

УДК 629.016

М.Г. Черевастов¹, Ю.И. Молев²

ПОЛУЧЕНИЕ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ АВТОМОБИЛЯ, ПРЕДСТАВЛЕННОГО ЛИНЕЙНОЙ РАСЧЕТНОЙ ДВУХМАССОВОЙ МОДЕЛЮ

Нижегородский государственный педагогический университет им. К. Минина¹
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева²

Рассмотрена плоская двухмассовая линейная расчетная модель автомобиля. Уравнения движения транспортного средства представлены в форме «производных устойчивости» и приведены к безразмерной форме. Получено характеристическое уравнение автомобиля, определяющее поведение последнего при протекании переходного процесса, вызванного мгновенным изменением положения управляемых колес. Выведены выражения для передаточной и переходной функций автомобиля, определяющих его динамические свойства.

Ключевые слова: управляемость автомобиля, «производные устойчивости» автомобиля, уравнения движения автомобиля.

Исследование плоской одномассовой расчетной модели транспортного средства [1-7] предполагает в качестве последующего этапа построения теории криволинейного движения автомобиля усложнение расчетной модели и переход к двухмассовой. Автомобиль в данном случае рассматривается как система, состоящая из подрессоренной и неподрессоренной масс, которые, в свою очередь, формируют его общий вес. При этом подрессоренная масса может совершать колебания относительно оси крена. При исследовании полагается, что поступательная скорость движения колесной машины остается постоянной, коэффициенты сопротивления боковому уводу шин не изменяются по величине, имеется малость углов их увода и поворота управляемых колес, тяговое усилие на задних ведущих колесах распределено поровну и остается постоянным. В сущности, речь идет о плоской линейной расчетной модели. Как уже неоднократно было отмечено [1,2] данные допущения оправданы при умеренных боковых ускорениях до $0,3g$. При составлении уравнений движения автомобиля учитывались только возмущения от управления.

В настоящей статье приняты следующие обозначения:

a – расстояние от центра тяжести автомобиля до передней оси [м];

b – расстояние от центра тяжести автомобиля до задней оси [м];

l – колесная база автомобиля [м]; $l = a + b$;

g – ускорение силы тяжести $\left[\frac{м}{с^2} \right]$;

h – расстояние от центра тяжести неподрессоренных масс до оси крена [м];

p – угловая скорость крена относительно оси x $\left[\frac{1}{с} \right]$;

θ – угол поворота управляемых колес [рад];

ω – угловая скорость поворота автомобиля относительно вертикальной оси z $\left[\frac{1}{с} \right]$;

ϖ – безразмерная форма ω равная $\varpi = \tau\omega$;

μ – число Фруда, безразмерная форма V , определяемое выражением $\mu = \frac{V}{\sqrt{l \cdot g}}$;

s – оператор Лапласа;

τ – постоянная времени [с]; $\tau = \sqrt{\frac{l}{g}}$;

C_1 – коэффициент сопротивления уводу шин передних колес $\left[\frac{H}{\text{рад}} \right]$;

C_2 – коэффициент сопротивления уводу шин задних колес $\left[\frac{H}{\text{рад}} \right]$;

D – оператор дифференцирования в безразмерной форме; $D = \tau \frac{d}{dt}$;

J_z – момент инерции автомобиля, относительно вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести $\left[\text{кг} \times \text{м}^2 \right]$;

J_x – момент инерции подрессоренной массы относительно оси x $\left[\text{кг} \times \text{м}^2 \right]$;

J_{xz} – центробежный момент инерции автомобиля относительно осей x и z $\left[\text{кг} \times \text{м}^2 \right]$;

L – момент относительно оси x $[H \cdot \text{м}]$;

M – масса автомобиля $[\text{кг}]$;

M_n – подрессоренная масса автомобиля $[\text{кг}]$;

N – поворачивающий момент относительно оси z $[H \cdot \text{м}]$;

V – поступательная скорость автомобиля $\left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right]$;

Y – сила, действующая вдоль оси y $[H]$.

