УДК 658.512

М.Х. Прилуцкий[1], И.В. Нетронин[2]

ЗАДАЧИ ОБЪЕМНО-КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ДЛЯ ПРЕДПРИЯТИЙ С ЕДИНИЧНЫМ И МЕЛКОСЕРИЙНЫМ ХАРАКТЕРОМ ПРОИЗВОДСТВА

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского[1]
Опытное конструкторское бюро машиностроения им. И.И. Африкантова[2]

Рассмотрена проблема объемно-календарного планирования, построена математическая модель. Оптимизационные задачи назначения исполнителей на работы с использованием ресурсов по тактам планирования поставлены таким образом, чтобы все запланированные работы были выполнены, и при этом суммарные затраты системы, связанные с квалификацией исполнителей и производительностью используемых ресурсов, были минимальны. Показано, что поставленная задача формализуется как многоиндексная задача линейного программирования транспортного типа с двусторонними ограничениями. Предложены эффективные алгоритмы решения поставленных задач. Реализован прототип программной системы, который на реальных исходных данных показал адекватность построенной математической модели и применимость предложенных алгоритмов к решению большеразмерных задач объемно-календарного планирования.

Ключевые слова: объемно-календарное планирование, единичное и мелкосерийное производство, метод приведенных границ.

Содержательное описание проблемы объемно-календарного планирования

Задачи объемно-календарного планирования математически могут быть описаны либо в наиболее общем виде с учетом всех возможных ограничений и связей, либо с той или иной степенью идеализации. В настоящей работе рассматривается вариант, в котором вместо номенклатуры и длительностей операций рассматриваются объемные показатели, а вместо технологических ограничений на последовательность выполнения операций − этапы изготовления изделий. В этом случае проблема планирования может быть представлена как проблема распределения ресурсов в сложных системах [1-11].

Предлагаемая математическая модель описывает различные задачи распределения плана предприятия по различным группам. Таких групп может быть несколько. Мы будем рассматривать случай, когда к таким группам относятся: группы изделий, группы этапов выполнения изделий, группы работ, группы тактов планирования, группы исполнителей, группы ресурсов. Общность построенной математической модели предполагает, что количество и состав групп может меняться в зависимости от конкретных производственных систем. Рассматриваемые в данной работе задачи объемно-календарного планирования заключаются в определении плана производства в объемных показателях (нормо-часы, рубли, условные тонны), в котором определено, какие исполнители в какие периоды планирования будут выполнять какие работы с использованием каких ресурсов. Спецификой рассматриваемых производственных систем является учет квалификации исполнителей и взаимозаменяемости ресурсов. Для каждой работы определено множество исполнителей, любой из которых по своей квалификации может быть назначен на эту работу, но при этом, в зависимости от квалификации – разные назначения будут оцениваться различным образом; то же самое относится и к ресурсам. Для каждой работы указывается множество ресурсов, любой из которых может быть использован для выполнения работы, но при этом от «качества» ресурса зависит оценка такого назначения. Оценка возможных назначений в работе учитывается через «обобщенные затраты», которые понесет система. Требуется определить, какие исполнители и какие ресурсы будут назначены на работы каждого этапа каждого проекта в каждый такт планирования, чтобы были выполнены все запланированные работы, и при этом система понесла «минимальные затраты» от найденного назначения.

В качестве примера рассмотрим задачу формирования объемно-календарного плана для предприятий с единичным и мелкосерийным характером производства [7]. В планируемом периоде изготовлению подлежит совокупность изделий. Изготовление каждого изделия разбито на этапы. Для каждого этапа выделена совокупность работ, каждая из которых определяет вид ресурсов, необходимых для выполнения этой работы, а также требуемую квалификацию возможных исполнителей. Каждая работа может выполняться несколькими исполнителями и использовать для выполнения несколько ресурсов. Каждый исполнитель и каждый ресурс учитываются в зависимости от тактов планирования, в которые они будут использованы. Все работы разбиты на группы по сложности, а исполнителям присвоены квалификации с условием: можно назначать исполнителя не только на соответствующую ему работу по сложности, но и на любую работу с меньшей сложностью. Все ресурсы разбиты на группы по применимости с условием: можно назначать для выполнения проектной работы не только соответствующий этой работе ресурс, но и ресурс «большей производительности». Для формализации критерия оптимальности рассматриваемой задачи объемно-календарного планирования необходимо учитывать процедуры формирования зависимости «затрат» от назначений работа – исполнитель, исполнитель-ресурс, исполнитель-такт, ресурс-такт.

