

УДК 004.942

П.В. Лобовиков, О.Е. Куркина, А.А. Куркин

**ТРАНСФОРМАЦИЯ ВНУТРЕННИХ БРИЗЕРОВ В ТРЕХСЛОЙНОМ ОКЕАНЕ  
С УЧЕТОМ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ**

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Моделируется процесс распространения и трансформации под действием вращения Земли вдоль трассы в горизонтально-однородной стратифицированной по плотности жидкой среде локализованных возмущений в рамках уравнения мКдВ-Островского. Условие в начальной точке трассы задается в соответствии с точным решением уравнения мКдВ из семейства неизлучающих волновых пакетов-бризеров. Распределение плотности жидкости по вертикали задавалось таким образом, чтобы обеспечить условия существования указанных решений (положительный знак коэффициента кубической нелинейности). При этом был выбран наиболее простой профиль с двумя равными слегка сглаженными скачками плотности на одинаковом расстоянии от дна и поверхности. Влияние вращения Земли на долговременную эволюцию бризеров исследовано для решений различной формы и с различной шириной спектра в частотной области. Показано, что наиболее сильная трансформация волнового поля под действием вращения Земли наблюдается в бризерах с широким спектром, при этом спектр сдвигается в область низких частот. Отмечается также явление квази-рекуррентности бризеров, ранее известное для уединенных внутренних волн во вращающейся жидкости.

*Ключевые слова:* нелинейный волновой пакет, внутренние волны, стратификация, неоднородная среда, модифицированное уравнение Кортевега-де-Вриза.

**Введение**

Длинным нелинейным внутренним уединенным волнам уделялось много внимания в течение последних нескольких десятилетий: получены многочисленные доказательства их распространенности в прибрежных и окраинных морях и достигнуты большие успехи в понимании динамики этих волн. Качественные их особенности хорошо описываются классом теоретических моделей на основе КдВ-иерархии (хотя количественные характеристики не всегда воспроизводятся точно) [1, 2]. Интересным явлением среди квазистационарных волн являются так называемые бризеры. Они представляют собой волновые пакеты со стационарной (или медленно меняющейся в горизонтально-неоднородной среде) огибающей. Прототипами таких структур являются точные локализованные решения некоторых уравнений слабонелинейной теории, включая модифицированное уравнение Кортевега-де-Вриза и уравнение Гарднера [3], которые хорошо описывают динамику внутренних волн в стратифицированных средах. Бризеры могут иметь различные формы, как типичные для солитонов огибающей (которые являются общими решениями нелинейного уравнения Шредингера), так и в виде пары солитонов противоположных полярностей, которые «изменяют фазу» через определенные промежутки времени [4-7]. Численное моделирование демонстрирует, что такие структуры могут сохраняться как долгоживущие внутренние волны также в полнелинейных уравнениях Эйлера [8, 9]. Подобные структуры иногда наблюдались в океане, например, у берегов Южной Кореи [10], Нью-Джерси [11], в Андаманском море [12], в Кельтском море [13, 14].

Систематические исследования отдельных аспектов динамики внутренних бризеров начались только недавно [9, 15-18], и по-прежнему существуют серьезные недостатки в понимании потенциальных механизмов их генерации и возможной роли этих структур в динамике морей и океанов. Естественно, что многие факторы, такие как горизонтальная неоднородность стратифицированных вод в морях и океанах, учет реалистичной формы дна и/или вращения Земли, могут существенно повлиять на поле таких нелинейных объектов. Здесь мы

рассмотрим задачу о трансформации бризера внутренних волн в трехслойном океане с учетом вращения Земли.

Вращение Земли является одним из важных факторов при теоретическом описании внутренних волн в океане. Этот фактор можно игнорировать, когда волны, длинные по сравнению с глубиной океана, являются короткими по сравнению с внутренним радиусом деформации (Россби), так что  $\gamma = L / L_R \ll 1$ . Здесь  $L$  – характерная длина волны,  $L_R = c_0 / f_{in}$  – радиус деформации,  $c_0$  – фазовая скорость длинных линейных внутренних волн, а  $f_{in} = 2 \times \Omega_E \sin \varphi$  – инерционная частота (параметр Кориолиса),  $\Omega_E$  – частота вращения Земли,  $\varphi$  – географическая широта акватории, где распространяются волны. Однако эти слабые эффекты, связанные с вращением, могут быть сопоставимы с нелинейными и негидростатическими (дисперсионными) эффектами при достаточно больших длинах волн, в высоких широтах и при большой длине трассы распространения волны (время распространения составляет несколько инерционных периодов).

При распространении волн в одном направлении в области, неограниченной в поперечном направлении, эволюцию смещения изопикнических поверхностей определяет уравнение КдВ с вращением, называемое еще уравнением Островского [19, 20]. Уединенные внутренние волны при распространении во вращающейся среде затухают и распадаются, излучая более длинные инерционно-гравитационные волны, и затем трансформируются в локализованные волновые пакеты, распространяющиеся с максимальной групповой скоростью, соответствующей дисперсионному соотношению для линейной версии уравнения Островского [21]. Они состоят из длинноволновой огибающей и более коротких, более быстрых волн несущей. Излучение при этом очень слабое, что приводит к формированию устойчивых структур, которые могут содержать до 50 % энергии в исходной уединенной волне [22]. Взаимодействующие пакеты могут либо проходить друг через друга, либо сливаться в более длинный пакет. Связанные уравнения Островского, описывающие взаимодействие двух различных вертикальных мод внутренних волн, имеющих близкие скорости, получены в работе [23]. При взаимодействии уединенных импульсов различных мод наблюдался тот же эффект генерации локализованных пакетов.

Здесь мы рассмотрим процесс трансформации внутренних бризеров в горизонтально-однородной среде под влиянием вращения в рамках уравнения мКдВ-Островского. Тестовой моделью жидкости является симметричная по вертикали трехслойная жидкость, где фоновые условия могут обеспечить условия, необходимые для существования бризеров в рамках уравнения мКдВ (положительный знак коэффициента кубической нелинейности).

