

УДК 629.539.3

А.И. Уваров

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ ШЕЙКИ В РАСТЯГИВАЕМОМ КРУГЛОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОМ ОБРАЗЦЕ ДЛЯ РАСЧЕТНОЙ ОЦЕНКИ УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГОЕМКОСТИ МАТЕРИАЛА

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

С целью расчета энергоемкости материалов, используемых в элементах конструкции автомобиля и обеспечивающих его пассивную безопасность, разработана аналитическая модель начала процесса локального деформирования (образования шейки) в растягиваемом цилиндрическом пластическом теле при оси симметричной деформации. Использован кинематический метод теории предельного равновесия. Получено приближенное аналитическое решение, определяющее локальное поле скоростей перемещений, соответствующее такой же величине растягивающей нагрузки, как и при равномерном деформировании. При этом размер района локального деформирования вдоль оси симметрии пропорционален радиусу цилиндра. Произведено качественное (по форме недеформируемых областей) и количественное (по минимальному диаметру шейки) сопоставление полученного аналитического решения с результатами численного моделирования. Получено удовлетворительное совпадение. Результаты могут быть использованы для расчетной оценки удельной энергоемкости материалов энергопоглощающих элементов конструкций пассивной безопасности.

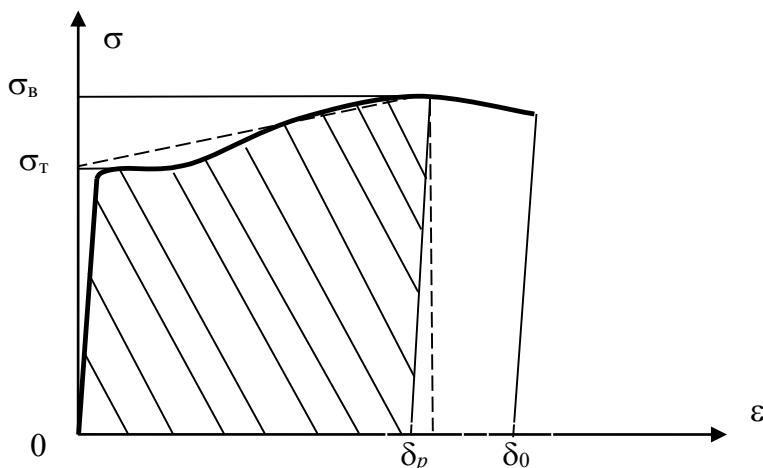
*Ключевые слова:* пассивная безопасность, шейка в круглом образце, удельная энергоемкость.

### Введение

В современных транспортных системах в качестве элементов систем пассивной безопасности применяются конструкции, поглощающие энергию соударений движущихся тел за счет собственных деформаций [1-3]. В автомобилестроении специальными элементами, выполняющими функцию снижения ударных нагрузок на пассажиров и груз за счет собственного деформирования при ударах, являются бамперы и ударные амортизаторы [4, 5]. Принцип поглощения энергии движения используется также при создании конструктивной защиты атомных энергетических установок от ударов движущихся объектов [6]. При проектировании энергопоглощающего элемента конструкции необходимо выбрать оптимальный материал. Критерием эффективности материала, используемого для изготовления энергопоглощающих элементов, может служить энергия, поглощаемая единицей объема материала, которая равна площади диаграммы напряжения – относительное удлинение, получаемое при механических испытаниях образцов на растяжение [7].

Разрушению растягиваемого образца из металлических сплавов предшествует образование района локального деформирования (шейки). Энергию, поглощаемую материалом образца, можно разделить на энергию равномерного деформирования и энергию деформации в шейке. Доля энергии, поглощаемой в шейке, зависит от соотношения размеров образца, формы образца, и при определении энергопоглощающей способности материалов ее целесообразно отделить и учитывать площадь диаграммы при равномерном деформировании до образования шейки, когда деформации одинаковы во всем объеме материала (заштрихованная площадь на рис. 1). Площадь диаграммы напряжений, ограниченная величиной относительного равномерного удлинения  $\delta_p$ , не зависит от длины образца и равна  $a_v$  – энергии, поглощаемой единицей объема материала деформируемого образца до образования шейки (штриховые линии на рис. 1). Приблизленно величина  $a_v$  может быть вычислена (без учета упругих деформаций), как площадь трапеции:

$$a_v = \frac{1}{2}(\sigma_T + \sigma_B) \cdot \delta_p \quad (1)$$



**Рис. 1. Схема диаграммы напряжений при растяжении металлического образца:**  
 $\sigma$  — нормальное напряжение в поперечном сечении образца,  $\varepsilon$  — относительное удлинение,  
 $\sigma_T$  — предел текучести,  $\sigma_B$  — временное сопротивление

Величина равномерного остаточного удлинения  $\delta_p$  не всегда содержится в данных сертификата на материал, который, как правило, содержит величины остаточного удлинения образца вместе с шейкой  $\delta_0$  и относительного поперечного сужения образца при разрыве  $\psi$ . При известной форме шейки величина  $\delta_p$  может быть вычислена. Основными геометрическими параметрами шейки являются ее длина и наименьший диаметр. Эти величины определяются путем испытаний образца на растяжение с соответствующими измерениями. Разработке метода расчетного определения этих размеров посвящена настоящая работа.

Экспериментальное исследование возможности прогнозирования места разрушения при пластическом растяжении проведено в работе [8]. В работе [9] исследовано влияние структуры кристаллической решетки на локализацию пластической деформации. Известно аналитическое решение задачи о напряженном состоянии в шейке круглого образца [10]. Исходными данными для расчетов при этом служат геометрические параметры: диаметр шейки и радиус кривизны ее контура, получаемые в эксперименте, то есть расчету должны предшествовать испытания образцов. В работе [11] разработана аналитическая модель определения начального размера района локального деформирования при растяжении широкой металлической пластины при плоской деформации.

Целью настоящей работы является расчетное определение размера района локальных деформаций (шейки) в начальный период ее возникновения в образце цилиндрической формы при осесимметричной деформации. В качестве метода исследования выбрана разработка аналитической модели локализации деформаций и сопоставление аналитической модели с результатами численного моделирования.

В первом разделе рассмотрена осесимметричная деформация при растяжении круглого образца. Получено аналитическое решение, аналогичное [11], определяющее длину шейки в начале ее образования. Выполнен анализ полученного приближенного решения. Во втором разделе содержится обоснование локализации деформаций. В третьем — приведены сопоставления, полученного аналитического решения с результатами численного моделирования и экспериментальными фактами.

### Построение аналитической модели локального деформирования

Рассмотрим тело в форме прямого кругового цилиндра радиуса  $R$  (диаметра  $D_0$ ) длины  $L$  из идеально-жесткопластического материала с пределом текучести  $\sigma_T$ , нагруженное растягивающей силой величины  $P$ , направленной вдоль оси цилиндра. Найдем значение

нагрузки  $P$ , соответствующее началу пластической деформации (предельную нагрузку). Используем кинематический метод теории предельного равновесия [12]. Ось  $Z$  цилиндрической системы координат  $rZ\theta$  совпадает с осью цилиндра,  $u, w$  – перемещения точек материала в направлениях осей  $r, Z$  соответственно.

Будем полагать, что имеет место осесимметричная деформация. При этом считаем, что перемещения точек материала тела, имевших одинаковые координаты  $r, Z$  до деформации, получают одинаковые перемещения  $u, w$ , а перемещения в направлении перпендикулярном осям  $r, Z$  (в окружном направлении) отсутствуют.