Производные устойчивости:

$Y_\beta = \frac{\partial Y}{\partial \beta}$ – коэффициент боковой силы, вызванной наличием увода колес автомобиля $\left[\frac{H}{\text{рад}} \right]$;

$Y_\omega = \frac{\partial Y}{\partial \omega}$ – коэффициент боковой силы, вызванной поворотом автомобиля, относительно вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести $[H \cdot \text{с}]$;

$Y_\theta = \frac{\partial Y}{\partial \theta}$ – коэффициент боковой силы, вызванной поворотом управляемых колес $\left[\frac{H}{\text{рад}} \right]$;

$Y_\varphi = \frac{\partial Y}{\partial \varphi}$ – коэффициент боковой силы, вызванной креном автомобиля $\left[\frac{H}{\text{рад}} \right]$;

$N_\beta = \frac{\partial N}{\partial \beta}$ – коэффициент поворачивающего момента, вызванного наличием увода колес автомобиля $\left[\frac{H \cdot \text{м}}{\text{рад}} \right]$;

$N_\omega = \frac{\partial N}{\partial \omega}$ – коэффициент поворачивающего момента, вызванного поворотом автомобиля, относительно вертикальной оси, проходящей через его центр тяжести $[H \cdot \text{м} \cdot \text{с}]$;

$N_\theta = \frac{\partial N}{\partial \theta}$ – коэффициент поворачивающего момента, вызванного поворотом управляемых колес $\left[\frac{H \cdot м}{рад} \right]$;

$N_\varphi = \frac{\partial N}{\partial \varphi}$ – коэффициент поворачивающего момента, вызванного креном транспортного средства $\left[\frac{H \cdot м}{рад} \right]$;

$L_p = \frac{\partial L}{\partial p}$ – коэффициент демпфирования крена $[H \cdot м \cdot с]$;

$L_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$ – поперечная угловая жесткость $\left[\frac{H \cdot м}{рад} \right]$.

На первом этапе исследования запишем уравнения движения автомобиля в форме производных устойчивости [4]. Получим следующую систему (1):

$$\begin{cases} \sum Y = \frac{\partial Y}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial Y}{\partial \omega} \omega + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \theta + \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \varphi \\ \sum N = \frac{\partial N}{\partial \beta} \beta + \frac{\partial N}{\partial \omega} \omega + \frac{\partial N}{\partial \theta} \theta + \frac{\partial N}{\partial \varphi} \varphi \\ \sum L = \frac{\partial L}{\partial p} p + \frac{\partial L}{\partial \varphi} \varphi \end{cases} \quad (1)$$

Система уравнений (1) описывает криволинейное движение колесной машины в горизонтальной плоскости $x - y$ с учетом возникающего крена автомобиля. Следует отметить, что производные устойчивости являются постоянными коэффициентами, обеспечивающими линейность расчетной модели. Положительные направления осей, а также основные углы, геометрические размеры и расстояния изображены на рис. 1 и 2.