## Основные уравнения и фоновые условия

### 1. Модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза (мКдВ).

В случаях, когда квадратичная нелинейность обращается в ноль, например, при симметричных относительно половинной глубины профилях плотности и течения, в эволюционном уравнении, описывающем распространение внутренних волн одной моды, удерживают кубический нелинейный член, опуская другие члены второго порядка. Получаемое при этом уравнение называют модифицированным уравнением Кортевега-де Вриза (1):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha_1 \eta^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \quad (1)$$

где  $x$  – горизонтальная координата, вдоль которой происходит распространение волны,  $t$  – время,  $\eta(x, t)$  – смещение изопикнической поверхности в точке максимума линейной моды. Скорость распространения длинных линейных внутренних волн,  $c$ , и структура (мода) волны  $\Phi(z)$  по вертикальной координате  $z$ , направленной вверх, определяются решением следующей задачи Штурма-Лиувилля (2):

$$L\Phi = 0, \quad (2)$$

с граничными условиями  $\Phi = 0$  на дне ( $z = -H$ ) и на поверхности ( $z = 0$ ) жидкости (приближение твердой крышки). Здесь  $L$  – самосопряженный линейный оператор (3):

$$L \equiv \frac{d^2}{dz^2} + \frac{N^2}{c^2}, \quad (3)$$

а  $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0(z)} \frac{d\rho_0}{dz}$  – частота Брента–Вайсяля,  $\rho_0(z)$  – плотность жидкости в невозмущенном состоянии,  $g$  – ускорение свободного падения.

Коэффициент линейной высокочастотной дисперсии  $\beta$  в уравнении (1) определяется формулой (4):

$$\beta = \frac{3c^2}{2I} \int_{-H}^0 \Phi^2 dz, \quad I = 2c \int_{-H}^0 (d\Phi / dz)^2 dz, \quad (4)$$

где  $H$  – полная глубина жидкости, а для нахождения коэффициента кубической нелинейности  $\alpha_1$  (5):

$$\alpha_1 = \frac{3c^2}{I} \int_{-H}^0 dz \left[ 3(dT_n / dz) - 2(d\Phi / dz)^2 \right] (d\Phi / dz)^2, \quad (5)$$

необходимо предварительно решить неоднородную краевую задачу (6):

$$LT_n = \frac{3}{2} \frac{d}{dz} \left\{ \left( \frac{d\Phi}{dz} \right)^2 \right\}, \quad T_n = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = -H. \quad (6)$$

Уравнение (1) является интегрируемым и решается методом обратной задачи рассеяния [24]. Его решение в виде уединенной волны (на нулевом пьедестале) существует лишь при  $\alpha_1 > 0$  и имеет вид (7):

$$\eta(x, t) = a \operatorname{sech} \left( \sqrt{\frac{\alpha_1 a^2}{6\beta}} (x - Vt) \right), \quad V = c + \frac{\alpha_1 a^2}{6}, \quad (7)$$

где  $a$  – произвольная по величине и знаку амплитуда волны. Полярность солитона может быть любой и не зависит от параметров уравнения. При  $\alpha_1 < 0$  солитонные решения существуют только на ненулевом пьедестале, но существуют стационарные решения в виде бездиссипативных ударных волн [25]. Известны также другие элементарные возмущения в рамках модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза (1) при  $\alpha_1 > 0$  – бризеры, или «осциллирующие пульсирующие солитоны» [26] (8):

$$\eta(x, t) = -4q a \operatorname{sech} \theta \left[ \frac{\cos \phi - (q/p) \sin \phi \cdot \operatorname{th} \theta}{1 + (q/p)^2 \sin^2 \phi \cdot \operatorname{sech}^2 \theta} \right], \quad (8)$$

где фазы «несущей»,  $\phi$ , и «оггибающей»,  $\theta$ , задаются так (9):

$$\phi = 2p \frac{x}{L} + 8p(p^2 - 3q^2) \frac{t}{T} + \phi_0, \quad \theta = 2q \frac{x}{L} + 8q(3p^2 - q^2) \frac{t}{T} + \theta_0. \quad (9)$$

Здесь  $q$  и  $p$  – спектральные параметры в ассоциированной АКНС-схеме [26], которые характеризуют амплитуду (высоту) бризера и количество индивидуальных волн в бризере.  $\phi_0$  и  $\theta_0$  – начальные фазы, а пространственный и временной масштабы определяются амплитудой бризера,  $a$ , и коэффициентами уравнения мКдВ (1), определяемыми средой распространения волн (10):

$$L = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{6\beta}{\alpha_1}}, \quad T = \frac{6}{\alpha_1 a^3} \sqrt{\frac{6\beta}{\alpha_1}}. \quad (10)$$

«Групповая» скорость бризера (скорость распространения его как локализованного возмущения) в системе отсчета, движущейся с линейной скоростью  $c$ , имеет вид (11):

$$V_{gr} = \frac{2}{3} \alpha_1 H^2 (q^2 - 3p^2). \quad (11)$$

При больших значениях параметра  $p$  бризер состоит из множества отдельных волн и представляет собой солитон огибающей с амплитудой  $4qa$ , распространяющейся влево. При малых значениях  $p$  бризер состоит из пары импульсов противоположных полярностей. Его максимальное (и минимальное) значение изменяется во времени с абсолютным максимумом (или минимумом), равным  $4qa$ . Он распространяется медленнее линейных волн, если  $p > \frac{q}{\sqrt{3}}$ , и быстрее их, если  $p < \frac{q}{\sqrt{3}}$ . В предельном случае  $p \rightarrow 0$  скорость бризера стремится к скорости солитона с амплитудой около  $2qa$ .

Спектральная амплитуда бризера (3) в фиксированной точке  $x$ , рассчитываемая с помощью преобразования Фурье (12):

$$S_j = \frac{2}{N} \left| \sum_{k=1}^N \eta(x_k, t=0) w_N^{(k-1)(j-1)} \right|, \quad w_N = \exp\left(\frac{-2\pi i}{N}\right) \quad (12)$$

имеет качественный вид, показанный на рис. 1. Спектр имеет единственный максимум величиной  $S_{max}$ , соответствующий частоте  $f_{max}$ , а также характеризуется шириной  $\Delta f$ , взятой, например, по уровню  $S_{max}/e$ .

