

УДК 517.9

Л.Н. Ерофеева, Л.Н. Мазунова

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ АВТОМОБИЛЯ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

В грузовом автотранспорте могут наблюдаться нежелательные колебания кабины с водителем. В статье приводится математическая модель возникновения подобных колебаний, основанная на аппарате теории дифференциальных уравнений. Дается решение соответствующей математической задачи, сопровождаемое рядом графиков, полученных с помощью компьютерного вычисления уравнений движения. Выявлено, что при отсутствии внешнего воздействия рассматриваемая модель описывает колебательный процесс, происходящий в одной плоскости. Наличие внешнего воздействия импульсного типа приводит к появлению бифуркаций, т.е. перехода от одного режима к иному, что выражается в виде возникновения колебаний в других плоскостях. Приведенные графики иллюстрируют некоторые режимы движения кабины: с разными начальными условиями и различным внешним воздействием.

Ключевые слова: грузовой автотранспорт, колебания, математическая модель, дифференциальные уравнения.

При движении автотранспорта, предназначенного для грузовых перевозок, даже незначительные неровности дороги могут вызвать нежелательные колебания кабины с водителем, которые могут нанести вред здоровью. Анализ возникновения и протекания таких колебаний проблематичен ввиду сложности устройства самого транспортного средства. На предлагаемой схеме изображено устройство, которое является типичным для большегрузных автомобилей (рис. 1). Большое количество взаимосвязанных узлов затрудняет выявление основных факторов, являющихся причиной возникновения упомянутых колебаний.

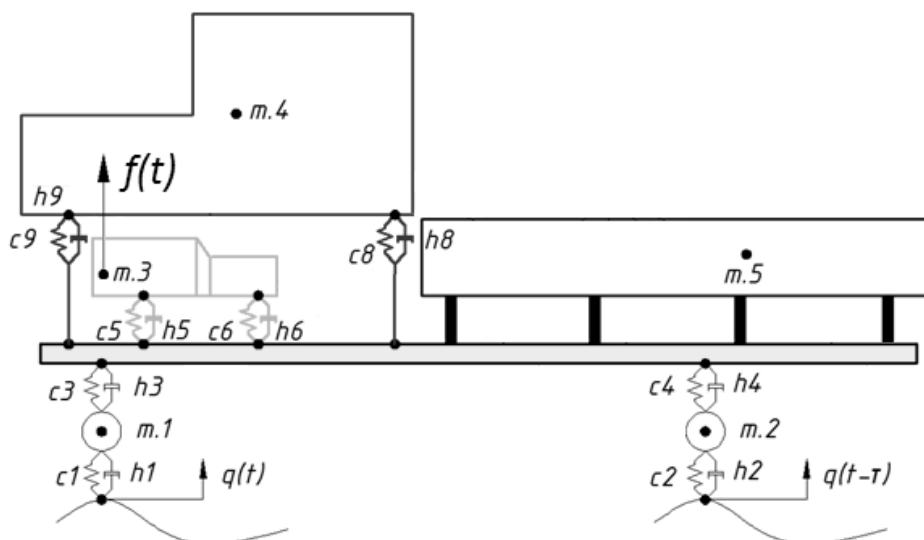


Рис. 1. Эквивалентная схема грузового автомобиля

В настоящей статье предлагается простая модель для описания этого явления, в рамках которой две материальные точки с массами m и M имитируют кабину с водителем и поддерживающий ее мост (рис. 2). Можно принять их за соответствующие центры масс. Взаимодействие между ними осуществляется упругими силами (амортизаторы, рессоры и т.п.), которые

считаются удовлетворяющими третьему закону Ньютона и линейно зависящими от расстояния между точками. Внешняя сила \bar{f} (воздействие дороги) прилагается к точке М. Положение точек определяют их радиус-векторы, исходящие из фиксированной точки О.

