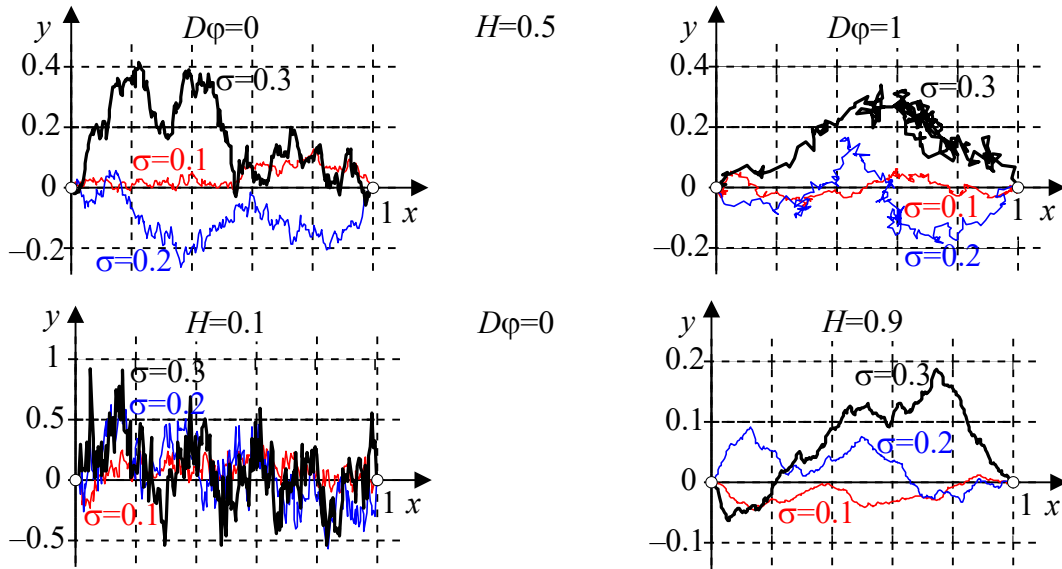


Рис. 3. Фрактальные броуновские линии

Зададим набор СКО  $\sigma_j = 0.01j \quad \forall j = \overline{0, 50}$  и для каждого  $\sigma_j$  сгенерируем ансамбль из  $K = 100$  фрактальных полилиний с вычисленными по (2а) значениями  $\gamma_k \quad \forall k = \overline{1, K}$ . Рассчитаем среднее значение коэффициента удлинения:

$$\gamma_{cp} = \text{mean}(\gamma_k). \tag{26}$$

Наилучшие приближения  $\gamma_{cp}(\sigma, H)$ , вычисленные в MathCAD методом Левенберга-Марквардта с помощью функции *genfit* на  $r = 8$  уровнях рекурсии для выборочных значений  $H = 0.5$  и  $\sigma = 0.3$ , имеют следующий вид:

$$\gamma_{cp}(\sigma, 0.5) \approx 1 + 18.3\sigma^{1.16}, \quad \gamma_{cp}(0.3, H) \approx 1 + 69.6 \cdot 2^{-7.8H}. \tag{2в}$$

Графики этих зависимостей от параметров  $\sigma$  и  $H$  при выборочных глубинах рекурсии  $r \in \{4, 6, 8, 10\}$  показаны на рис. 4.