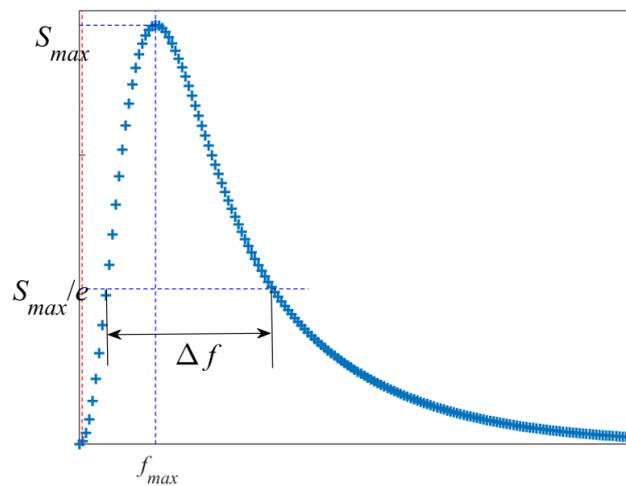


Рис. 1. Схематическое изображение амплитудного спектра (12) бризера (8) уравнения мКдВ (1)

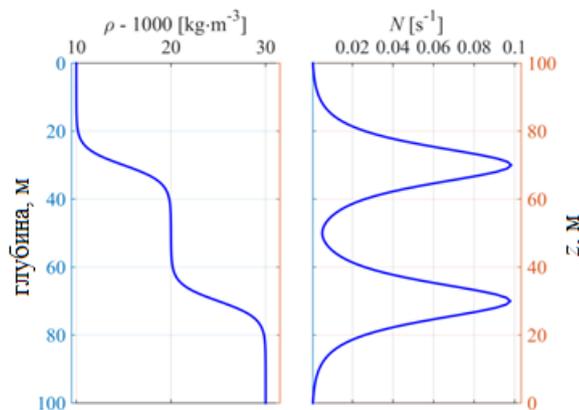
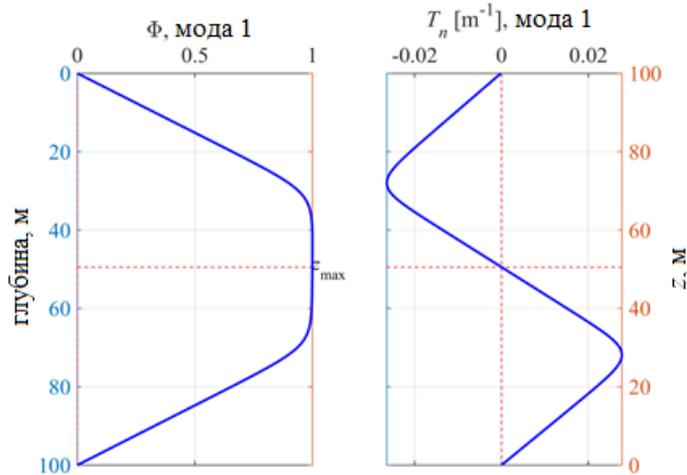


Рис. 2. Слева: модельный вертикальный профиль плотности в квази-трехслойной жидкости; справа: частота Брента-Вайсяля

Начальная задача для уравнения (1) с положительной кубической нелинейностью изучена в работе [27], где обсуждаются условия трансформации исходного волнового поля в солитоны или бризеры.

## 2. Фоновые условия (трехслойная стратификация).

Чтобы проиллюстрировать общую теорию, описанную выше, рассмотрим простой пример со слегка сглаженной трехслойной симметричной стратификацией. Для простоты примем в расчетах  $u = 0$ . Вертикальные профили плотности и частоты Брента – Вайсяля для этого случая показаны на рис. 2, вертикальная структура первой моды и поправка к ней – на рис. 3. Коэффициенты уравнения мКдВ (1) для такой стратификации принимают следующие значения:  $c = 1.63$  м/с,  $\beta = 786$  м<sup>3</sup>/с,  $\alpha_1 = 0.0018$  1/(м·с).



**Рис. 3.** Слева: типичная форма первой линейной моды для внутренних волн в симметричной трехслойной жидкости; справа: нелинейная поправка к ней

## 3. Уравнение мКдВ-Островского

Как уже упоминалось, эффект вращения обычно приводит к затуханию уединенной волны под действием излучения инерционно-гравитационных волн [2] и исследования [21, 29]. На практике временной масштаб этого затухания составляет несколько, как правило, один-два инерционных периода. Многие работы [19, 29-32] посвящены теоретическим моделям, которые включают вращательные эффекты на том же уровне малости, что и эффекты нелинейности и дисперсии. Расширением модели мКдВ (1), которая учитывает воздействие силы Кориолиса из-за вращения Земли, является уравнение мКдВ-Островского (13):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha_1 \eta^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = \frac{f_{in}^2}{2c} \int \eta dx, \quad (13)$$

где  $f_{in}$  – параметр Кориолиса, зависящий от периода вращения Земли  $T_e = 24$  ч и географической широты  $\varphi$  (14):

$$f_{in} = \frac{4\pi}{T_e} \sin \varphi. \quad (14)$$

При этом в рамках линейной теории точное дисперсионное соотношение для внутренних волн определяется из задачи на собственные значения (15):

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} + \frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - f_{in}^2} k^2 \Phi = 0 \quad (15)$$

с нулевыми граничными условиями на поверхности и дне моря. Здесь  $\omega$  – частота волны, а  $k$  – горизонтальное волновое число. Мы рассматриваем только длинные волны. В этом пределе  $\omega \ll N$ , и уравнение (15) можно упростить следующим образом (16-17):

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} + \frac{N^2}{c^2} \Phi = 0, \quad (16)$$

$$c^2 = \frac{\omega^2 - f_{in}^2}{k^2}. \quad (17)$$

Очевидно, что в этом пределе задача на собственные значения (16) не зависит от параметра Кориолиса и совпадает с задачей на собственные значения (2), (3). В рамках задачи (16) линейная фазовая скорость длинных волн  $c$  может быть рассчитана численно для произвольной стратификации. Однако дисперсионное соотношение будет более сложным при учете вращения Земли (18):

$$\omega^2 = c^2 k^2 + f_{in}^2. \quad (18)$$

Таким образом, для вращающейся и невращающейся сред задачи на собственные значения и сами значения идентичны, но дисперсионные соотношения различны. Разложение частоты  $\omega$ , выраженной из (18), в ряд Тейлора при малых значениях  $f_{in}$  дает нам приближенное дисперсионное соотношение (19):

$$\omega = ck + \frac{f_{in}^2}{2ck}, \quad (19)$$

соответствующее уравнению (13) в пределе очень длинных линейных волн.