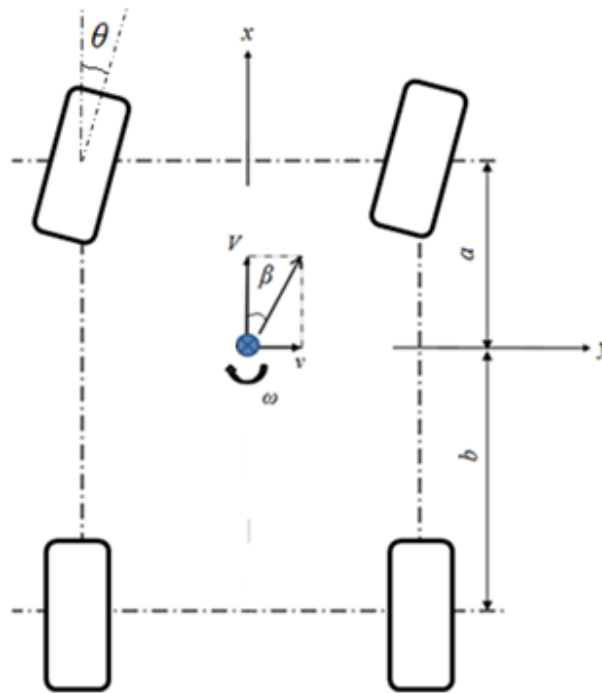


Рис. 1. Угол бокового смещения автомобиля

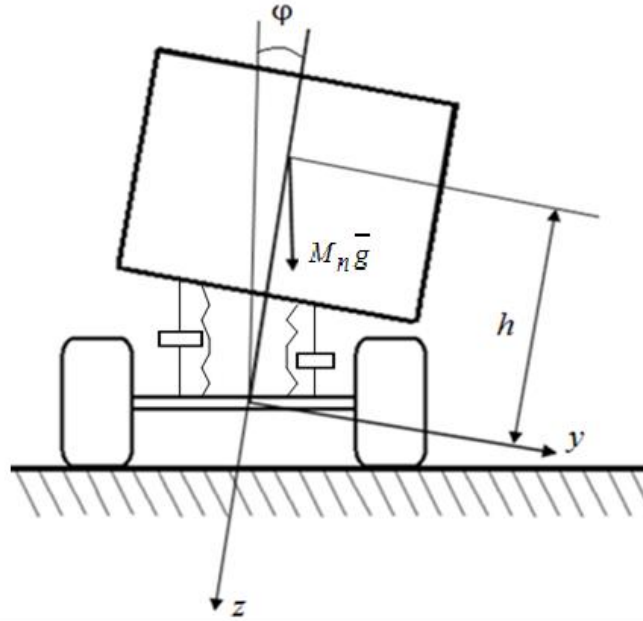


Рис. 2. Условная схема действия кренящего момента в плоскости $y - z$

Теперь, для большего удобства, приведем уравнения движения (1) к безразмерной форме, что в дальнейшем позволит проводить сравнение параметров управляемости различных автомобилей. Для этого запишем следующее: $m = \frac{M_n h}{Ml}$; $i_{xz} = \frac{J_{xz}}{Ml^2}$; $i_x = \frac{J_x}{Ml^2}$;

$$i_z = \frac{J_z}{Ml^2}; \quad y_\beta = \frac{Y_\beta}{Mg}; \quad y_\omega = \frac{Y_\omega}{M\sqrt{l \cdot g}}; \quad y_\theta = \frac{Y_\theta}{Mg}; \quad y_\varphi = \frac{Y_\varphi}{Mg}; \quad n_\beta = \frac{N_\beta}{Mgl}; \quad n_\omega = \frac{N_\omega}{Ml\sqrt{l \cdot g}};$$

$$n_\theta = \frac{N_\theta}{Mgl}; \quad n_\varphi = \frac{N_\varphi}{Mgl}; \quad l_p = \frac{L_p}{Ml\sqrt{l \cdot g}}; \quad l_\varphi = \frac{L_\varphi}{Mgl}.$$

После соответствующих преобразований система уравнений (1) может быть представлена следующим образом (2):

$$\begin{cases} (\mu D - y_\beta)\beta + (\mu - y_\omega)\varpi + (mD^2 - y_\varphi)\varphi = y_\theta\theta \\ -n_\beta\beta + (i_z D - n_\omega)\varpi + (i_{xz} D^2 - n_\varphi)\varphi = n_\theta\theta \\ (m\mu D)\beta + (i_{xz} D + m\mu)\varpi + (i_x D^2 - l_p D - l_\varphi)\varphi = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Далее, учитывая нулевые начальные условия по боковому движению автомобиля, заменим оператор дифференцирования на оператор Лапласа, а оригиналы неизвестных переменных – их изображениями. В результате получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (\mu s - y_\beta)\beta(s) + (\mu - y_\omega)\varpi(s) + (ms^2 - y_\varphi)\varphi(s) = y_\theta\theta(s) \\ -n_\beta\beta(s) + (i_z s - n_\omega)\varpi(s) + (i_{xz} s^2 - n_\varphi)\varphi(s) = n_\theta\theta(s) \\ (m\mu s)\beta(s) + (i_{xz} s + m\mu)\varpi(s) + (i_x s^2 - l_p s - l_\varphi)\varphi(s) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Решение системы (3), методом Крамера, относительно $\varpi(s)$ имеет следующий вид (4):

$$\varpi(s) = \frac{\Delta_{\varpi}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \mu s - y_{\beta} & y_{\theta}\theta(s) & ms^2 - y_{\varphi} \\ -n_{\beta} & n_{\theta}\theta(s) & i_{xz}s^2 - n_{\varphi} \\ m\mu s & 0 & i_x s^2 - l_p s - l_{\varphi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu s - y_{\beta} & \mu - y_{\omega} & ms^2 - y_{\varphi} \\ -n_{\beta} & i_z s - n_{\omega} & i_{xz}s^2 - n_{\varphi} \\ m\mu s & i_{xz}s + m\mu & i_x s^2 - l_p s - l_{\varphi} \end{vmatrix}} \quad (4)$$