На приведенных ниже рисунках показаны сечения плоскостью, проходящей через ось цилиндра. Вначале рассмотрим простейший случай равномерного деформирования, с которым сопоставим разработанную далее модель локального деформирования.

### Равномерное деформирование

Пусть все элементы тела испытывают одинаковое удлинение в направлении действия нагрузки (вдоль оси  $Z$ ) во всем объеме.

Пусть  $\delta$  – бесконечно малое относительное перемещение краев тела при растяжении силой  $P$  (рис. 2).

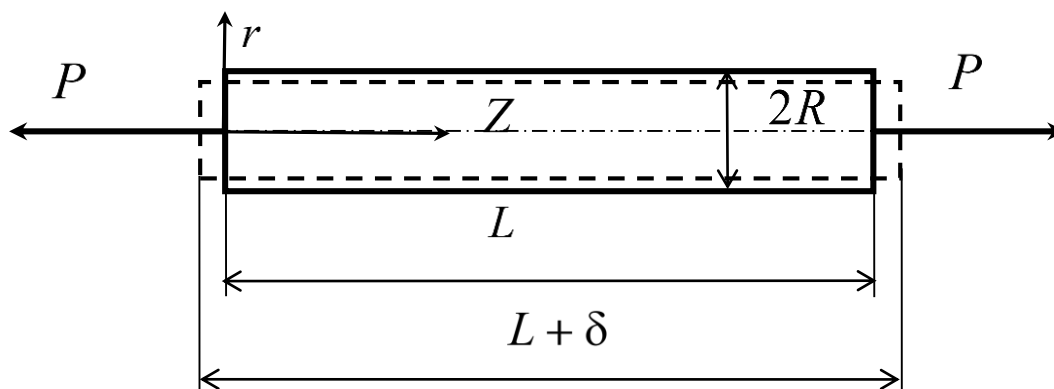


Рис. 2. Схема равномерного деформирования

Относительное удлинение в направлении оси  $Z$  во всех точках тела равно:  $\varepsilon_z = \varepsilon = \frac{\delta}{L}$ .

Из условия сохранения объема следует:  $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = -\frac{\varepsilon_z}{2}$ .

Предположим, что все элементы тела находятся в линейном напряженном состоянии. При этом условию текучести Треска-Сен-Венана будут соответствовать напряжения  $\sigma_z = \sigma_T; \sigma_r = \sigma_\theta = 0$ .

Диссипация энергии в единице объема тела:

$$d = \varepsilon \cdot \sigma_T = \frac{\delta}{L} \cdot \sigma_T$$

Диссипация энергии в объеме тела:

$$D = d \cdot (S \cdot L) = \frac{\delta}{L} \cdot \sigma_T \cdot (S \cdot L) = S \cdot \sigma_T \cdot \delta,$$

где  $S = \pi R^2$  – площадь поперечного сечения тела. Работа внешней нагрузки:

$$A = P \cdot \delta$$

Дифференцируя по параметру  $\delta$  и приравнивая мощность внешней нагрузки мощности диссипации, находим величину предельной нагрузки для равномерного деформирования:

$$P_{пред} = P_L = S \sigma_T \quad (2)$$

Поскольку удовлетворяется условие текучести, и все элементы находятся в равновесии, то полученное решение можно считать точным.

### Локальное деформирование. Общее описание модели

Предположим, что деформации происходят только в части тела длины  $l$ , которую в дальнейшем будем называть шейкой. Материал вне шейки остается недеформируемым (рис. 3).

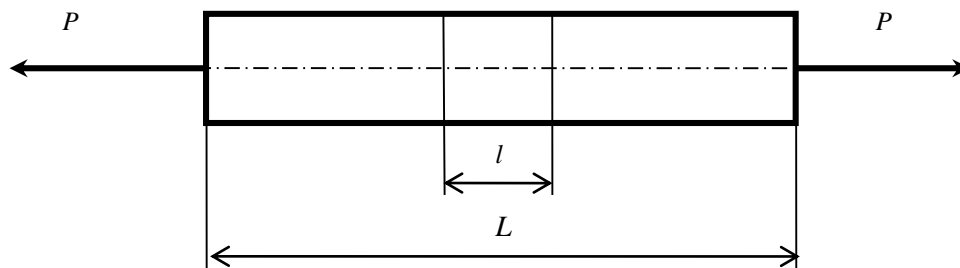


Рис. 3. Расположение локального района деформирования

Предположим, что при локализации деформаций (образовании шейки) деформации распределяются неравномерно по деформируемому объему, уменьшаясь от оси симметрии к наружным поверхностям и от середины шейки к ее краям. Данное предположение основано на результатах конечно элементного моделирования и известных экспериментальных данных об образовании трещины внутри шейки растягиваемого образца [12]. Ему соответствует рассмотренный далее однопараметрический кинематический механизм, который определяет различную деформацию в разных областях объема шейки (единственным параметром, определяющим поле перемещений, является длина деформируемого района  $l$ ). Деформируемые области отделены друг от друга и от недеформируемого района коническими поверхностями.

Пусть локальный объем деформирования состоит из трех областей: одной внутренней (средней) и двух одинаковых внешних (крайних) областей, примыкающих к недеформируемым внешним областям тела. Внутренняя (средняя) область деформирования испытывает вдвое большее постоянное удлинение в направлении векторов нагрузки (кусочно-постоянная аппроксимация), чем внешние области деформирования (рис. 4).

Внутренняя область деформирования испытывает линейную деформацию величины  $\varepsilon$  в направлении действия нагрузки. Данная часть имеет форму двух конусов радиуса  $R$  и высоты  $l/4$ . Ее объем (двух конусов) равен:

$$V_{\varepsilon} = \frac{1}{3} \pi R^2 \frac{l}{4} \cdot 2 = \frac{1}{6} \pi R^2 l.$$

Две внешние области деформирования испытывает линейную деформацию вдвое меньшей величины  $\varepsilon/2$ . Суммарный объем двух внешних областей (части четырех цилиндров за вычетом объемов конусов) равен:

$$V_{\varepsilon/2} = \left( \pi R^2 \frac{l}{4} - \frac{1}{3} \pi R^2 \frac{l}{4} \right) \cdot 4 = \frac{2}{3} \pi R^2 l.$$

К внешним областям деформирования примыкают недеформируемые части тела в форме конусов, в которых деформации отсутствуют  $\varepsilon=0$  (рис. 4).