Требуется назначить исполнителей на работы с использованием ресурсов по тактам планирования таким образом, чтобы все запланированные работы были выполнены и при этом суммарные затраты системы, связанные с квалификацией исполнителей и производительностью используемых ресурсов, были минимальны.

Математическая модель

Задача 1. Случай корневого ориентированного дерева

1.1. Исходные параметры математической модели.

Пусть P – множество изделий, Q – множество этапов изготовления изделий, J – множество работ, T – множество тактов планирования, I – множество исполнителей, R – множество ресурсов.

Все введенные далее параметры, определяющие количественные величины, должны измеряться в одних и тех же единицах – объемных показателях, например, в нормо-часах. Если это не так, возникает необходимость пересчета одних объемных показателей в другие, например, рублей в трудоемкости, или условных тонн в рубли. Кроме того, для общности математической модели, мы будем описывать ограничения математической модели в виде двусторонних линейных алгебраических неравенств с минимальными и максимальными объемами работ, учитывая, что случай равенства выражается приравниванием минимальных и максимальных объемов. Введем следующие характеристики, определяющие условия допустимости искомого решения. Пусть A^-, A^+ – соответственно минимальный и максимальный объемы работ по всем изделиям, которые должны быть выполнены в планируемом периоде; B_p^-, B_p^+ – соответственно минимальный и максимальный объемы работ, которые должны быть выполнены по изделию p в планируемом периоде, $p \in P$; C_{pq}^-, C_{pq}^+ – соответственно минимальный и максимальный объемы работ, которые могут быть выполнены по этапу q изделия p, $q \in Q$, $p \in P$; D_{pqj}^-, D_{pqj}^+ – соответственно минимальный и максимальный объемы работ, которые могут быть выполнены по работе j, этапу q, изделия p в планируемом периоде, $p \in P, q \in Q, j \in J$, E_{pqjt}^-, E_{pqjt}^+ – соответственно минимальный и максимальный объемы работ, которые могут быть выполнены по работе j, этапу q, изделия p, в такт планирования t, $p \in P,\ q \in Q,\ j \in J,\ t \in T$.

Обозначим через a_{pqjtir} – объем работ, который может быть выполнен i-ым исполнителем с использованием ресурса r (при условии его доступности и достаточности) по работе j этапа q изделия p в такт планирования t, $p \in P,\ q \in Q,\ j \in J,\ t \in T, i \in I,\ r \in R$.

Для постановки задачи объемно-календарного планирования введем величины c_{pqjirt} – «затраты», которые система понесет, если при выполнении работы j исполнитель i будет использовать ресурс r и будет назначен на работу j этапа q изделия p в такт планирования t, $p \in P,\ q \in Q,\ j \in J,\ t \in T, i \in I,\ r \in R$.

1.2. Варьируемые параметры математической модели.

Обозначим через x_{pqjtir} – объем работ, который будет выполнен i-ым исполнителем с использованием ресурса r по работе j этапа q изделия p в такт планирования t, $p \in P,\ q \in Q,\ j \in J,\ t \in T, i \in I,\ r \in R$.

1.3. Ограничения математической модели (1):

$$A^{-} \le \sum_{p \in P} \sum_{q \in Q} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} x_{pqjtir} \le A^{+}. \tag{1}$$

Ограничения на общий объем работ по всем изделиям (2):

$$B_p^{-} \le \sum_{q \in Q} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} x_{pqjtir} \le B_p^{+},\ \ p \in P. \tag{2}$$

Ограничения на объемы работ, которые должны быть выполнены по каждому изделию (3):

$$C_{pq}^{-} \le \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} x_{pqjtir} \le C_{pq}^{+},\ p \in P,\ q \in Q. \tag{3}$$

Ограничения на объемы работ, которые должны быть выполнены по каждому этапу каждого изделия (4):

$$D_{pqj}^{-} \le \sum_{t \in T} \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} x_{pqjtir} \le D_{pqj}^{+},\ p \in P,\ q \in Q,\ j \in J. \tag{4}$$