Найдем знаменатель дроби (4), имеем (5):

$$\Delta = (\mu s - y_{\beta}) \times \begin{vmatrix} i_z s - n_{\omega} & i_{xz}s^2 - n_{\varphi} \\ i_{xz}s + m\mu & i_x s^2 - l_p s - l_{\varphi} \end{vmatrix} - (-n_{\beta}) \times \begin{vmatrix} \mu - y_{\omega} & ms^2 - y_{\varphi} \\ i_{xz}s + m\mu & i_x s^2 - l_p s - l_{\varphi} \end{vmatrix} + m\mu s \times \begin{vmatrix} \mu - y_{\omega} & ms^2 - y_{\varphi} \\ i_z s - n_{\omega} & i_{xz}s^2 - n_{\varphi} \end{vmatrix} \quad (5)$$

Раскроем определители выражения (5) и после преобразования получим (6):

$$\Delta = (\mu F_1 + m\mu F_9)s^4 + (\mu F_2 - y_{\beta}F_1 + n_{\beta}F_5 + m\mu F_{10})s^3 + (\mu F_3 - y_{\beta}F_2 + n_{\beta}F_6 + m\mu F_{11})s^2 + (\mu F_4 - y_{\beta}F_3 + n_{\beta}F_7 + m\mu F_{12})s + n_{\beta}F_8 - y_{\beta}F_4 = q_1s^4 + q_2s^3 + q_3s^2 + q_4s + q_5 \quad (6)$$

где $F_1 = i_x i_z - i_{xz}^2$; $F_2 = -(i_z l_p + n_{\omega} i_x + i_{xz} m\mu)$; $F_3 = n_{\omega} l_p + n_{\varphi} i_{xz} - i_z l_{\varphi}$; $F_4 = n_{\omega} l_{\varphi} + n_{\varphi} m\mu$; $F_5 = -m i_{xz}$; $F_6 = \mu \dot{i}_x - y_{\omega} i_x - m^2 \mu$; $F_7 = y_{\omega} l_p + y_{\varphi} i_{xz} - \mu l_p$; $F_8 = y_{\omega} l_{\varphi} + y_{\varphi} m\mu - \mu l_{\varphi}$; $F_9 = -m i_z$; $F_{10} = \mu \dot{i}_{xz} + m n_{\omega} - y_{\omega} i_{xz}$; $F_{11} = y_{\varphi} i_z$; $F_{12} = y_{\omega} n_{\varphi} - \mu n_{\varphi} - y_{\varphi} n_{\omega}$.

Далее представим равенство (6) в виде (7):

$$\Delta = q_1 s^4 + q_2 s^3 + q_3 s^2 + q_4 s + q_5 = q_1 \left(s^4 + \frac{q_2}{q_1} s^3 + \frac{q_3}{q_1} s^2 + \frac{q_4}{q_1} s + \frac{q_5}{q_1} \right) \quad (7)$$

Таким образом, имеем (8):

$$\Delta = q_1 (s^4 + Q_1 s^3 + Q_2 s^2 + Q_3 s + Q_4) \quad (8)$$

где $Q_1 = \frac{q_2}{q_1}$, а остальные коэффициенты определяются аналогично из формулы (7).

Теперь перейдем к определению числителя дроби (4) в формуле (9):

$$\Delta_{\varpi} = -y_{\theta}\theta(s) \times \begin{vmatrix} -n_{\beta} & i_{xz}s^2 - n_{\varphi} \\ m\mu s & i_x s^2 - l_p s - l_{\varphi} \end{vmatrix} + n_{\theta}\theta(s) \times \begin{vmatrix} \mu s - y_{\beta} & ms^2 - y_{\varphi} \\ m\mu s & i_x s^2 - l_p s - l_{\varphi} \end{vmatrix} - 0 \quad (9)$$

Аналогично, как и ранее, раскроем определители выражения (9) и сгруппируем полученный многочлен, в итоге запишем (10):

$$\Delta_{\varpi} = \theta(s) \times ((n_{\theta}N_5 - y_{\theta}N_1)s^3 + (n_{\theta}N_6 - y_{\theta}N_2)s^2 + (n_{\theta}N_7 - y_{\theta}N_3)s + n_{\theta}N_8 - y_{\theta}N_4) = \theta(s) \times (u_1 s^3 + u_2 s^2 + u_3 s + u_4) = \theta(s) u_1 \left(s^3 + \frac{u_2}{u_1} s^2 + \frac{u_3}{u_1} s + \frac{u_4}{u_1} \right) \quad (10)$$