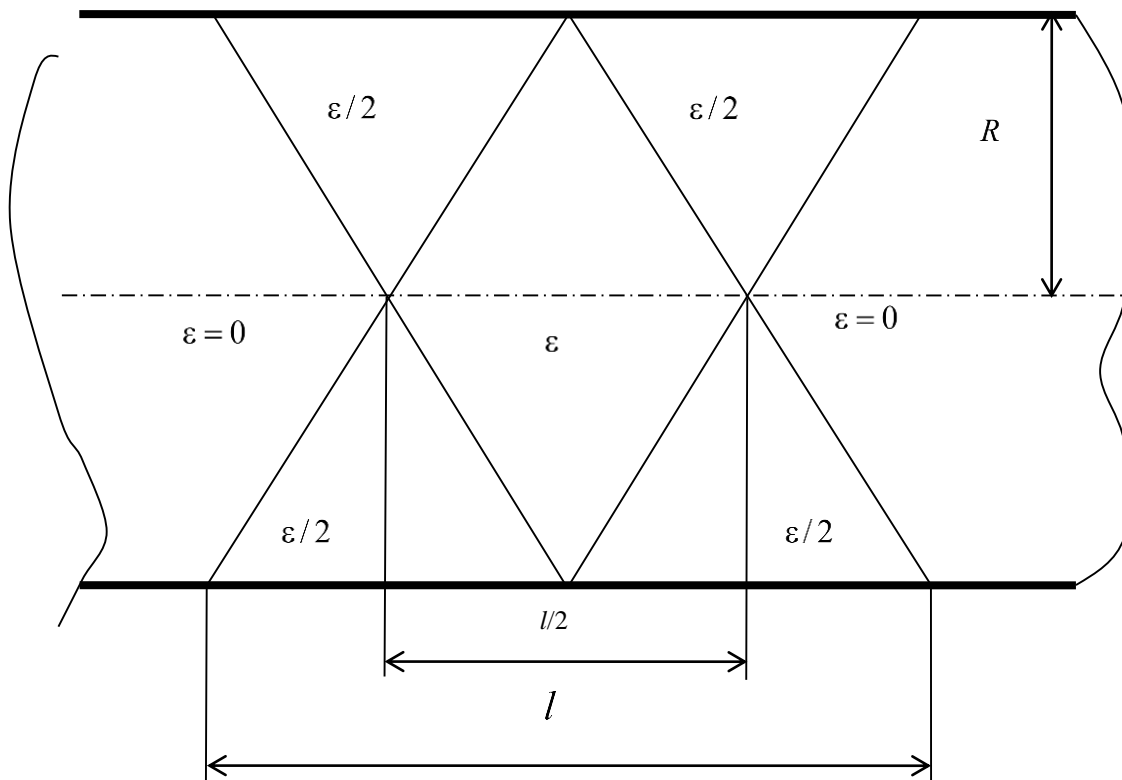


Рис. 4. Расположение областей деформирования с разным удлинением

Пусть недеформируемые части тела под действием нагрузки  $P$  получили малое взаимное перемещение величины  $\delta$ . Положение границ деформированных областей при этом показано на рис. 5.

Сплошными линиями показаны положения образующих (следов границ областей) областей в деформированном состоянии.

Все элементы внутренней области деформирования испытают удлинение в продольном направлении величины

$$\varepsilon_z = \varepsilon = \frac{2\delta}{l}, \quad (3)$$

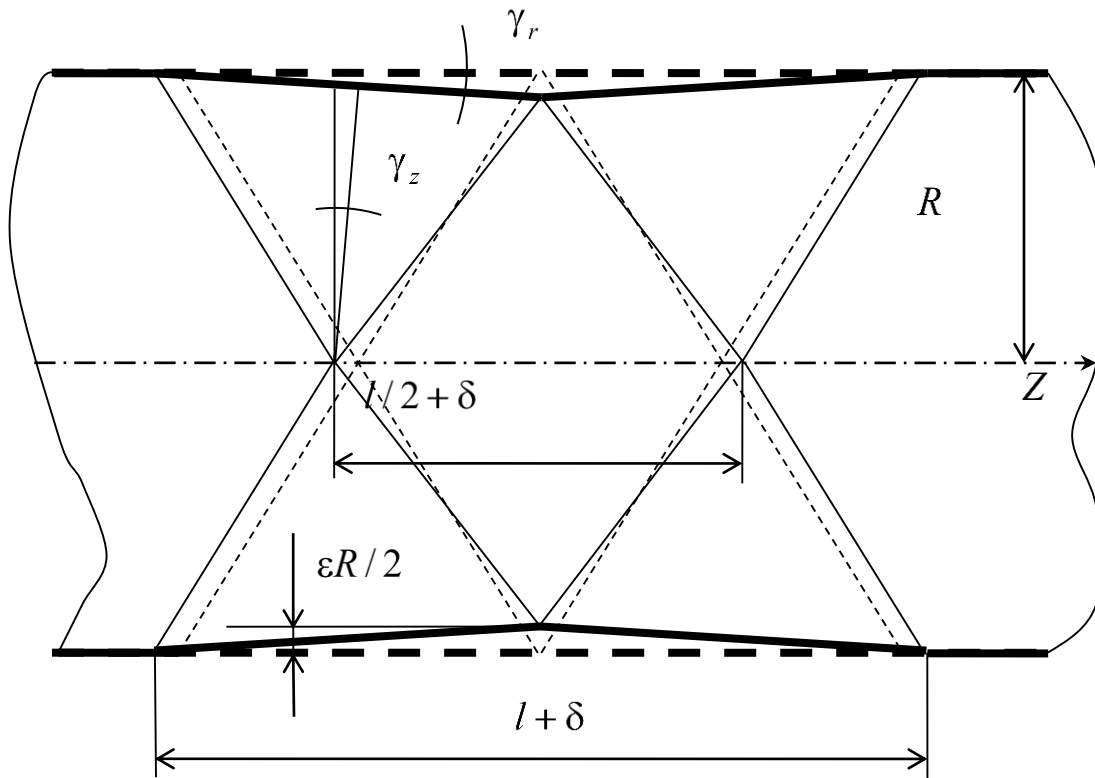
а элементы внешних областей деформирования испытают удлинение величины  $\varepsilon_z = \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\delta}{l}$ , а также сдвиговую деформацию.

Суммарный угол сдвига во внешних областях (см. рис.5):  $\gamma = \gamma_r + \gamma_z$ ,

$$\gamma_r = \frac{dw}{dr} = \frac{\frac{\varepsilon}{2}R}{\frac{l}{2}} = \frac{\varepsilon R}{l} \quad \gamma_z = \frac{du}{dz} = -\frac{\frac{\varepsilon}{2}l}{R} = -\frac{\varepsilon l}{8R}.$$

$$\text{Тогда } \gamma = \gamma_r + \gamma_z = \frac{\varepsilon R}{l} - \frac{\varepsilon l}{8R} = \varepsilon \left( \frac{R}{l} - \frac{l}{8R} \right) = \frac{2\delta}{l} \left( \frac{R}{l} - \frac{l}{8R} \right).$$

Предположим, что действующие в направлениях, перпендикулярных растягивающему усилию кольцевые и радиальные нормальные напряжения пренебрежимо малы, а осевые нормальные и касательные напряжения равны максимально возможным:  $\sigma_z = \sigma_r$ ;  $\tau_{rz} = \frac{\sigma_r}{2}$ .