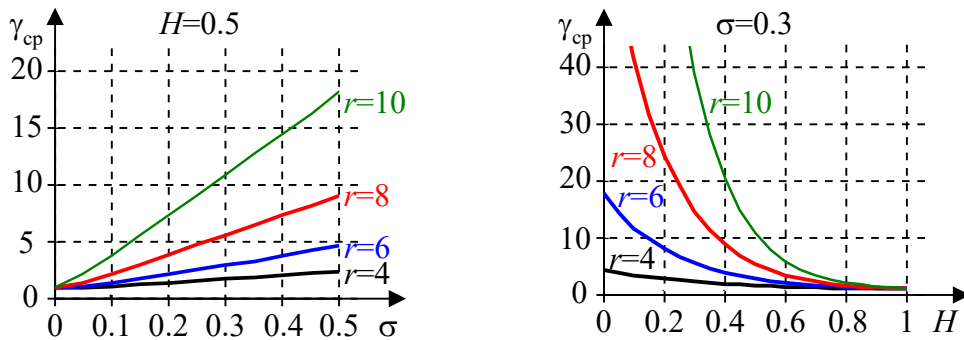


Рис. 4. Статистические свойства ФБЛ

### Экспериментальная оценка размерности ФБЛ

Броуновская полилиния также является стохастическим линейным фракталом с неоднородными элементами (рис. 3). На рис. 5 построены графики усредненных по  $K=100$  реализациям функции  $FBLrec(a,b,\sigma,0,r,0,H)$  зависимостей их полной длины  $\gamma_{cp}(\sigma,H,r)$  и размерности  $d_{cp}(\sigma,H,r)$  от числа рекурсий  $r$  на наборе СКО  $\sigma \in \{0.1, 0.2, 0.3\}$  нормального ГСЧ  $rf(\sigma)$  и от показателя Херста  $H \in \{0.1, 0.5, 0.9\}$ . Выбор логарифмического масштаба позволяет обнаружить предельную линейную зависимость функции  $\log_2(\gamma_{cp})$  от числа итераций и оценить полную длину ФБЛ зависимостью от двух параметров  $\alpha(\sigma,H)$  и  $\beta(\sigma,H)$ :

$$\log_2(\gamma_{cp}) \approx \alpha(e^{-\beta r} + \beta r - 1)$$

с нулевыми значением и наклоном при  $r=0$ . Прямые измерения по графикам обнаруживают установившиеся значения коэффициентов наклона  $\alpha\beta = 1 - H$ .

Таким образом, оценка предельной длины ФБЛ приобретает вид  $M_r(\sigma,H) \rightarrow 2^{(1-H)r}$ , а ее фрактальная размерность

$$D_r(\sigma,H) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{D_r}{1 - \log_2(M_r/M_{r-1})}$$

сходится к

$$D_r(\sigma,H) \rightarrow \frac{1}{1 - (1-H)r + (1-H)(r-1)} = \frac{1}{H} = \text{const } \forall r.$$

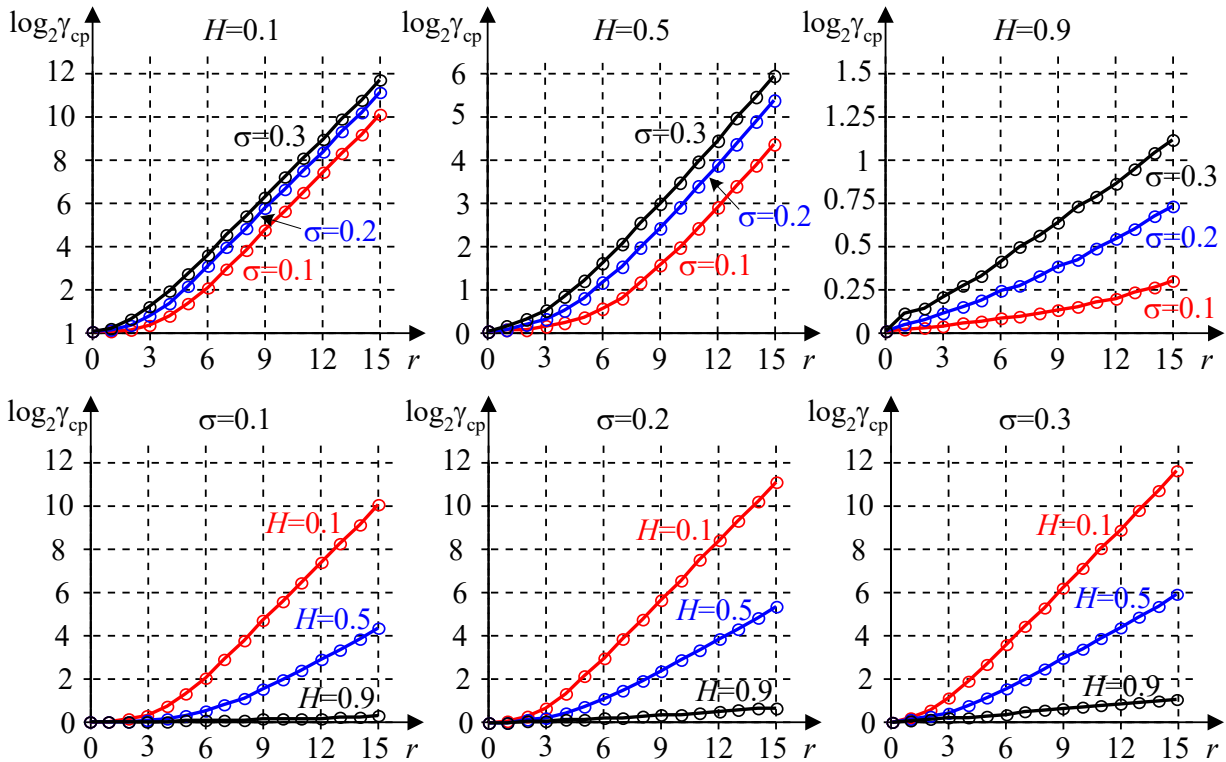


Рис. 5. Длина фрактальной броуновской линии

Это полностью согласуется с размерностью броуновского движения, приведенной в [1] и экспериментально подтверждается графиками на рис. 6, асимптотически сходящимися к пунктирно проведенным уровням  $1/H$ , независимым от значений  $\sigma$ . При этом скорость сходимости сильно замедляется по мере приближения показателя Херста  $H$  к 1.