где $N_1 = -m\mu i_{xz}$; $N_2 = -n_{\beta} i_x$; $N_3 = n_{\beta} l_p + m\mu n_{\varphi}$; $N_4 = n_{\beta} l_{\varphi}$; $N_5 = \mu \dot{i}_x - m^2 \mu$; $N_6 = -(\mu l_p + y_{\beta} i_x)$; $N_7 = y_{\beta} l_p + y_{\varphi} m\mu - \mu l_{\varphi}$; $N_8 = y_{\beta} l_{\varphi}$.

Окончательно имеем (11):

$$\Delta_{\varpi} = \theta(s)u_1(s^3 + U_1s^2 + U_2s + U_3) \quad (11)$$

где $U_1 = \frac{u_2}{u_1}$, а остальные коэффициенты определяются аналогично из формулы (11).

После определения числителя и знаменателя выражения (4), определим изображение общего решения системы уравнений (3) на основании равенств (11) и (8) в формуле (12):

$$\varpi(s) = \frac{u_1(s^3 + U_1s^2 + U_2s + U_3)}{q_1(s^4 + Q_1s^3 + Q_2s^2 + Q_3s + Q_4)} \times \theta(s) \quad (12)$$

Представим полученное выражение в следующем виде (13):

$$\varpi(s) = H(s) \times \theta(s) \quad (13)$$

где в левой части находится изображение выходной величины, т.е. безразмерной формы угловой скорости поворота автомобиля, а в правой части произведение отношения двух многочленов на изображение входного сигнала, т.е. угла поворота управляемых колес. Таким образом, применяя терминологию теории автоматического регулирования [8], можно говорить о том, что $H(s)$ представляет собой передаточную функцию автомобиля по управляющему воздействию, являющейся важнейшей характеристикой, определяющей динамические свойства автомобиля как системы, и выражается отношением (14):

$$H(s) = \frac{u_1}{q_1} \times \frac{s^3 + U_1s^2 + U_2s + U_3}{s^4 + Q_1s^3 + Q_2s^2 + Q_3s + Q_4} \quad (14)$$

На втором этапе исследования перейдем к отысканию переходной функции автомобиля, т.е. определению реакции последнего на единичное ступенчатое управляющее воздействие. В данном случае зависимость величины угла поворота управляемых колес от времени будет определяться выражением $\theta(t) = \theta_1 \cdot 1(t)$, которому будет соответствовать изображение $\theta(s) = \theta_1 \cdot \frac{1}{s}$, где θ_1 есть угол, на который мгновенно повернутся управляемые колеса в начальный момент времени, а $1(t)$ – единичная функция Хевисайда.

Далее, воспользовавшись равенством (12), применив к нему изображение $\theta(s)$, получим изображение искомой нами выходной величины, как отклика на ступенчатое воздействие или что то же самое – изображение переходной функции:

$$\varpi(s) = \frac{\theta_1 u_1}{q_1} \times \frac{s^3 + U_1s^2 + U_2s + U_3}{s(s^4 + Q_1s^3 + Q_2s^2 + Q_3s + Q_4)} \quad (15)$$

Обозначим для удобства $\varpi_1 = \frac{\theta_1 u_1}{q_1}$.

Преобразуем зависимость (15) в удобный для обратного преобразования Лапласа вид, для этого, вначале, рассмотрим многочлен четвертой степени, находящийся в знаменателе выражения (15), а именно $s^4 + Q_1s^3 + Q_2s^2 + Q_3s + Q_4$ и разложим его на произведение двух многочленов второй степени. Для этого с помощью метода Феррари [9] решим уравнение $s^4 + Q_1s^3 + Q_2s^2 + Q_3s + Q_4 = 0$, которое в свою очередь является характеристическим и определяющим закон протекания переходного процесса.

Резольвента характеристического уравнения автомобиля имеет вид (16):

$$y^3 - Q_2y^2 + (Q_1Q_3 - 4Q_4)y - Q_1^2Q_4 + 4Q_2Q_4 - Q_3^2 = 0 \quad (16)$$

Теперь, используя решение Кардано [9], найдем корни уравнения (16).