**Рис. 5. Положение деформированных границ деформированных областей и сдвиговая деформация в наружных областях деформирования**

Тогда диссипация энергии в деформируемом объеме будет равна:

$$D = V_\varepsilon \sigma_T \varepsilon + V_{\varepsilon/2} \sigma_T \frac{\varepsilon}{2} + V_{\varepsilon/2} \frac{\sigma_T}{2} \gamma =$$

$$= \frac{1}{6} \pi R^2 l \sigma_T \frac{2\delta}{l} + \frac{2}{3} \pi R^2 l \sigma_T \frac{\delta}{l} + \frac{2}{3} \pi R^2 l \frac{\sigma_T}{2} \frac{2\delta}{l} \left( \frac{l}{R} - \frac{l}{8R} \right) = \pi R^2 \sigma_T \delta \left( 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{R}{l} - \frac{l}{8R} \right) \right).$$

Работа внешней нагрузки:  $A = P\delta$ . Приравнявая работу внешней нагрузки мощности диссипации и дифференцируя обе части равенства по параметру  $\delta$ , найдем:

$$P = \pi R^2 \sigma_T \left( 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{R}{l} - \frac{l}{8R} \right) \right).$$

Выражение во внутренних скобках равно нулю ( $\gamma = 0$ ) при

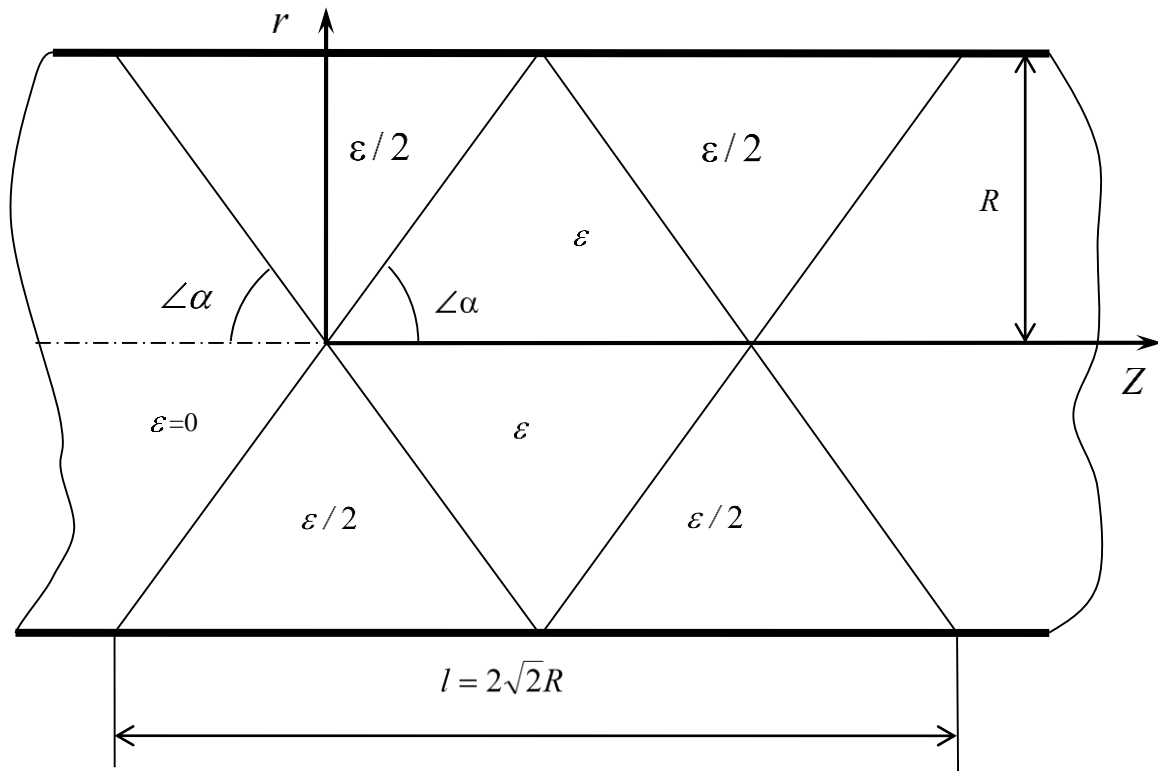
$$l = 2\sqrt{2}R, \tag{4}$$

тогда

$$P = P_{пред} = \pi R^2 \sigma_T = S \sigma_T,$$

что равно предельной нагрузке для равномерного деформирования (2). При этом все элементы деформируемой области испытывают одноосное растяжение.

**Локальное деформирование.  
Детальное рассмотрение найденного поля перемещений**



**Рис. 6. Расположение системы координат для описания поля перемещений в левой половине района локального деформирования (шейки)**

Рассмотрим полученное приближенное решение для локального деформирования более подробно. Начало отсчета цилиндрической системы координат поместим в вершине конической поверхности, ограничивающей левую недеформируемую область (рис. 6). Получим зависимости для левой половины деформируемого района (шейки). Поле (скоростей) перемещений деформируемого района (для  $-\frac{l}{4} \leq z \leq \frac{l}{4}$  при данном расположении системы координат) зададим в следующем виде.

Уравнение прямой (образующей конической поверхности), отделяющей область  $\varepsilon_z = 0$  от области  $\varepsilon_z = \varepsilon/2$ :

$$r = -4 \frac{R}{l} z.$$

Уравнение прямой (образующей конической поверхности), отделяющей область  $\varepsilon_z = \varepsilon/2$  от области  $\varepsilon_z = \varepsilon$ :

$$r = 4 \frac{R}{l} z.$$

Для внутренней области  $\varepsilon_z = \varepsilon$ .

Перемещения  $u$  вдоль оси  $r$  и перемещения  $w$  вдоль оси  $Z$ :

$$\begin{aligned} u &= -\varepsilon r/2, \\ w &= \varepsilon z. \end{aligned} \quad (5)$$

Данному полю (скоростей) перемещений соответствует следующее поле (скоростей) деформаций для области  $\varepsilon_z = \varepsilon$ :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -\varepsilon/2,$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = -\varepsilon/2,$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon,$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

Для внешних областей  $\varepsilon_z = \varepsilon/2$ .

Перемещения  $u$  вдоль оси  $r$  и перемещения  $w$  вдоль оси  $Z$ :

$$u = -\frac{\varepsilon}{4}\left(r + \frac{4R}{l}z\right),$$

$$w = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{4}r + z\right).$$

Данному полю (скоростей) перемещений соответствует следующее поле (скоростей) деформаций:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\varepsilon}{4},$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = -\frac{\varepsilon}{4}\left(1 + 4\frac{R}{l}\frac{z}{r}\right),$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{\varepsilon R}{l} + \frac{\varepsilon l}{8R}.$$

При этом  $\gamma_{rz} = 0$  при

$$l = 2\sqrt{2}R.$$

Для  $l = 2\sqrt{2}R$ :

$$\varepsilon_\theta = -\frac{\varepsilon}{4}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{r}\right) = -\frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{r}.$$

Изменение объема в точках материала равно  $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = -\frac{\varepsilon}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{r}$ .

На поверхностях раздела областей при  $r = \pm 4\frac{R}{l}z = \pm 4\frac{R}{2\sqrt{2}R}z = \pm\sqrt{2}z$  изменению объ-

ема максимально и равно  $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = -\frac{\varepsilon}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{r} = \mp\frac{\varepsilon}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{\sqrt{2}z} = \mp\frac{\varepsilon}{8}$ , знак «+» относится к граничной поверхности недеформируемой области.

Условие сохранения объема:  $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = -\frac{\varepsilon}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{z}{r} = 0$  выполняется только при

$z = 0$  и интегрально для области в целом: для любой точки с осевой координатой  $+z$  имеется ответная точка с осевой координатой  $-z$ , для которой сумма линейных деформаций имеет такую же величину и противоположный знак. Поэтому суммарное изменение объема внешних областей равно нулю.