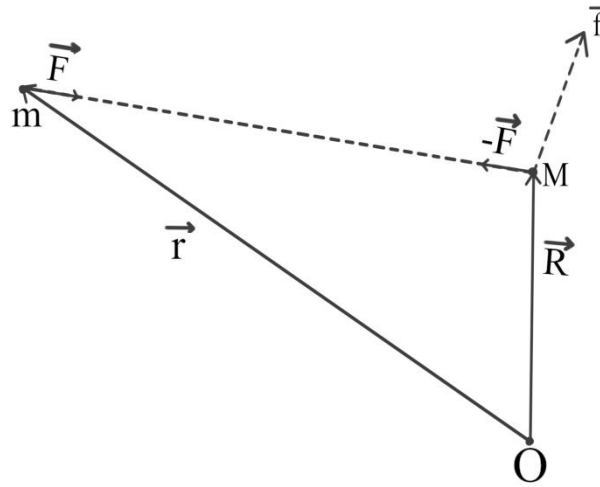


Рис. 2. Схема грузового автомобиля «Кабина-мост»

Второй закон Ньютона дает пару уравнений (1):

$$\begin{aligned} m\ddot{\bar{r}} &= \bar{F}, \\ M\ddot{\bar{R}} &= -\bar{F} + \bar{f}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для упругой силы берется выражение (2)

$$\bar{F} = k(|\bar{R} - \bar{r}| - l), \quad (2)$$

где $\bar{n} = \frac{\bar{R} - \bar{r}}{|\bar{R} - \bar{r}|}$ – единичный вектор вдоль направления от m к М. Это выражение учитывает

третий закон Ньютона и линейную зависимость \bar{F} от расстояния $|\bar{R} - \bar{r}|$ между М и m. Параметр l введен для того, чтобы учесть характер \bar{F} : при больших расстояниях ($|\bar{R} - \bar{r}| > l$) точки m и М притягиваются, а при малых – отталкиваются.

Наконец, используем систему отсчета, в которой центр масс покоится, т.е. (3):

$$m\bar{r} + m\bar{R} = 0. \quad (3)$$

Это необязательно инерциальная система отсчета (например, при неравномерном движении), но при необходимости учитывающая силы инерции.

Учет (2) и (3) позволяет переписать уравнения движения (1) в виде (4):

$$\begin{aligned} \bar{r} &= -\frac{M}{r}\bar{R} \text{ и} \\ M\ddot{\bar{R}} + k\left(1 + \frac{M}{m} - \frac{l}{R}\right)\bar{R} &= \bar{f}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $R = |\bar{R}|$.

Удобнее работать с безразмерными величинами R^* и t^* , определяемыми равенствами $R = \lambda R^*$, $t = \mu t^*$.

Если подобрать λ и μ так, чтобы выполнялись равенства (5):

$$\frac{M\lambda}{\mu^2} = k\left(1 + \frac{M}{m}\right)\lambda = \frac{kl}{\mu}, \quad (5)$$

которые однозначно определяют λ и μ , то основное уравнение (4) превращается в (6)

$$\ddot{\bar{R}} + \left(1 - \frac{1}{R}\right)\bar{R} = \bar{s}, \quad \bar{s} = \frac{1}{\lambda} \bar{f}. \quad (6)$$

В последнем опущен символ (*) в обозначении R^* .

Изучим сначала невозмущенное движение при $\bar{f} = 0$, т.е. рассмотрим уравнение (7):

$$\ddot{\bar{R}} + \left(1 - \frac{1}{R}\right)\bar{R} = 0. \quad (7)$$

Аналогичная задача решается в небесной механике. Прежде всего, это теория планет, главной целью которой является изучение движения отдельной планеты относительно Солнца под действием главной силы – силы притяжения Солнца и менее значительных сил притяжения всех других планет и тел солнечной системы. Установлено, что небесные тела вращаются по плоской орбите, каковой может быть лишь коническое сечение – эллипс, гипербола, парабола. Тривиальный случай – движение по прямой, которое рассматривается как вырожденное. При решении этой задачи небесные тела считаются материальными точками, т.е., предполагается, что расстояния между ними во много раз больше, чем их собственные размеры.

В нашей модели, как далее будет показано, ситуация резко отличается от рассмотренной выше. Характер траектории движения оказывается более сложным. Тем не менее, математический аппарат исследуемой модели, по сути, не отличается от такового в небесной механике. Существенное значение и в данном случае имеют законы сохранения энергии и импульса. Изучение невозмущенного движения, описываемого уравнением (7) – это изучение задачи двух тел в поле центральных сил, классическим примером которой является задача двух тел в небесной механике. Можно получить два закона сохранения: закон сохранения энергии и закон сохранения момента количества движения. Для уравнения (7) формально их можно получить, умножая скалярно на $\dot{\bar{R}}$, а также умножая на \bar{R} векторно. Приведем окончательные результаты (8):

$$\frac{d}{dt} [\bar{R}, \dot{\bar{R}}] = 0, \text{ т.е. } \bar{\Omega} = [\bar{R}, \dot{\bar{R}}] = const \text{ и} \quad (8)$$

$$\dot{\bar{R}}^2 + (\bar{R} - 1)^2 = const.$$

В справедливости (8) проще всего убедиться дифференцированием, имея в виду, что $\dot{\bar{R}}^2 = (\dot{\bar{R}}, \dot{\bar{R}})$, а $R^2 = (\bar{R}, \bar{R})$.