При помощи подстановки $y = x + \frac{Q_2}{3}$ преобразуем тождество (16) к виду (17):

$$x^3 + px + q = 0 \quad (17)$$

где $p = -\frac{(-Q_2)^2}{3} + (Q_1Q_3 - 4Q_4)$; $q = 2\left(\frac{-Q_2}{3}\right)^3 - \frac{-Q_2(Q_1Q_3 - 4Q_4)}{3} + 4Q_2Q_4 - Q_1^2Q_4 - Q_3^2$.

Тогда решением уравнения (17), для случая $Q > 0$, будут следующие корни:

$$x_1 = A + B; \quad x_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3},$$

где $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}$; $B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}$; $Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$.

Для случая $Q < 0$ (неприводимый случай) корни уравнения (17) выглядят следующим

образом: $x_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$; $x_{2,3} = -2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\frac{\alpha}{3} \pm \frac{2\pi}{3}\right)$,

где $\cos(\alpha) = -\frac{q}{2\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$.

Далее, после решения уравнения (17), применяя подстановку, легко найти корни выражения (16), один из которых (полученный преимущественно путем подстановки x_1) необходим для решения характеристического уравнения, корни которого, в свою очередь, вычисляются по формуле (18):

$$s^2 + \frac{Q_1}{2}s + \frac{y_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{Q_1^2}{4} - Q_2 + y_0\right)s^2 + \left(\frac{Q_1}{2}y_0 - Q_3\right)s + \frac{y_0^2}{4} - Q_4} = 0 \quad (18)$$

где y_0 – произвольный корень уравнения (16).

Таким образом, с учетом записи (18), левая часть характеристического уравнения может быть представлена как произведение двух квадратных многочленов (19):

$$s^4 + Q_1s^3 + Q_2s^2 + Q_3s + Q_4 = (s^2 + A_1s + A_2)(s^2 + B_1s + B_2) \quad (19)$$

где $A_1 = \frac{Q_1}{2} + \sqrt{\frac{Q_2^2}{4} - Q_2 + y_0}$; $B_1 = \frac{Q_1}{2} - \sqrt{\frac{Q_2^2}{4} - Q_2 + y_0}$;

если $\frac{Q_1}{2}x_0 - Q_3 > 0$, то $A_2 = \frac{y_0}{2} + \sqrt{\frac{y_0^2}{4} - Q_4}$, $B_2 = \frac{y_0}{2} - \sqrt{\frac{y_0^2}{4} - Q_4}$;

если $\frac{Q_1}{2}x_0 - Q_3 < 0$, то $A_2 = \frac{y_0}{2} - \sqrt{\frac{y_0^2}{4} - Q_4}$, $B_2 = \frac{y_0}{2} + \sqrt{\frac{y_0^2}{4} - Q_4}$.

На следующем этапе исследования, учитывая выражения (19) и (15) без учета ϖ_1 , запишем (20):

$$\frac{s^3 + U_1s^2 + U_2s + U_3}{s(s^4 + Q_1s^3 + Q_2s^2 + Q_3s + Q_4)} = \frac{s^3 + U_1s^2 + U_2s + U_3}{s(s^2 + A_1s + A_2)(s^2 + B_1s + B_2)} \quad (20)$$

Теперь представим полученное выражение как сумму дробей:

$$\frac{s^3 + U_1s^2 + U_2s + U_3}{s(s^2 + A_1s + A_2)(s^2 + B_1s + B_2)} = \frac{E_1}{s} + \frac{E_2s + E_3}{s^2 + A_1s + A_2} + \frac{E_4s + E_5}{s^2 + B_1s + B_2} \quad (21)$$

где $E_1 = \frac{U_3}{A_2 B_2}$; $E_3 = \frac{-A_1 b_2 A_2 + A_1^2 b_3 + b_2 B_1 A_2 - b_3 A_1 B_1 + b_1 A_2^2 - b_3 A_2}{-A_1 B_1 (A_2 + B_2) + A_1^2 B_2 + B_1^2 A_2 + A_2^2 - A_2 B_2}$; $b_1 = 1 - E_1 A_1$;

$b_2 = U_1 - E_1 (B_2 + A_1 B_1 + A_2)$; $b_3 = U_2 - E_1 (A_1 B_2 + A_2 B_1)$; $E_5 = \frac{b_3 - E_3 B_2}{A_2}$;

$E_4 = \frac{b_2 - E_3 B_1 - E_5 A_1}{A_2}$; $E_2 = -(E_1 + E_4)$.