Для оценки погрешности, вносимой изменением объема, рассмотрим следующие рассуждения. Среднее изменение объема по модулю во внешних областях равно  $\frac{\varepsilon}{16}$ . Поскольку



продольная линейная деформация здесь равна  $\frac{\varepsilon}{2}$ , то лишний объем может быть получен до-  
бавкой лишней деформации величины  $\frac{\varepsilon}{16}$ . Тогда погрешность можно оценить, взяв отноше-  
ние этих величин, которое равно  $2/16=0,125$  или 12,5 %. Данные рассуждения не являются  
строгими и полученные результаты нуждаются в дополнительных проверках, которые со-  
держатся в последующих разделах.

Перемещения на границе с внутренней областью  $\varepsilon_z = \varepsilon$ :

$$u = -\frac{\varepsilon}{4}\left(r + \frac{4R}{l}z\right) = -\frac{\varepsilon}{2}\left(r + \frac{4R}{l}\frac{l}{4R}r\right) = -\frac{\varepsilon}{2}r,$$

$$w = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{4}\frac{l}{R}r + z\right) = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{4}\frac{l}{R}4\frac{R}{l}z + z\right) = \varepsilon z,$$

что совпадает с (5).

Перемещения на границе с недеформируемой областью  $\varepsilon_z = 0$ :

$$u = -\frac{\varepsilon}{4}\left(r + \frac{4R}{l}z\right) = -\frac{\varepsilon}{4}\left(r - \frac{4R}{l}\frac{l}{4R}r\right) = 0,$$

$$w = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{4}\frac{l}{R}r + z\right) = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{4}\frac{l}{R}r - \frac{l}{4R}r\right) = 0.$$

Для правой половины деформируемого района (шейки) аналогичные соотношения  
могут быть получены путем расположения системы координат симметрично относительно  
середины шейки.

Пусть  $\angle\alpha$  – угол наклона образующих конических поверхностей, разграничивающих  
области деформирования, к оси симметрии (рис.6). Величина этого угла однозначно связана  
с длиной района локального деформирования. Для  $l = 2\sqrt{2}R$  согласно рис. 6 следует:  
 $tg\alpha = \frac{R}{(2\sqrt{2}R)/4} = \sqrt{2}$ , при этом  $\alpha = 54,736^\circ$ . Относительное удлинение вдоль образующих

разграничивающих конических поверхностей вычислим по известной формуле [13]:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_z \cos^2 \alpha + \varepsilon_r \sin^2 \alpha + \gamma_{rz} \sin \alpha \cos \alpha.$$

С учетом  $\cos^2 \alpha = \frac{tg^2 \alpha}{1 + tg^2 \alpha} = \frac{1}{3}$ ;  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + tg^2 \alpha} = \frac{2}{3}$  и  $\gamma_{rz} = 0$  находим

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{2\varepsilon}{3} + 0 = 0.$$

Выводы по результатам детального рассмотрения найденного поля скоростей пере-  
мещений:

- при  $l = 2\sqrt{2}R$  минимум энергии, поглощенной пластическими деформациями, обес-  
печивается отсутствием сдвигов в плоскостях, проходящих через ось симметрии;
- поле (скоростей) перемещений непрерывно – на границах областей перемещения оди-  
наковы;
- плоским остается только поперечное сечение внутренней области деформирования  
плоскостью симметрии;
- все элементы тела находятся в состоянии растяжения напряжениями  $\sigma_z = \sigma_T$  анало-  
гично случаю равномерного деформирования и при  $l = 2\sqrt{2}R$  предельная нагрузка  
равна  $P = \pi R^2 \sigma_T = S \sigma_T$ , выполняются условия равновесия, как внутренних элементов,  
так и нагруженных внешней нагрузкой;

- условие постоянства объема выполняется для внутренней области, но не выполняется для точек внешних областей, однако выполняется для внешних областей в целом, интегрально;
- относительное удлинение вдоль образующих разграничивающих конических поверхностей равно нулю.

### Условие локализации деформаций

В работе [11] показано, что условием локализации деформаций при растяжении образца из материала с упрочнением является выполнение неравенства

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon} - \sigma\right) < 0 \quad (6)$$

при равенстве усилий равномерного и локального деформирования. Если это условие выполняется, то при дальнейшем растяжении образца нагрузка уменьшается, причем скорость уменьшения нагрузки для локального деформирования больше, чем для равномерного.

В рассматриваемой задаче одинаковой предельной нагрузке  $P_{пред} = S\sigma_T$  соответствуют два различных поля (скоростей) перемещений: равномерное и локальное, для которого поле (скоростей) перемещений определяется указанными зависимостями. Найденное локальное поле скоростей не принадлежит точному решению, однако, поскольку локализация деформаций есть экспериментальный факт, следовательно, имеется локальное поле скоростей, для которого предельная нагрузка равна нагрузке, соответствующей равномерному полю скоростей, а погрешность полученного решения можно отнести к неточности задаваемого поля скоростей. Для проверки способности разработанной аналитической модели отражать существенные особенности процесса локального деформирования и оценки количественной погрешности расчетов по полученным формулам, сопоставим ее с численным моделированием и экспериментальными фактами.

### Качественное сравнение.

#### Форма шейки на испытанных образцах разного диаметра

На рис. 7 показаны фотографии шейки круглых образцов из пластичной стали, диаметры которых отличаются в 2,5 раза.



Рис. 7. Фото образцов разного диаметра с развитой шейкой:  
левое фото  $D_0=6$ мм, правое фото  $D_0=15$ мм

Сходство формы позволяет заключить, что шейки геометрически подобны и длина района локальных деформаций пропорциональна радиусу образца. Полученное соотношение  $l = 2\sqrt{2}R$  (то есть длина шейки пропорциональна радиусу образца) качественно совпадает с данным наблюдением, следовательно, погрешность в данном соотношении может содержаться только в числовом коэффициенте перед радиусом цилиндра.

Проведенные сопоставления свидетельствуют о качественной правильности полученного аналитического решения.

### Результаты конечно элементного моделирования. Форма недеформируемой части образца при локализации деформаций

На рис.8 приведены результаты конечно элементного моделирования. Показано распределение интенсивности деформаций в верхней половине продольного сечения цилиндрического тела, растягиваемого в горизонтальном направлении. В численном расчете учтены геометрическая и физическая нелинейности. Приведенная на рисунке форма соответствует общему относительному удлинению 4,2375 %. Соотношение размеров цилиндра  $L/D_0=5$ , длина цилиндра  $L=0,4$  м. Материал – пластический с билинейной зависимостью напряжений от деформаций. Модуль Юнга равен 200000МПа, предел текучести – 200Мпа, модуль упрочнения – 20МПа. Сетка имеет одинаковый шаг по вертикали и горизонтали и содержит по радиусу тела 11 узлов. Нагружение производилось сообщением перемещения левой границы относительно правой.

Отметим, что в численном расчете принят низкий модуль упрочнения с тем, чтобы равномерная деформация была минимальной (см. критерий (6)), и расчету подвергалась в основном деформация в районе шейки (в численном расчете шейка образуется практически без равномерной деформации). Это также приближает постановку численного решения к постановке аналитического, где материал полагается жестко-идеально-пластическим.

Сначала сопоставим результаты данного численного расчета (осесимметричный случай) с результатами аналогичного расчета для случая плоской деформации (рис. 9). Размеры продольного сечения, свойства материала, разбивка на элементы и нагрузка идентичны таковым для случая осевой симметрии.