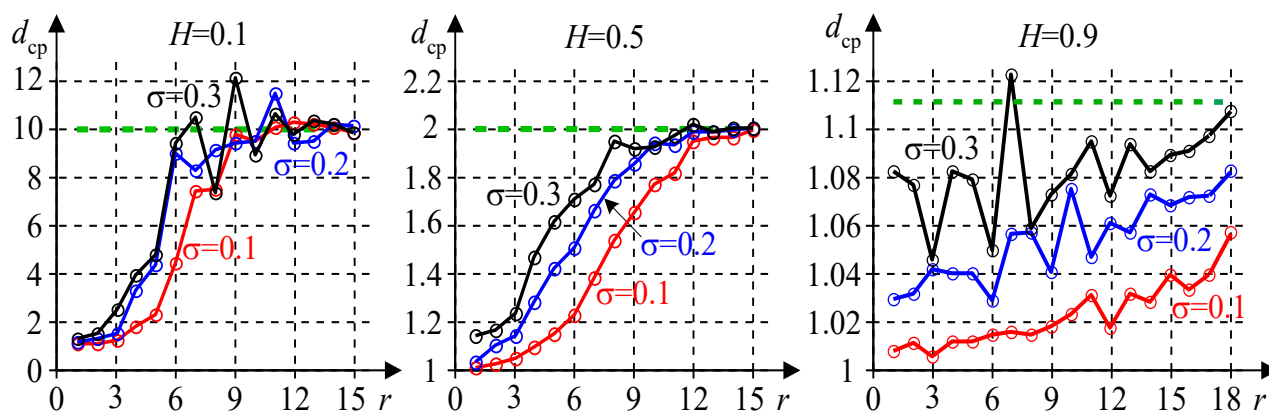


Рис. 6. Размерность фрактальной броуновской линии

### Заключение

Получены усредненные характеристики траекторий броуновского движения, создаваемых с помощью генераторов равномерно и нормально распределенных случайных чисел. На основе этого становится возможным как оценить вид и область расположения полилинии при заданных значениях  $s$ ,  $\sigma$  и  $r$ , так и задать эти параметры сообразно ее желаемому поведению.

### Библиографический список

1. **Мандельброт, Б.** Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
2. **Кроновер, Р.М.** Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р.М. Кроновер. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
3. **Федер, Е.** Фракталы / Е. Федер. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
4. **Никулин, Е.А.** Компьютерная графика. Фракталы: учеб. пособие для вузов / Е.А. Никулин. – СПб.: Издательство «Лань», 2018. – 100 с.
5. **Никулин, Е.А.** Компьютерная графика. Оптическая визуализация: учеб. пособие для вузов. / Е.А. Никулин. – СПб.: Издательство «Лань», 2018. – 200 с.
6. **Никулин, Е.А.** Компьютерная графика. Модели и алгоритмы: учеб. пособие для вузов / Е.А. Никулин. – СПб.: Издательство «Лань», 2017. – 708 с.
7. **Никулин, Е.А.** Исследование фрактальных полилиний // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексева. 2018. № 3(122). – С. 23-31.

Дата поступления  
в редакцию 11. 01.2019

**Е.А. Nikulin**

### COMPUTER INVESTIGATION OF THE BROWNIAN MOVEMENT BY MEANS OF STATISTICAL FRACTAL ANALYSIS

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

**Purpose:** The establishment of statistical regularities of random Brownian motion.

**Methodology:** Random isotropic displacement of midpoints of polyline segments.

**Experiments:** A statistical experiment was performed to evaluate the length and dimension of a fractal polyline.

**Results:** Statistical properties and fractal dimension of random Brownian polylines are obtained.

**Findings:** A method for estimating the dimension of inhomogeneous fractal polylines is proposed.

**Research implications:** Computer synthesis of random fractal objects with desired properties.

*Key words:* Brownian motion, fractal polyline, fractal dimension.