Рассмотрим теперь линеаризованную версию уравнения (13) в уравнении (20):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right) = \frac{f_{in}^2}{2c} \xi. \quad (20)$$

Подставляя решение в виде монохроматической волны (21)

$$\eta = a \exp[i(\omega t - kx)], \quad (21)$$

в уравнение (20), получаем дисперсионное соотношение вида (22)

$$\omega = ck - \beta k^3 + \frac{f_{in}^2}{2ck}. \quad (22)$$

Хотя дополнительный член в правой части уравнения (13) представляет собой линейное длинноволновое возмущение уравнения мКдВ (1), его учет приводит к устранению спектрального промежутка, в которой существуют уединенные волны уравнения мКдВ. Действительно, линейное дисперсионное соотношение (22) уравнения мКдВ-Островского (13) приводит к следующим выражениям для фазовой скорости  $c_p$  и групповой скорости  $c_g$  как функциям волнового числа  $k$  (23):

$$c_p = \frac{\omega}{k} = c - \beta k^2 + \frac{f_{in}^2}{2ck^2}, \quad c_g = \frac{d\omega}{dk} = c - 3\beta k^2 - \frac{f_{in}^2}{2ck^2}. \quad (23)$$

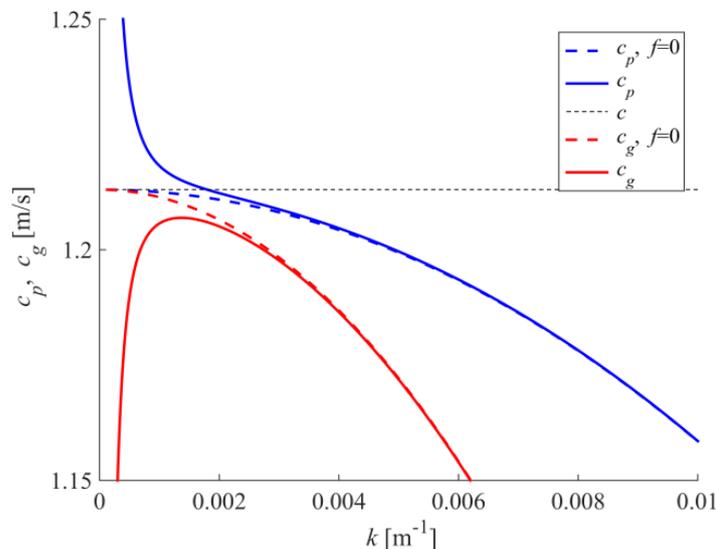


Рис. 4. Зависимости фазовой и групповой скорости от волнового числа в рамках моделей мКдВ ( $f = 0$ ) и мКдВ-Островского

Для уравнения мКдВ (1) ( $f_{in} = 0$ ) в спектре имеется промежуток  $c_p > c$ , где могут существовать солитоны. Но для уравнения мКдВ – Островского (13) такого промежутка нет, и поэтому солитоны не могут существовать, поскольку  $\beta f_{in} > 0$  в контексте внутренних волн. Типичные дисперсионные кривые (23) уравнения мКдВ-Островского (13) показаны на рис. 4; они построены на основании значений параметров, полученных из примера симметричной трехслойной жидкости, рассмотренного выше. Эти кривые демонстрируют отсутствие спектральной щели и наличие экстремума кривой  $c_g(k)$ .

Уравнение мКдВ-Островского (13) решается численно с использованием псевдоспектрального (ПС) метода в периодической области. ПС-метод является альтернативой методам конечных разностей и конечных элементов и используется для решения многих нелинейных эволюционных уравнений и систем, в том числе уравнения Островского [21, 23].

### Результаты расчетов

Значения коэффициентов уравнения (13) для проведения расчетов даны в п. 2. Для моделирования была выбрана широта  $54^\circ$  (что соответствует, например, Балтийскому и Охотскому морям), инерционный период при этом составляет 14,83 часа. Будет рассматриваться граничная задача, для этого уравнение (13) переписывается в эквивалентном виде (24):

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\alpha_1}{c^2} \eta^2 \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\beta}{c^4} \frac{\partial^3 \eta}{\partial s^3} = \frac{f_{in}^2}{2c} \int \eta ds, \quad (24)$$

в системе отсчета, движущейся с линейной скоростью длинных волн  $c$  (25):

$$s = \frac{x}{c} - t. \quad (25)$$

Длина трассы распространения волн выбирается равной 225 км, что соответствует по времени распространению в течение не менее трех инерционных периодов. В начальной точке трассы задается граничное условие  $\eta(x=0, s) = \eta_0(s)$ , соответствующее бризеру (8) уравнения мКдВ (1). Параметры начальных бризеров, для которых проводились расчеты, приведены в табл. 1. Форма бризеров показана на рис. 5, а их спектры Фурье – на рис. 6. Наибольшей шириной  $\Delta f$  обладает спектр для возмущения с параметрами «б» в табл. 1, наименьшей – для случая «а». На рис. 7 приведены спектры Фурье волны в начальной и в конечной точке трассы, а на рис. 8 – изменение спектров вдоль всей трассы. Видно, что при распространении бризера с наименьшей шириной спектра (случай «а») изменений в спектре не происходит, бризер распространяется, пульсируя без изменений огибающей (рис. 9 а). В случае «б» ширина спектра начального возмущения максимальна (так как само возмущение узкое, большой амплитуды), и здесь наблюдается наиболее сильная трансформация волнового поля (рис. 9 б) под действием вращения Земли. Происходит генерация низкочастотных волн, спектр сдвигается влево. Однако в этом случае на рис. 8 б хорошо видно явление квази-рекурренции (это явление раньше отмечалось в литературе при изучении распространения уединенных волн в рамках уравнения Островского).