Закон сохранения момента количества движения $\bar{\Omega} = [\bar{R}, \dot{\bar{R}}] = const$ показывает, что движение М происходит в плоскости, перпендикулярной $\bar{\Omega}$. Определение орбиты М и ее параметров, т.е. по существу решение основного уравнения (7) получается следующим образом. Введем декартову систему координат так, чтобы ось Z была параллельна $\bar{\Omega}$, а также сопутствующую ей цилиндрическую систему координат. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \{x, y, 0\} = \{R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0\}, \\ \dot{\bar{R}} &= \{\dot{x}, \dot{y}, 0\} = \{\dot{R} \cos \varphi - R \sin \varphi \dot{\varphi}, \dot{R} \sin \varphi + R \cos \varphi \dot{\varphi}, 0\} \text{ и} \\ \dot{\bar{R}}^2 &= \dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 \text{ и (8) переходит в (9):} \\ \dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2 + (R - 1)^2 &= k^2 (= const). \end{aligned} \quad (9)$$

Для $\Omega = |\bar{\Omega}|$ получается выражение $\Omega = x\dot{y} - y\dot{x} = R^2 \dot{\varphi}$.

Теперь для определения орбиты после подстановки в (9) $\dot{\varphi} = \frac{\Omega}{R^2}$ получаются два уравнения (10), (11):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\Omega}{R^2}, \quad \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = k^2 - \frac{\Omega^2}{R^2} - (R - 1)^2. \quad (10)$$

Зависимость R от φ описывается уравнением

$$\frac{dR}{d\varphi} = \pm \frac{R^2}{\Omega} \sqrt{k^2 - \frac{\Omega^2}{R^2} - (R-1)^2}, \quad (11)$$

допускающим решение в эллиптических интегралах. Значение констант k и Ω определяются из начальных данных и движение M происходит в кольце (12):

$$R_{\min} \leq R \leq R_{\max}, \quad (12)$$

где R_{\min} и R_{\max} – корни подкоренного выражения (11).

При наличии внешней силы \bar{f} не удастся проинтегрировать основное уравнение (6). Поэтому сделаем некоторые правдоподобные ограничения на характер \bar{f} . Пусть \bar{f} моделирует последовательность кратковременных «толчков», т.е. \bar{f} отличается от нуля на последовательность (допускается и случайной) коротких временных промежутков. Рассмотрим воздействие одного «толчка», длящегося промежутков времени $[0, \tau]$. Интегрирование (6) по t в пределах от 0 до τ дает (13):

$$\dot{\bar{R}} \Big|_0^\tau + \int_0^\tau \left(1 - \frac{1}{R}\right) \bar{R} d\tau = \int_0^\tau \bar{s} d\tau = \bar{S}. \quad (13)$$

Интегралом в левой части при малом τ можно пренебречь и, следовательно, происходит скачок скорости $\dot{\bar{R}}$ на величину \bar{S} . Тем самым при $t = \tau$ изменяются начальные условия (7), и колебания будут происходить, вообще говоря, в другой плоскости. Ее положение и орбиту движения нетрудно описать.

Приведем ряд полученных компьютерными вычислениями уравнений движения графиков, которые иллюстрируют движение M при различных режимах: с разными начальными условиями и внешним воздействием.