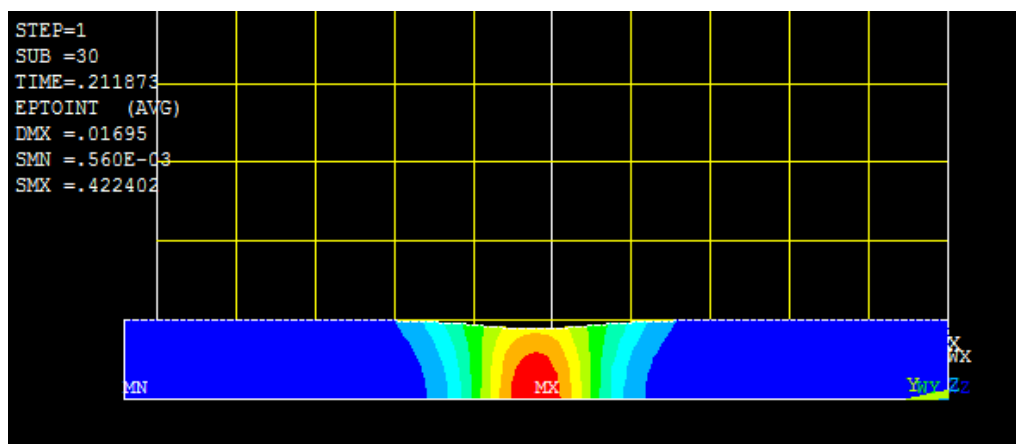


Рис. 8. Осесимметричная деформация  $w_l = 0,01695\text{м}$ ,  $\varepsilon_0 = 0.042375$

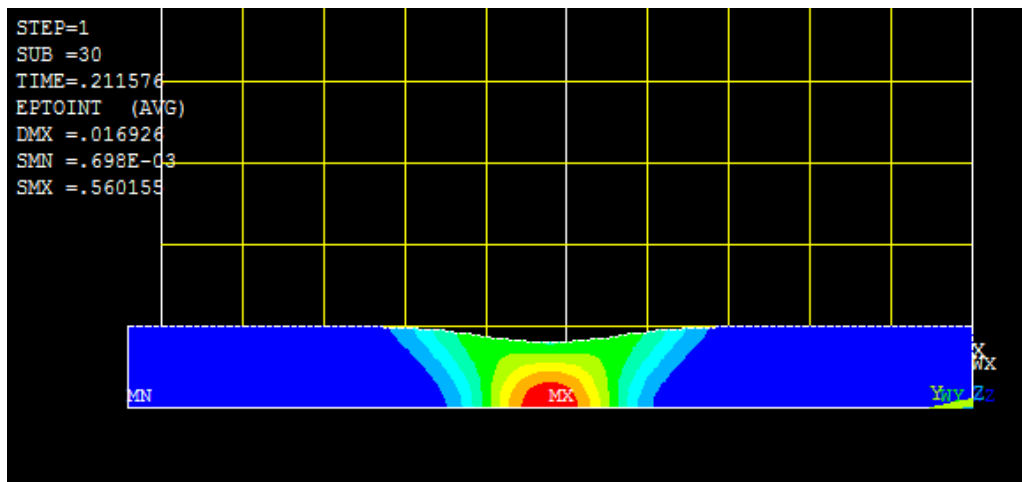


Рис. 9. Плоская деформация  $W_l = 0,01695\text{м}$ ,  $\varepsilon_0 = 0,042375$

По результатам численных расчетов определение длины шейки в момент начала ее образования затруднено: начало локализации захватывает область с нечеткой границей, которая затем отчетливо локализуется уже при значительных деформациях. При дальнейшем деформировании хорошо заметны сходство и отличие в форме недеформируемых внешних по отношению к шейке областей. Сходство в том, что в обоих случаях (как осесимметричной, так и плоской деформации) разграничивающая поверхность не является плоским нормальным поперечным сечением, и длина района деформаций возрастает от оси или плоскости симметрии к наружной поверхности. Также в обоих случаях имеет место увеличение деформаций от поверхности внутрь образца в среднем сечении. Отличие заключается в том, что для осесимметричного случая линия, ограничивающая недеформируемый объем (в продольном сечении), заметно меньше отклонена от нормали к оси (плоскости) симметрии.

Для плоской деформации след границы недеформируемого объема может быть адекватно аппроксимирован отрезком прямой под углом около  $45^\circ$  к оси симметрии. Для осесимметричного случая образующая граничной поверхности недеформируемой области искривлена. Однако очевидно, что при аппроксимации отрезком прямой угол наклона к оси симметрии будет больше, чем для случая плоской деформации. Отметим, что данные численные расчеты легко воспроизводимы при определенном опыте и навыках численных расчетов, содержащих физическую и геометрическую нелинейности.

Далее сопоставим численные и аналитические решения. В аналитических моделях след границы недеформируемой области есть отрезок прямой, проведенный под углом к оси симметрии сечения. Полученные в [11] для плоской деформации и в первом разделе настоящей работы для осесимметричной деформации решения показывают различные значения данных углов:  $45^\circ$  и  $54,7^\circ$  соответственно. В обоих случаях величины углов наклона к оси симметрии найдены из условия отсутствия сдвигов в плоскостях продольных сечений. Форма следа разграничивающей поверхности в численных расчетах имеет аналогичную тенденцию (рис. 8, 9).

Отмеченное выше сходство формы граничной поверхности недеформируемой области в аналитических моделях и в численных расчетах, полученных различными способами, подтверждает правильность основных принципов построения аналитических моделей.

Проведенные сопоставления показывают адекватность отражения в рассмотренных расчетных моделях основных закономерностей явления локализации деформации при растяжении цилиндрических тел и позволяют перейти к количественному сравнению аналитических моделей с результатами численных расчетов.

### Количественное сравнение расчетов по полученным зависимостям. Наименьший диаметр шейки

Применим кинематический механизм, использованный для определения предельной нагрузки при локальном деформировании, для расчета конечных деформаций в районе шейки. Получим зависимости для расчета наименьшего диаметра шейки и максимального продольного относительного удлинения. Пусть  $l$  – первоначальная длина шейки. Обозначим  $w_l$  относительное перемещение недеформируемых областей после образования шейки (рис. 10).

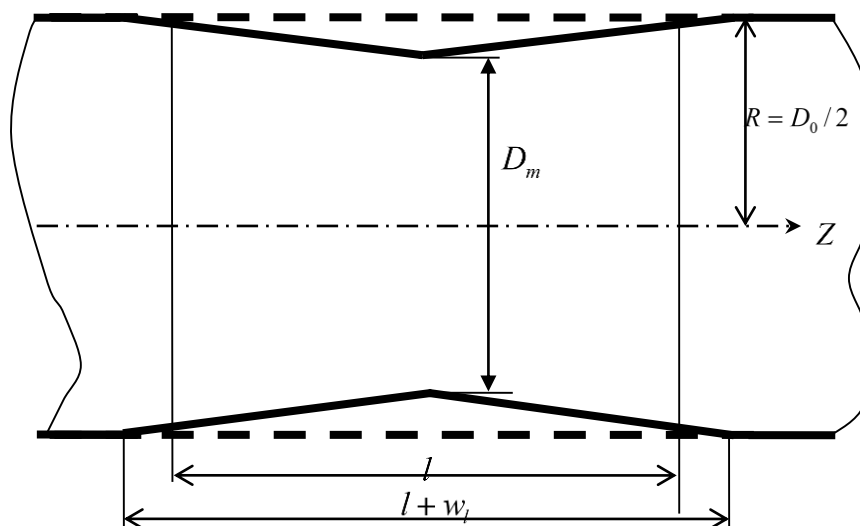


Рис. 10. Схема размеров шейки для расчета конечных деформаций

Используем геометрические соотношения (см. первый раздел данной статьи), заменив  $\delta$  (бесконечно малое перемещение) на  $w_l$ . Тогда, полагая в (3)  $\delta = w_l$ , а в (5)  $r = R$ , найдем уменьшение диаметра в середине шейки:

$$\Delta D = 2 \cdot |u(R)| = 2 \cdot \frac{\varepsilon R}{2} = 2 \cdot \frac{(2w_l/l)R}{2} = \frac{2Rw_l}{l} = \frac{D_0 w_l}{l}.$$