По прошествии трех инерционных периодов в спектре появляется дополнительный пик (рис. 7 б) на низкой частоте, близкой к  $f_{in}$ . Похожая, но менее ярко выраженная ситуация наблюдается для случая «в» (рис. 7 в, рис. 8 в, и рис. 9 в). Для случая «г» ширина спектра практически не отличается от ситуации «в», но здесь весь спектр наиболее сдвинут влево, в область низких частот (рис. 6). Изменения происходят наиболее медленно, и практически незаметны на рис. 9 г, демонстрирующем трансформацию волнового поля вдоль трассы.

Таблица 1

## Параметры начальных условий для численных экспериментов

Маркер численного эксперимента	$q, p$	$a$ , м	Высота начальной волны, м	$f_{max}/f_{in}$
а	0.2, 0.9	6	8.7	94
б	0.9, 0.05	4	17	55
в	0.9, 0.99	2	10	43
г	0.9, 0.05	2	8.7	27

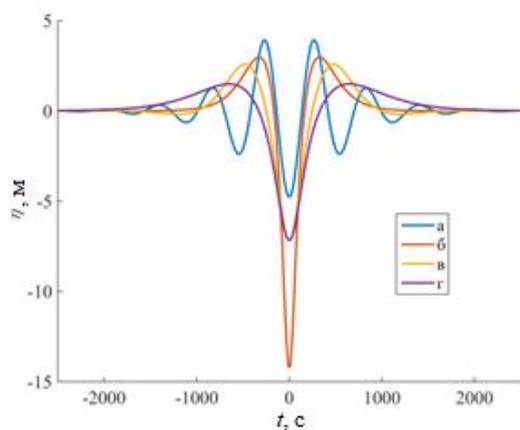


Рис. 5. Форма начальных условий-бризеров

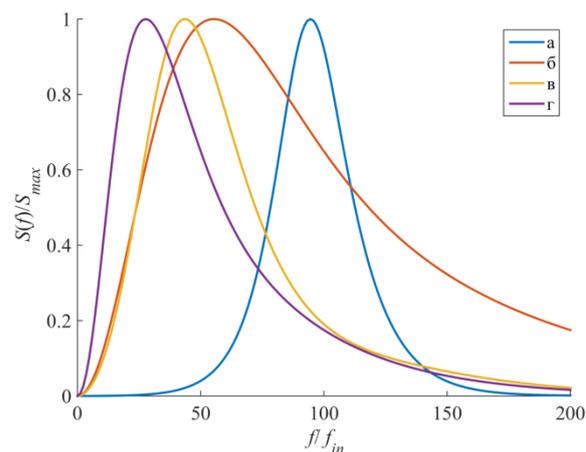
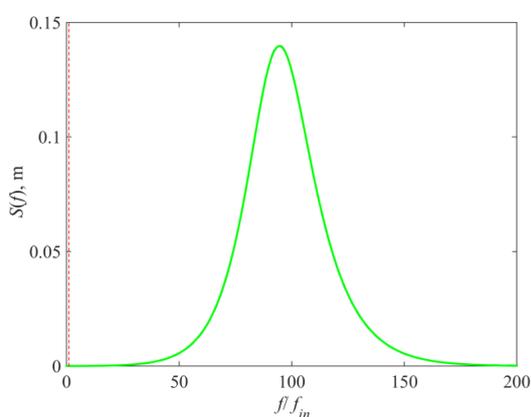
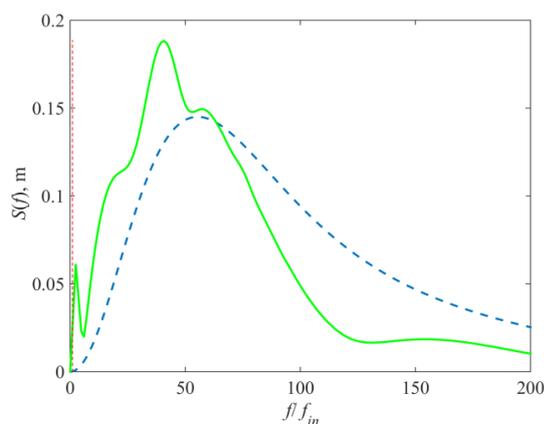


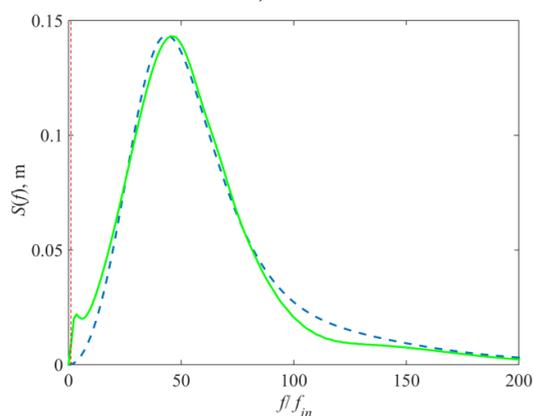
Рис. 6. Нормализованные спектры Фурье начальных бризеров



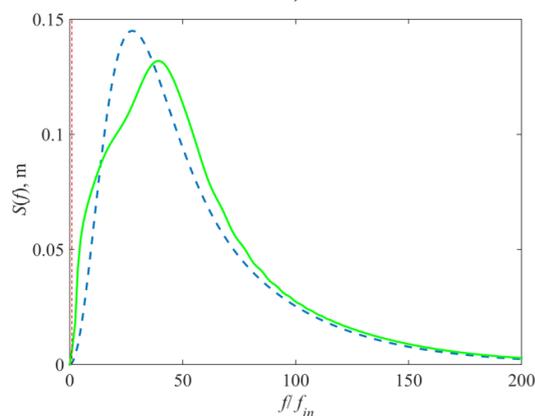
а)



б)