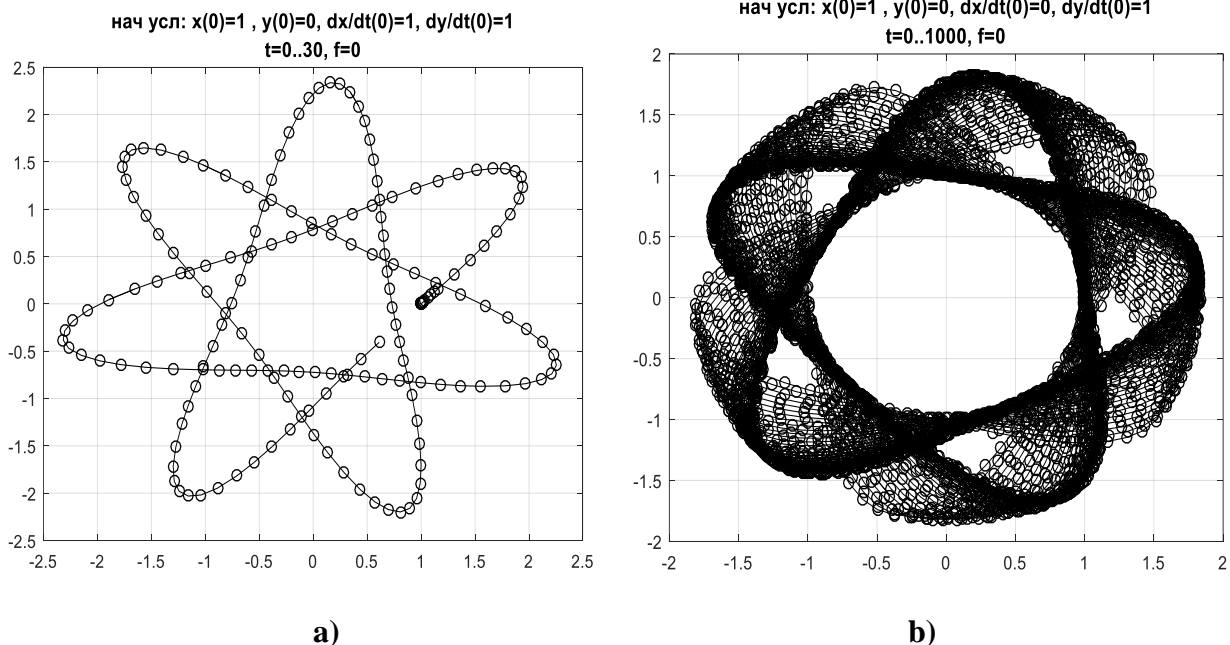


Рис. 3. Движение при отсутствии внешнего воздействия ($\bar{f} \equiv 0$):

a) начальные условия $x(0) = 1, y(0) = 1, \dot{x}(0) = 1, \dot{y}(0) = 1, t = \underline{0,30}$;

b) начальные условия $x(0) = 1, y(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 1, t = \underline{0,1000}$

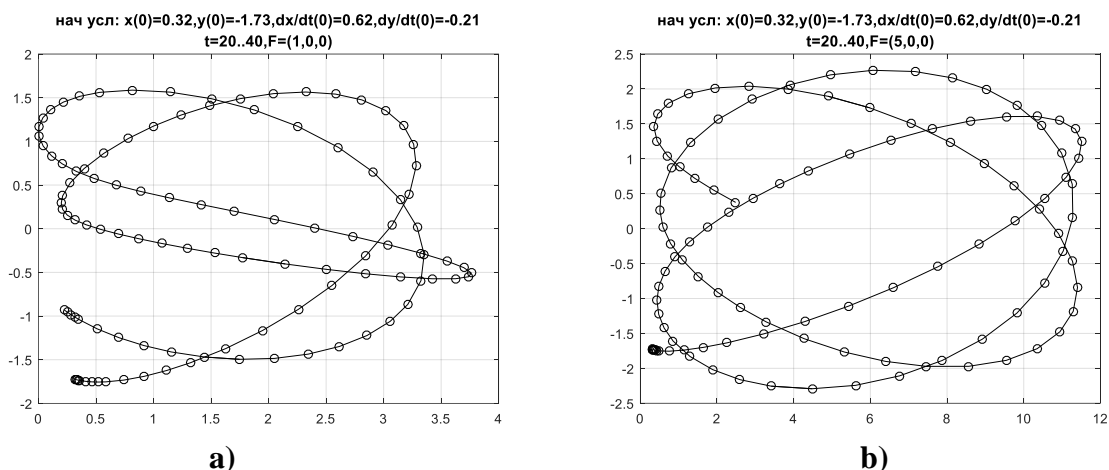


Рис. 4. Движение при наличии внешнего воздействия, действующего в плоскости:
 Начальные условия $x(0) = 0,32$, $y(0) = -1,73$, $\dot{x}(0) = 0,62$, $\dot{y}(0) = -0,21$, $t = \overline{0,30}$:
 а) $\bar{f} = \{1; 0; 0\}$; б) $\bar{f} = \{5; 0; 0\}$