Обозначим:  $D_m$  – минимальный диаметр шейки,  $D_0 = 2R$  – первоначальный диаметр образца. Тогда

$$D_m = D_0 - \Delta D = D_0 - \frac{D_0 w_l}{l} = D_0 \left(1 - \frac{w_l}{l}\right).$$

При этом в соответствии с (4):

$$D_m = D_0 \left(1 - \frac{w_l}{\sqrt{2}D_0}\right) = \left(D_0 - \frac{w_l}{\sqrt{2}}\right). \quad (7)$$

Относительное поперечное сужение образца:

$$\psi = \frac{\pi D_0^2 - \pi D_m^2}{\pi D_0^2} = 1 - \left(\frac{D_m}{D_0}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{w_l}{D_0 \sqrt{2}}\right)^2. \quad (8)$$

Максимальное продольное относительное удлинение в шейке (см. (2) и (3)):

$$\varepsilon_{\max} = \frac{2w_l}{D_0 \sqrt{2}}. \quad (9)$$

Сопоставим количественные результаты численных расчетов, описанных в третьей части настоящей работы для случая осесимметричной деформации и аналитических расчетов по приведенным в четвертой части формулам для трех значений  $w_l$ . Распределение интен-

сивностей деформаций и форма продольного сечения для тех же значений  $w_l$  приведены на рис. 8, 11, 12. Результаты расчетов существенных параметров сведены в табл. 1. Общее относительное удлинение вычислено как отношение относительного перемещения концов тела

$$\text{к первоначальной длине: } \varepsilon_0 = \frac{w_l}{L}.$$

Таблица 1

Результаты расчетов параметров деформирования шейки

$w_l, \text{м}$	$\varepsilon_0$	$\psi$ по численному расчету	$\psi$ по ф. (8)	Расхождение по величине $\psi, \%$	Расхождение по величине $D_m, \%$	$\varepsilon_{\text{max}}$ числ./аналитич.	Расхождение по величине $\varepsilon, \%$
0,01695	0.042375	0,2141	0,2772	29,45	4,27	0,2818/0,2996	6,33
0,03295	0.082375	0,4735	0,4977	5,1	2,38	0,7336/0,5825	25,94
0,04835	0,122675	0,7244	0,6781	6,8	8,1	1,329/0,8653	53,5

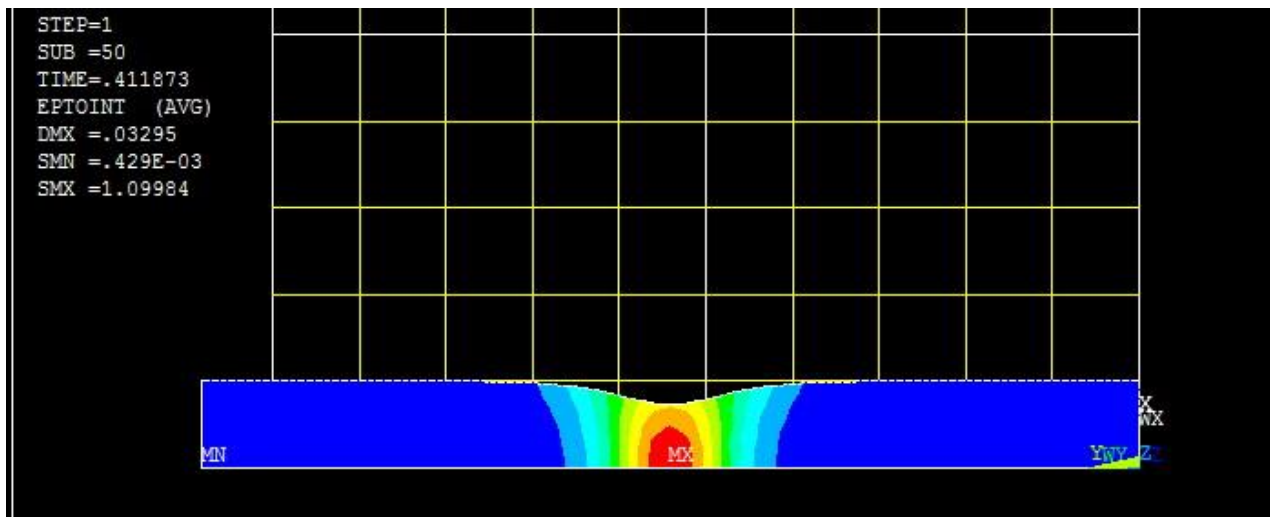


Рис. 11. Осесимметричная деформация  $w_l = 0,03295\text{м}, \varepsilon_0 = 0,082375$

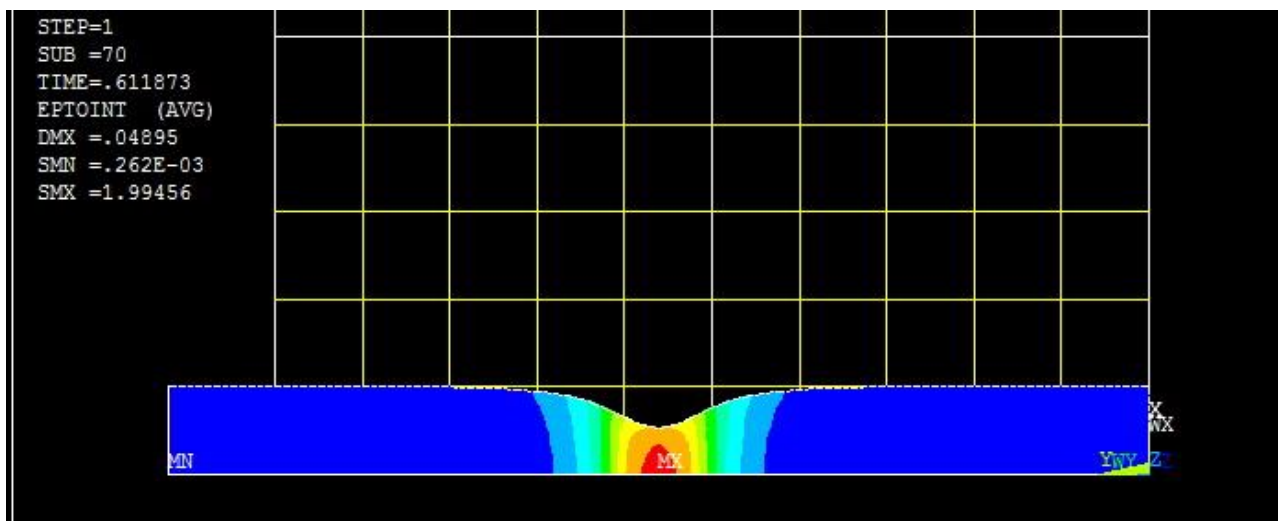


Рис. 12. Осесимметричная деформация  $w_l = 0,04835\text{м}, \varepsilon_0 = 0,122675$

Значительное расхождение в величине  $\psi$  для общего удлинения 0.042375 связано с тем, что при малом отличии  $D_m$  от  $D_0$  малое различие в величине  $D_m$  приводит к значитель-

ному различию в величине  $\psi$ . В остальных сопоставлениях различия в величинах  $D_m$  и  $\psi$  в численном и аналитическом решении достаточно малы.