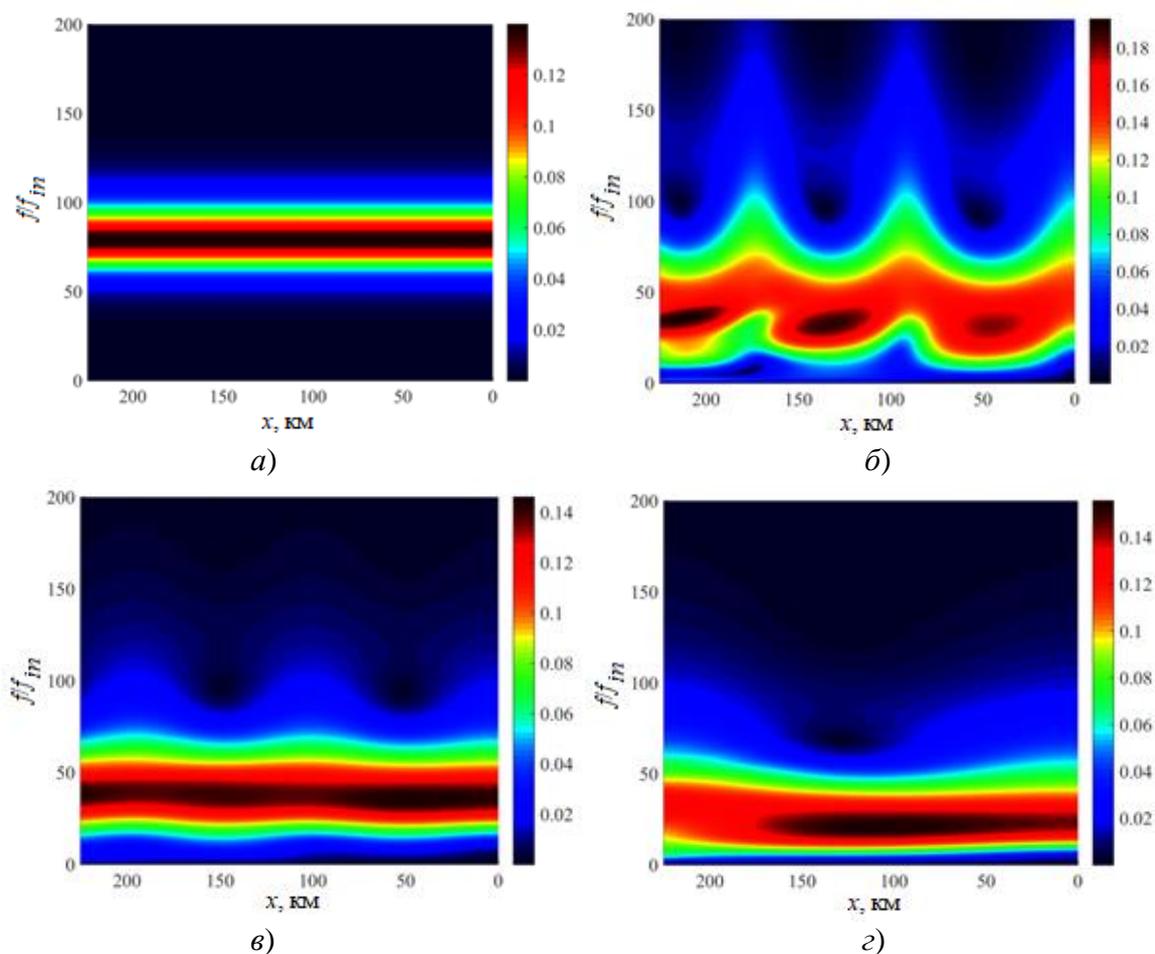
в)



г)

Рис. 7. Спектры Фурье волны в начальной (пунктир) и в конечной (сплошная линия) точке трассы: а – случай «а» (табл.1); б – случай «б» (табл. 1);

**в** – случай «в» (табл.1); **г** - случай «г» (табл. 1)



**Рис. 8.** Спектры Фурье волнового поля вдоль трассы распространения (цветом показана спектральная амплитуда в м): **а** – случай «а» (табл. 1); **б** – случай «б» (табл. 1); **в** – случай «в» (табл. 1); **г** - случай «г» (табл. 1)

### Заключение

В статье представлены результаты моделирования трансформации бризеров внутренних волн в трехслойном симметричном океане с учетом вращения Земли в рамках уравнения мКдВ-Островского. В качестве примера мы оценили коэффициенты в этом уравнении для случая трехслойной стратификации. Продемонстрировано влияние фонового потока в среднем слое на форму солитонов и бризеров уравнения мКдВ. Рассмотрены дисперсионные характеристики уравнения мКдВ-Островского. Выбраны начальные условия в виде бризеров уравнения мКдВ с различными спектрами. Наиболее сильным изменениям подвержены начальные возмущения с широким спектром. В процессе трансформации происходит генерация низкочастотных волн с частотами, близкими к инерционной частоте, а также выделяются нелинейные волновые пакеты, связанные с экстремумами на кривой групповой скорости.

Этот общий результат был известен ранее для трансформации локализованных начальных возмущений в рамках уравнения Островского [21, 33], однако при использовании начальных условий в виде волновых пакетов, их выделение происходит быстрее, по крайней мере, в рамках рассмотренной нами трехслойной модели, и можно предполагать, что выделение из бризера близкого волнового пакета на фоне длинной волны является типичным исходом для ситуаций, близких к реальным океаническим условиям.

Уравнение мКдВ-Островского относится к классу универсальных математических моделей теории нелинейных волн, и изучение поведения их решений важно для различных приложений, включая океанологические (внутренние волны).