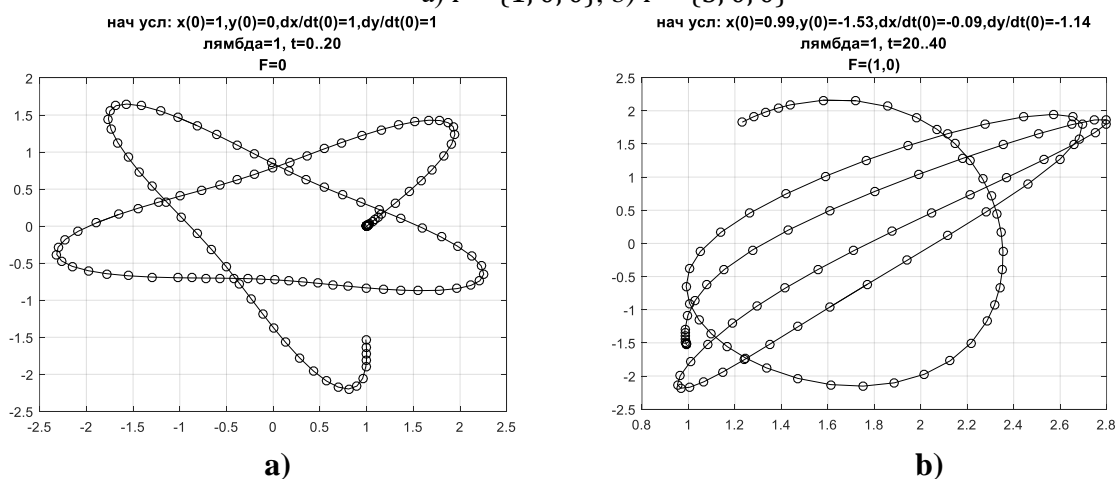


Рис. 5. Движение при отсутствии и наличии внешнего воздействия, действующего в плоскости:
 а) начальные условия $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$, $t = \overline{0,20}$, $\bar{f} = 0$;
 б) начальные условия $x(0) = 0,99$, $y(0) = -1,53$, $\dot{x}(0) = -0,09$, $\dot{y}(0) = -1,14$, $t = \overline{20,40}$, $\bar{f} = \{1,0,0\}$

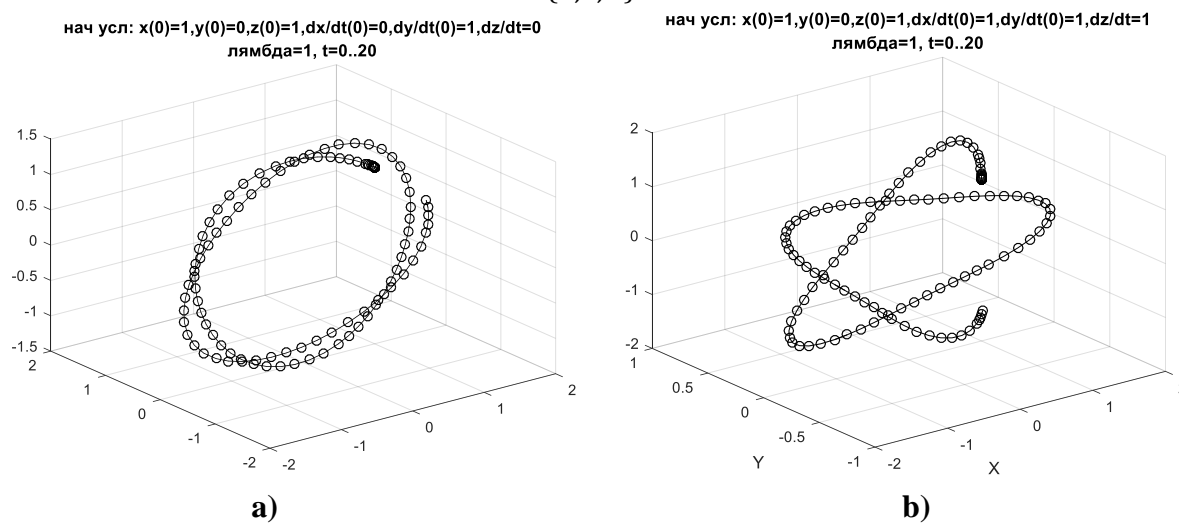


Рис. 6. Движение при отсутствии внешнего воздействия ($\bar{f} \equiv 0$):