Значительное расхождение в величине  $\varepsilon_{\max}$  для общего удлинения 0.082375 связано с тем, что при больших величинах  $w_l$ , как следует из результатов численного расчета, деформации в шейке распределяются неравномерно.

За исключением двух указанных случаев, имеет место удовлетворительное совпадение результатов численных и аналитических расчетов. Это показывает, что аналитическая модель может быть использована для расчетной оценки геометрических параметров шейки круглого образца при разрыве. Если известно поперечное сужение  $\psi$  и остаточное удлинение образца вместе с шейкой  $\delta_0$ , то с использованием соотношения (8) может быть вычислено относительное перемещение недеформируемых областей  $w_l$ , а, следовательно, равномерное удлинение, что может быть использовано при расчете удельной энергоемкости металлических материалов. Для ориентировочной оценки величины продольной деформации внутри шейки может быть использована зависимость (9).

### Заключение

Получено приближенное аналитическое решение задачи о предельном равновесии растягиваемого круглого цилиндрического тела для локального поля скоростей, основанное на предположении об уменьшении длины деформированного района от поверхности к оси симметрии. Решение определяет *длину шейки* в начале ее образования в долях радиуса цилиндра и коническую *форму* поверхностей, разграничивающих шейку и недеформируемые внешние области.

Аналитическое решение сопоставлено с результатами численного решения. Обнаружено удовлетворительное совпадение формы поверхностей недеформируемых областей и величины наименьшего диаметра шейки.

Сопоставление формы шейки реальных образцов *различного диаметра* подтверждает вывод аналитического решения о том, что длина шейки пропорциональна диаметру образца.

Вычисленные по полученным зависимостям размеры шейки могут быть использованы для расчета величины равномерного удлинения при определении удельной энергоемкости металлических материалов по формуле (1).

Информация об удельной энергоемкости материала может быть использована при проектировании элементов конструкции систем пассивной безопасности автомобиля, а также различных видов конструктивной защиты.

### Библиографический список

1. **Ефремов, А. К.** Системы защиты от ударных воздействий // Наука и образование. – 2015. – № 11. – С. 344-369.
2. Пат. 2432295 Российская Федерация, МПК В 63 В 3/24, В 63 В 3/14. Корпус судна с защитой отсека при столкновении с другим судном / Петухов В.Н. – № 2010108777/11; заявл. 09.03.10; опубл. 27.10.11, Бюл. № 30.
3. Правила классификации и постройки атомных судов и плавучих сооружений. НД № 2-020101-069. – СПб., 2012. – 151 с.
4. **Гончаров, Р.Б.** Проблемы поиска оптимальных конструктивных параметров бампера автомобиля при ударном воздействии с позиций пассивной безопасности / Р.Б. Гончаров, В.Н. Зузов // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2018. – № 3. – С. 130-136.
5. **Фентон, Дж.** Несущий каркас кузова автомобиля и его расчет / Дж. Фентон; пер. с англ.; под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Машиностроение, 1984. – 200 с.
6. Пат. 2186916 Российская Федерация, МПК Е 04 Н 9/04, Е 04 Н 9/14. Устройство для защиты объектов с атомной энергетической установкой от внешних ударных воздействий / В.Е. Спири, А.В. Агафонов, А.И. Дульнев, В.И. Лебедев, В.А. Никитин., О.М. Палий., В.М. Пашин., Э.Л. Петров, К.Б. Проскураков. – № 2000127925/03; заявл. 08.11.00; опубл. 10.08.02.

7. **Малков, В.П.** Энергоемкость механических систем / В.П. Малков. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 1995. – 258 с.
8. **Данилов, В.И.** О локализации пластической деформации на стадии предразрушения и возможности прогнозирования места и времени вязкого разрыва / В.И. Данилов, Д.В. Орлова, Л.Б. Зуев, И.О. Болотина // Журнал технической физики. – 2011. – Т. 81, вып. 2. – С. 51-57.
9. **Данилов, В.И.** Типы локализации пластической деформации и стадии диаграмм нагружения металлических материалов с различной кристаллической структурой / В.И. Данилов, Л.Б. Зуев, Е.В. Летахова, Д.В. Орлова, И.А. Охрименко // Прикладная механика и техническая физика. – 2006 – № 2. – С. 176-184.
10. **Давиденков, Н.Н.** Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца / Н.Н. Давиденков, Н.И. Спиридонова // Заводская лаборатория. – 1945. – Т. 11, № 6. – С. 583-593.
11. **Уваров, А.И.** Аналитическое определение длины района локальной пластической деформации (шейки) при растяжении широкой металлической пластины / А.И. Уваров // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2016. – № 9. – С. 138-154.
12. **Малинин, Н.Н.** Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
13. **Биргер, И.А.** Соппротивление материалов: Учебное пособие / И.А. Биргер, Р.Р. Мавлютов. – М.: Наука, 1986. – 560 с.
14. **Уваров, А.И.** Пластические деформации оболочечных элементов конструктивной защиты / А.И. Уваров // Судостроительная промышленность. Серия: Проектирование судов. – 1986. – Вып. 3. – С. 43-48.

*Дата поступления  
в редакцию: 06.02.2019*

**A.I. Uvarov**

### **DETERMINATION OF THE NECK LENGTH IN A TENSILE ROUND METAL SPECIMEN FOR THE CALCULATED ASSESSMENT OF THE SPECIFIC ENERGY ABSORPTION OF THE MATERIAL**

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

**Purpose:** The aim of this work was to determine the size of the area of the local plastic deformation (neck) tensile cylindrical sample to determine the energy intensity of the material in the calculation of the passive safety of the car.

**Design/methodology/approach:** The process of the beginning of localization of strain (necking) under tensile cylindrical body of plastic material under conditions of axisymmetric strain state.

**Findings:** Used the kinematic method of limit equilibrium theory. Adopted by the local velocity field of moving consists of two regions of deformation, internal and external, and elongation in the elements of the inner region is twice that in the exterior region. Region of deformation separated from one another and from non-deforming regions inclined planes. From the condition of absence of shear deformations is determined by the length of the area of local deformation, equal to the product of the cylinder diameter to the square root of two. The value of the ultimate tensile load at the local strain equal to the ultimate tensile load with uniform deformation.

Detailed analysis found the velocity field showed that in this case the conditions of equilibrium, the displacement field has no breaks, and separates the surface no deformation. The condition of constancy of the volume as a whole integrally, is observed in the presence of compensating each other of deviations with different signs. Produced qualitative (in the form of non-deforming regions) and quantitative (minimum diameter of the neck) comparison of analytical solutions with numerical simulations. Satisfactory coincidence.

**Originality/value:** The obtained results can be used to assess the effectiveness of the metal alloys used for the manufacture of structural elements, providing passive safety of the car.

*Key words:* passive safety, neck in a round sample, specific power capacity.