Возвращаясь к формуле (15), учитывая выражения (20) и (21), можно записать (22):

$$\varpi(s) = \varpi_1 \times \left(\frac{E_1}{s} + \frac{E_2 s + E_3}{s^2 + A_1 s + A_2} + \frac{E_4 s + E_5}{s^2 + B_1 s + B_2} \right) \quad (22)$$

На завершающем этапе нам остается представить дроби, входящие в состав формулы (22), в формате удобном для обратного преобразования Лапласа. Для этого рассмотрим несколько случаев. В первом, когда $A_1^2 - 4A_2 > 0$ или $B_1^2 - 4B_2 > 0$, имеющиеся дроби можно представить в виде суммы простейших дробей, т.е. (23):

$$\frac{E_2 s + E_3}{s^2 + A_1 s + A_2} = \frac{R_1}{s - s_1} + \frac{R_2}{s - s_2} \quad (23)$$

где $s_{1,2} = -\frac{A_1}{2} \pm \frac{\sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}$; $R_1 = \frac{E_3 + E_2 s_1}{s_1 - s_2}$; $R_2 = \frac{E_3 + E_2 s_2}{s_2 - s_1}$

или

$$\frac{E_4 s + E_5}{s^2 + B_1 s + B_2} = \frac{R_3}{s - s_3} + \frac{R_4}{s - s_4} \quad (24)$$

где $s_{3,4} = -\frac{B_1}{2} \pm \frac{\sqrt{B_1^2 - 4B_2}}{2}$; $R_3 = \frac{E_5 + E_4 s_3}{s_3 - s_4}$; $R_4 = \frac{E_5 + E_4 s_4}{s_4 - s_3}$.

Во втором случае, $A_1^2 - 4A_2 < 0$ или $B_1^2 - 4B_2 < 0$, дроби выражаются в виде (25):

$$\frac{E_2 s + E_3}{s^2 + A_1 s + A_2} = E_2 \frac{\left(s + \frac{A_1}{2}\right)}{\left(s + \frac{A_1}{2}\right)^2 + \omega_1^2} + Z_1 \frac{\omega_1}{\left(s + \frac{A_1}{2}\right)^2 + \omega_1^2} \quad (25)$$

где $\omega_1^2 = A_2 - \frac{A_1^2}{4}$; $Z_1 = \frac{E_2}{\omega_1} \cdot \left(\frac{E_3}{E_2} - \frac{A_1}{2}\right)$

или

$$\frac{E_4 s + E_5}{s^2 + B_1 s + B_2} = E_4 \frac{\left(s + \frac{B_1}{2}\right)}{\left(s + \frac{B_1}{2}\right)^2 + \omega_2^2} + Z_2 \frac{\omega_2}{\left(s + \frac{B_1}{2}\right)^2 + \omega_2^2} \quad (26)$$

где $\omega_2^2 = B_2 - \frac{B_1^2}{4}$; $Z_2 = \frac{E_4}{\omega_2} \cdot \left(\frac{E_5}{E_4} - \frac{B_1}{2}\right)$.

Теперь, подставляя значения (23) – (26) в выражение (22), получаем изображение безразмерной формы угловой скорости поворота автомобиля в удобной для обратного преобразования форме, все изображения в правой части являются табличными.

Определим оригинал функции, представленной соответствующим изображением (27):

$$\varpi\left(\frac{t}{\tau}\right) = L^{-1}[\varpi(s)] \quad (27)$$

В завершении, найдем переходную функцию автомобиля, где выходным параметром является угловая скорость поворота, по следующей формуле, исходя из определения ϖ :

$$\omega(t) = \frac{\varpi\left(\frac{t}{\tau}\right)}{\tau} \quad (28)$$

В заключение необходимо отметить, во-первых, что полученное характеристическое уравнение автомобиля описывается произведением двух многочленов второй степени, которые, в свою очередь, характеризуют такие формы движения, как угловой поворот автомобиля с уводом и крен. Полученные два сомножителя констатируют, что каждая из форм движения может изменяться в неустановившемся режиме по аperiodическому, либо по колебательным законам. Во-вторых, полученная передаточная функция автомобиля позволит без решения соответствующих уравнений движения определить частотные характеристики транспортного средства. В-третьих, зная переходную функцию автомобиля, можно с помощью интеграла Дюамеля устанавливать связь между переходным процессом, вызванным произвольным воздействием и данной функцией.