- а) начальные условия
 $x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 1, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 1, \dot{z}(0) = 0, t = \overline{0,20}$;
 б) начальные условия $x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 1, \dot{x}(0) = 1, \dot{y}(0) = 1, \dot{z}(0) = 1, t = \overline{0,20}$

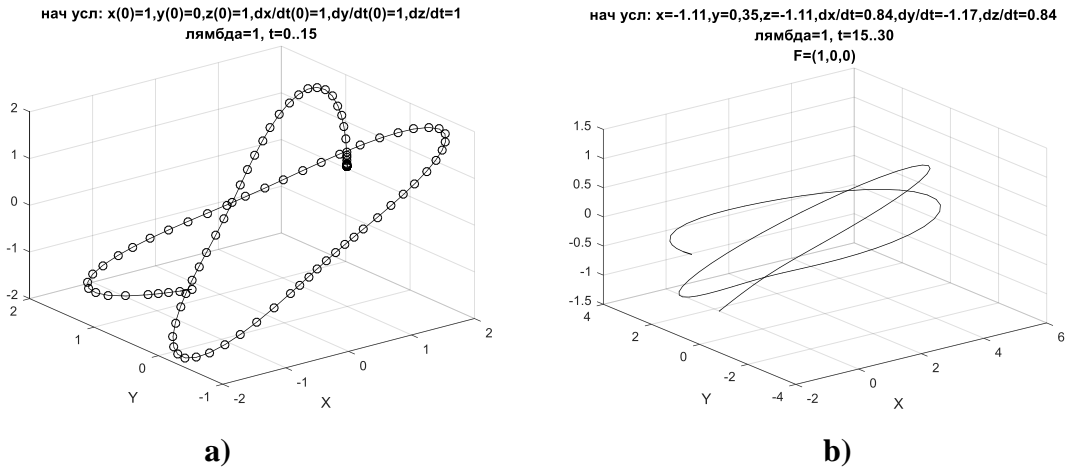


Рис. 7. Движение при отсутствии и наличии внешнего воздействия:

а) начальные условия $x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 1, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 1, \dot{z}(0) = 0, t = \overline{0, 15}, \bar{f} = 0$; б) начальные условия $x(0) = -1,11, y(0) = 0,35, z(0) = -1,11, \dot{x}(0) = 0,84, \dot{y}(0) = -1,17, \dot{z}(0) = 0,84, t = \overline{15, 30}, \bar{f} = \{1, 0, 0\}$

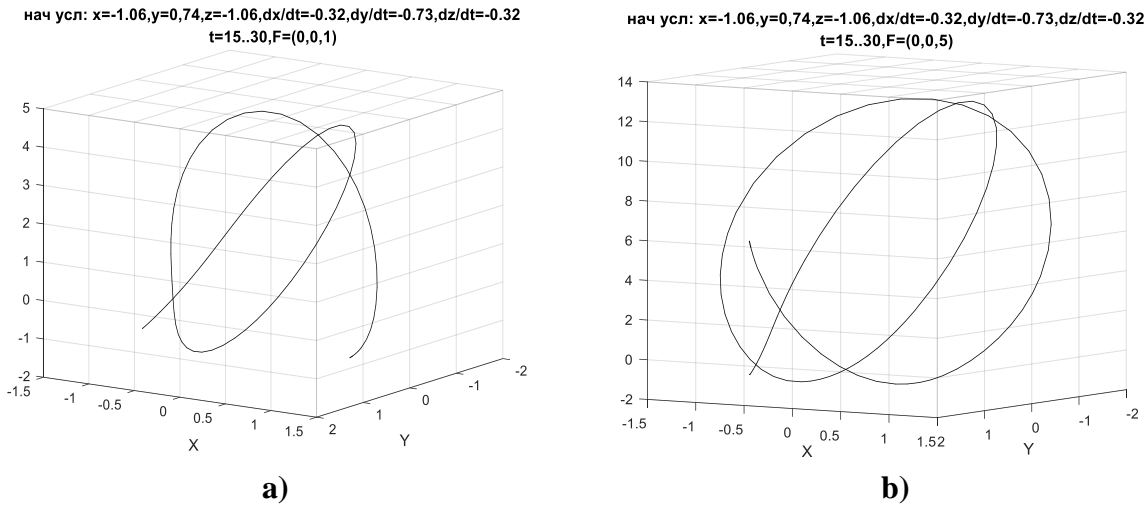


Рис. 8. Движение при наличии внешнего воздействия:

Начальные условия $x(0) = -1,06; y(0) = 0,74; z(0) = -1,06; \dot{x}(0) = -0,32; \dot{y}(0) = -0,73; \dot{z}(0) = -0,32; t = \overline{15, 30}$: а) $\bar{f} = \{0; 0; 1\}$; б) $\bar{f} \{0; 0; 5\}$

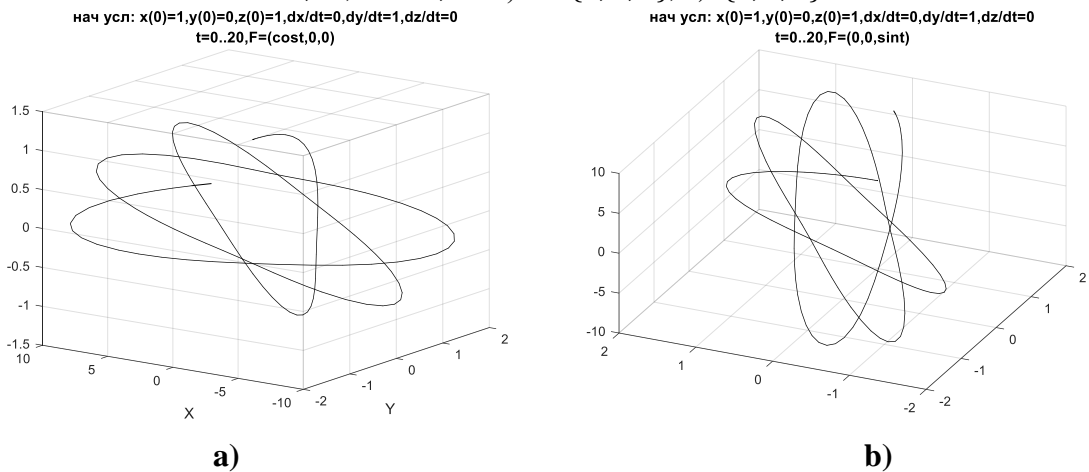


Рис. 9. Движение при наличии внешнего воздействия.

Начальные условия $x(0) = 1; y(0) = 0; z(0) = 1; \dot{x}(0) = 0; \dot{y}(0) = 1; \dot{z}(0) = 0; t = \overline{0, 20}$: а) $\bar{f} = \{\cos t; 0; 0\}$; б) $\bar{f} = \{0; 0; \sin t\}$

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод, что при отсутствии внешнего воздействия модель описывает колебания, которые происходят в одной плоскости. Наличие же внешней возмущающей силы влечет за собой колебания в других плоскостях. Кроме того, наибольшее влияние на характер колебаний, по-видимому, имеет отношение масс $\frac{m}{M}$. Чем оно меньше, тем более сильное воздействие оказывают на водителя внешние силы.

Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации и совершенствования конструктивных элементов, потребительских и эксплуатационных параметров безрельсовых транспортных средств.

Библиографический список

1. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2009, – 736 с.
2. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – МЦНМО, 2018, – 344 с.
3. Бухгольц, Н.Н. Основы курса теоретической механики / Н.Н. Бухгольц. – СПб.: Лань, 2009, – 480 с.

*Дата поступления
в редакцию: 26.02.2019*

L.N. Erofeeva, L.N. Mazunova

ONE A MODEL OF THE STIMULATION OF THE VIBRATIONS IN AUTOMOBILE ELEMENTS

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev

Purpose: The article raises the problem of undesirable fluctuations of the cabin with a driver in heavy goods vehicles.

Design/methodology/approach: Apparatus of theory of ordinary differential equations is used.

Findings: The mathematic model of the stimulation of the vibrations is given. The solution of corresponding mathematic problem is given which is accompanied by various graphs that show different movement modes of the cabin.

Originality/value All results are new.

Key words: heavy goods vehicles, vibrations, mathematical model, differential equations.