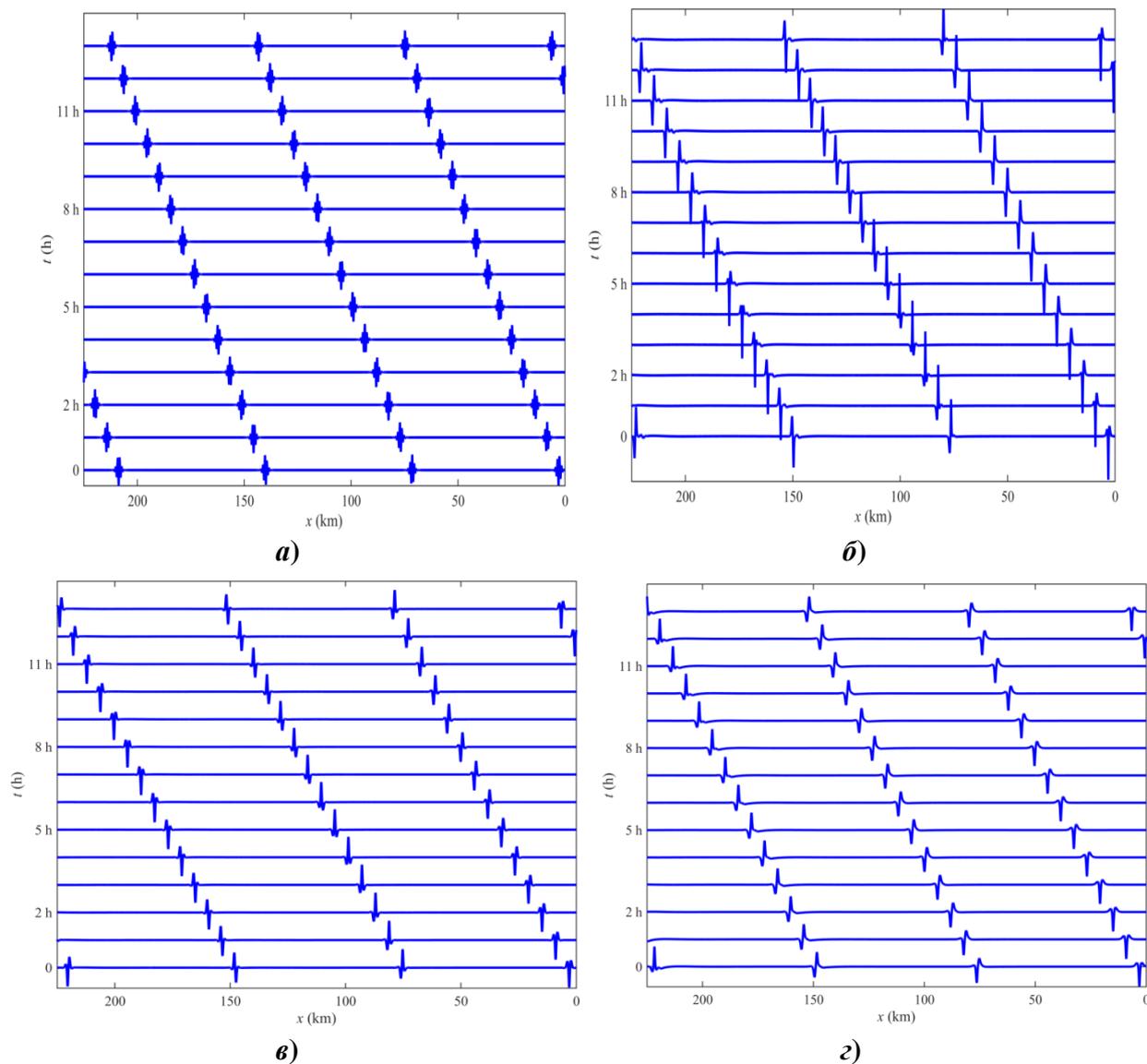


Рис. 9. Смещение [м] изопикн на горизонте максимума первой вертикальной линейной моды (вертикальный сдвиг между последовательными кривыми составляет 10 м): *a* – случай «а» (табл. 1); *б* – случай «б» (табл. 1); *в* – случай «в» (табл. 1); *г* – случай «г» (табл. 1)

Представленные результаты получены в рамках государственного задания в сфере научной деятельности (Задания № 5.4568.2017/6.7 и № 5.1246.2017/4.6) и при поддержке гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ НШ-2685.2018.5.

### Библиографический список

1. **Ostrovsky, L.** Do internal solitons exist in the ocean? / L. Ostrovsky, Y. Stepanyants // *Reviews of Geophysics*. – 1989. – V. 27. – P. 293-310.
2. **Helfrich, K.R.** Long nonlinear internal waves / K.R. Helfrich, W.K. Melville // *Annual Review of Fluid Mechanics*. – 2006. – V. 38. – P. 395-425.