Дальнейшее исследование передаточной и переходной функций, на примерах конкретных моделей автомобилей, позволит оценить влияние крена на различные параметры управляемости (длительность переходного процесса, динамическая чувствительность к управлению и т.д.) и провести сравнительный анализ с плоской одномассовой расчетной моделью, уточнить адекватность моделей.

Библиографический список

1. **Литвинов, А.С.** Управляемость и устойчивость автомобиля / А.С. Литвинов. – М.: Машиностроение, 1971. – 416 с.
2. **Милликен, У.Ф.** Применение общей теории устойчивости и управляемости автомобилей к их конструированию / У.Ф. Милликен, Д.У. Уитком // Управляемость и устойчивость автомобиля: сборник статей. – М.: МАШГИЗ, 1963. – С.145-204.
3. **Молев, Ю.И.** Теоретическая оценка влияния установки газобаллонного оборудования на управляемость автобуса ПАЗ 32054 [Электронный ресурс] // Режим доступа: https://transport-systems.ru/assets/2017_01_002.pdf (дата обращения: 11.07.2019).
4. **Молев, Ю.И.** Теоретический расчет переходной реакции движения автомобиля при заданной функции возмущения / Ю.И. Молев, М.Г. Черевастов // Организация и безопасность дорожного движения: материалы XI Междунар. науч.-практ. конф. (15 марта 2018 г.): в 2-х т. Т.2 / отв. ред. Д. А. Захаров. – Тюмень: ТИУ, 2018. – С. 89-95.
5. **Молев, Ю.И.** Прямые оценки качества реакции движения автомобиля на ступенчатое управляющее воздействие / Ю.И. Молев, У.Ш. Вахидов, М.Г. Черевастов, А.В. Согин, А.С. Слюсарев // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева / НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – Нижний Новгород. – 2018. – №3(122). – С.111-120.
6. **Певзнер, Я.М.** Теория устойчивости автомобиля / Я.М. Певзнер. – М.: МАШГИЗ, 1947. – 156 с.
7. **Чудаков, Е.А.** Теория автомобиля / Е.А. Чудаков. – М.: МАШГИЗ, 1950. – 343 с.
8. **Воронов, А.А.** Основы теории автоматического регулирования и управления: учеб. пособие для вузов / А.А. Воронов, В.К. Титов, Б.Н. Новогранов. – М.: Высшая школа, 1977. – 519 с.
9. **Корн, Г.** Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1968. – 720 с.

*Дата поступления
в редакцию: 21.07.2019*

M.G. Cherevastov¹, Yu.I. Molev²

**OBTAINING THE TRANSITION FUNCTION OF A CAR PRESENTED BY A LINEAR
CALCULATION TWO-MASS MODEL**

Nizhny Novgorod State Pedagogical University n.a. Kozma Minin¹

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev²

Purpose: In this paper, the main purpose of the study is to obtain a general expression for the transient function of the vehicle derived for a flat two-mass linear computational model of the vehicle.

Design/methodology/approach: In the study, the equations of motion of the car in the form of «stability derivatives» were used. The equations themselves are written in dimensionless form. The solution of the system of equations is carried out by the operator method with the subsequent inverse transformation. The resulting characteristic equation of the car is solved using the Ferrari method. Direct and inverse Laplace transforms were applied.

Findings: The characteristic equation of the car is obtained, which determines the behavior of the latter during the transition process caused by an instantaneous change in the position of the driven wheels. Expressions are derived for the transfer and transition functions of the car, which determine its dynamic properties. At the end of the work the tasks for further research are set.

Research limitations / consequences: In the study, it is assumed that the translational speed of the wheel machine remains constant, the drag coefficients of the lateral withdrawal of the tires do not change in magnitude, there is a small angle of their withdrawal and rotation of the driven wheels, the traction force on the rear drive wheels is distributed equally and remains constant. When drawing up the equations of motion of the car, only disturbances from the control were taken into account.

Keywords: handling of the car, «derivatives of stability» of the car, the equations of motion of the car.