3. **Pelinovsky, D.** Structural transformation of eigenvalues for a perturbed algebraic soliton potential / D. Pelinovsky, R. Grimshaw // *Phys. Lett. A.* – 1997. – V. 229. – P. 165-172.
4. **Clarke, S.** On the generation of solitons and breathers in the Modified Korteweg - de Vries Equation / S. Clarke, R. Grimshaw, P. Miller, E. Pelinovsky, T. Talipova // *Chaos.* – 2000. – V. 10. – P. 383-392.
5. **Grimshaw, R.** Wave group dynamics in weakly nonlinear long-wave models / R. Grimshaw, D. Pelinovsky, E. Pelinovsky, T. Talipova // *Physica D.* – 2001. – V. 159. – P. 35-57.
6. **Slyunyaev, A.V.** Dynamics of localized waves with large amplitude in a weakly dispersive medium with a quadratic and positive cubic nonlinearity / A.V. Slyunyaev // *JETP.* – 2001. – V. 92. – P. 529-534.
7. **Grimshaw, R.** Short-living large-amplitude pulses in the nonlinear long-wave models described by the modified Korteweg-de Vries equation / R. Grimshaw, E. Pelinovsky, T. Talipova, M. Ruderman, R. Erdely // *Stud. Appl. Math.* – 2005. – V. 114. – P. 189-210.
8. **Lamb, K.** Breather generation in the fully nonlinear models of a stratified fluid / K. Lamb, O. Polukhina, T. Talipova, E. Pelinovsky, W. Xiao, A. Kurkin // *Phys. Rev. E.* – 2007. – V. 75. – P. 046306.
9. **Rouvinskaya, E.** Transformation of internal breathers in the idealised shelf sea conditions / E. Rouvinskaya, T. Talipova, O. Kurkina, T. Soomere, D. Tyugin // *Continental Shelf Research.* – 2015. – V. 110. – P. 60-71.
10. **Lee, J.H.** Episodes of nonlinear internal waves in the northern East China Sea / J.H. Lee, I. Lozovatsky, S.T. Jang, C.J. Jang, C.S. Hong, H.J.S. Fernando // *Geophysical research letters.* – 2006. – V. 33(18). – DOI: 10.1029/2006GL027136.
11. **Shroyer, E.L.** Mode 2 waves on the continental shelf: Ephemeral components of the nonlinear internal wave field / E.L. Shroyer, J.N. Moum, J.D. Nash // *Journal of Geophysical Research: Oceans.* – 2010. – V. 115(C7). – DOI: 10.1029/2009JC005605.
12. **Osborne, A.R.** Internal waves and solitons / A.R. Osborne // *Internat. Geophys.* – 2010. – V. 97(C). – P. 597-622.
13. **Vlasenko, V.** Tidal energy conversion in a global hotspot: on the 3D dynamics of baroclinic tides at the Celtic Sea shelf break / V. Vlasenko, N. Stashchuk, M. Inall, J. Hopkins // *Journal of Geophysical Research: Oceans.* – 2014. – V. 119(6). – P. 3249-3265.
14. **Vlasenko, V.** Internal tides near the Celtic Sea shelf break: A new look at a well-known problem / V. Vlasenko, N. Stashchuk // *Deep-Sea Research I.* – 2015. – V. 103. – P. 24-36.
15. **Grimshaw, R.** Damping of large-amplitude solitary waves / R. Grimshaw, E. Pelinovsky, T. Talipova // *Wave Motion.* – 2003. – V. 3. – P. 351-364.
16. **Nakoulima, O.** Analytical and numerical studies of the variable-coefficient Gardner equation / O. Nakoulima, N. Zahibo, E. Pelinovsky, T. Talipova, A. Slunyaev, A. Kurkin // *Appl. Math. Comput.* – 2004. – V. 152. – P. 449-471.
17. **Brovchenko, I.A.** Features of long internal solitary wave transformation in horizontally inhomogeneous basin / I.A. Brovchenko, V.S. Maderich, E.N. Pelinovsky, T.G. Talipova, E.V. Terletska // In: *Proceedings of XII All-Russian conference Advanced technologies of hydroacoustics and hydrophysics. 2014, Saint Petersburg Center of Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg.* – 2014. – P. 196-198.
18. **Терлецкая, Е.** Взаимодействие внутренних уединённых волн второй моды с подводной ступенькой / Е. Терлецкая // *Прикладная гидромеханика.* – 2014. – Т. 10. – № 83. – С. 1-6.
19. **Островский, Л.А.** Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане / Л.А. Островский // *Океанология.* – 1978. – Т. 18. – № 2. – С. 181-191.
20. **Grimshaw, R.H.J.** Evolution equations for weakly nonlinear, long internal waves in a rotating fluid / **R.H.J. Grimshaw** // *Stud. Appl. Math.* – 1985. – V. 73. – P. 1-33.
21. **Grimshaw, R.** Long-time solutions of the Ostrovsky equation / R. Grimshaw, K. Helfrich // *Stud. Appl. Math.* – 2008. – V. 121. – P. 71-88.
22. **Helfrich, K.R.** Decay and return of internal solitary waves with rotation / K.R. Helfrich // *Physics of fluids.* – 2007. – V. 19(2). – P. 026601.
23. **Alias, A.** On strongly interacting internal waves in a rotating ocean and coupled Ostrovsky equations / A. Alias, R.H.J. Grimshaw, K.R. Khusnutdinova // *Chaos.* – 2013. – V. 23(2). – P. 023121.
24. **Ablowitz, M.J.** Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering / M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. – 516 p.
25. **Grimshaw, R.** The modified Korteweg–de Vries equation in the theory of the large-amplitude internal waves / R. Grimshaw, E. Pelinovsky, T. Talipova // *Nonlinear Processes in Geophysics.* – 1997. – V. 4. – P. 237-250.

26. **Lamb, J.L.** Elements of soliton theory / J.L. Lamb. – New York: John Wiley & Sons, 1980. – 289 p.
27. **Clarke, S.** On the generation of solitons and breathers in the modified Korteweg-de Vries equation / S. Clarke, R. Grimshaw, P. Miller, E. Pelinovsky, T. Talipova // *Chaos*. – 2000. – V. 10. – №. 2. – P. 383-392.
28. **Sánchez-Garrido, J.C.** Long-term evolution of strongly nonlinear internal solitary waves in a rotating channel / J.C. Sánchez-Garrido, V. Vlasenko // *Nonlinear Processes in Geophysics*. – 2009. – V. 16. – P. 587-598.
29. **Holloway, P.E.** A nonlinear model of internal tide transformation on the Australian North West shelf / P.E. Holloway, E.N. Pelinovsky, T.G. Talipova, B. Barnes // *J. Phys. Oceanogr.* – 1997. – V. 27. – № 6. – P. 871-896.
30. **Holloway, P.** A Generalized Korteweg-de Vries model of internal tide transformation in the coastal zone / P. Holloway, E. Pelinovsky, T. Talipova // *J. Geophys. Res.* – 1999. – V. 104. – №. C8. – P. 18333-18350.
31. **Holloway, P.** Internal tide transformation and oceanic internal solitary waves / P. Holloway, E. Pelinovsky, T. Talipova // In: *Environmental Stratified Flows*, edited by: Grimshaw R.H.J., Kluwer, Boston, 2001. – P. 29-60.
32. **Talipova, T.** Cubic nonlinearity effects in the propagation of intense internal waves / T. Talipova, E. Pelinovsky, K. Lamb, R. Grimshaw, P. Holloway // *Doklady Earth Sciences*. – 1999. – V. 365. – P. 241-244.
33. **Grimshaw, R.** The effect of rotation on internal solitary waves / R. Grimshaw, K. Helfrich // *The IMA Journal of Applied Mathematics*. – 2012. – V. 77(3). – P. 326-339.

*Дата поступления  
в редакцию: 31.07.2019*

**P.V. Lobovikov, O.E. Kurkina, A.A. Kurkin**

## **TRANSFORMATION OF INTERNAL BREATHERS IN A THREE-LAYERED OCEAN WITH CONSIDERING OF EARTH ROTATION**

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev

**Purpose:** In the paper the problem is solved of the influence of the rotation of the basin on the long-term evolution of internal breathers with different spectral width.

**Design/methodology/approach:** The simulations are carried out within the mKdV-Ostrovsky equation for internal waves, which is solved numerically with the use of pseudospectral algorithm.

**Results:** It is shown that a stronger transformation of the wave field under the influence of Earth's rotation is observed for breathers with a wide spectrum; eventually the spectrum is shifted to the low-frequency region. The phenomenon of quasi-recurrence of breathers is also noted, previously known for solitary internal waves in a rotating fluid.

**Area of applicability:** The obtained results may be useful for the detailed description of baroclinic wavefields in the ocean and energy cascades within their spectra, as well as for the estimations of dynamical effects from internal waves.

*Keywords:* nonlinear wave packet, internal waves, stratification, inhomogeneous medium, modified Korteweg-de Vries equation.