Ограничения на выполнение каждой работы каждого этапа каждого изделия (5):

$$E_{pqjt}^{-} \le \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} x_{pqjtir} \le E_{pqjt}^{+},\ p \in P,\ q \in Q,\ j \in J, t \in T. \tag{5}$$

Ограничения на выполнение работ по каждому этапу каждого изделия в каждый такт планирования (6):

$$x_{pqjtir} \le a_{pqjtir},\ \ p \in P,\ q \in Q,\ j \in J, t \in T, i \in I, r \in R. \tag{6}$$

Исходные параметры, варьируемые параметры и ограничения (1)-(6) представляют собой общую математическую модель проблемы распределения взаимозаменяемых ресурсов при планировании процесса изготовления сложных изделий.

1.4. Постановка задачи

В рамках общей математической модели могут быть поставлены различные оптимизационные задачи объемно-календарного планирования. Постановка задачи зависит от того, какие ограничения общей математической модели будут учитываться, а также от критерия, формализующего качество найденного решения задачи. Рассмотрим обобщенный критерий оптимальности, формализующий суммарные затраты, которые понесет система при выполнении всех характеристик искомого плана от назначения на работы исполнителей и ресурсов (7):

$$F(X)=\sum_{p\in P}\sum_{q\in Q}\sum_{j\in J}\sum_{t\in T}\sum_{i\in I}\sum_{r\in R}c_{pqjtir}x_{pqjtir}\to\min . \qquad (7)$$

Задача определения величин затрат c_{pqjirt} является принципиальной при постановке задачи объемно-календарного планирования. Обычно информация о подобных затратах определяется экспертным путем, но большое количество параметров, которые определяют затраты, затрудняют экспертам их определение. Здесь предлагается процедура формирования матрицы затрат путем оценивания затрат, соответствующих парам индексов, среди которых определяющими являются пары $(j,i),(i,r),(i,t),(r,t)$ – соответственно, работа – исполнитель, исполнитель-ресурс, исполнитель-такт, ресурс-такт. В этом случае эксперту намного проще оценивать предполагаемые затраты по парам характеристик. Пусть экспертным путем получены значения $c_{ji}^{(1)}$, $c_{ir}^{(2)}$, $c_{it}^{(3)}$, $c_{rt}^{(4)}$ – соответственно, затраты на выполнение работы j исполнителем i, затраты на использование исполнителем i ресурса r, затраты на привлечение исполнителя i для выполнения работ в такт t, затраты на использование ресурса r в такт t, $j\in J,\ t\in T, i\in I,\ r\in R$. После нормировки $\hat{c}_{ji}^{(1)}=\dfrac{c_{ji}^{(1)}}{\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}c_{ji}^{(1)}}$, $\hat{c}_{ir}^{(2)}=\dfrac{c_{ir}^{(2)}}{\sum_{i\in I}\sum_{r\in R}c_{ir}^{(2)}}$, $\hat{c}_{it}^{(3)}=\dfrac{c_{it}^{(3)}}{\sum_{i\in I}\sum_{t\in T}c_{it}^{(3)}}$, $\hat{c}_{rt}^{(4)}=\dfrac{c_{rt}^{(4)}}{\sum_{r\in R}\sum_{t\in T}c_{rt}^{(4)}}$, определим величины затрат следующим образом:

$$c_{pqjirt}=\alpha_1\hat{c}_{ji}^{(1)}+\alpha_2\hat{c}_{ir}^{(2)}+\alpha_3\hat{c}_{it}^{(3)}+\alpha_4\hat{c}_{rt}^{(4)},\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1,\ \alpha_i\ge 0,\ i=\overline{1,4}.$$

Здесь весовые коэффициенты α_i определяют экспертные предпочтения, заданные на множестве выбранных пар индексов. С помощью коэффициентов α_i, которые могут принимать нулевые значения, в зависимости от стоящей задачей, можно по-разному формализовать критерий оптимальности.

Таким образом, поставленная задача 1 объемно-календарного планирования ставится как многоиндексная задача линейного программирования с ограничениями математической модели (1)-(6) и критерием (7). Частные задачи формализуются с использованием требуемых ограничений из (1)-(6) и преобразованным критерием типа (7) с определенными значениями весовых коэффициентов. Однако размеры реальных задач, в которых число неизвестных может превышать 10^{10}, а число ограничений имеет такой же порядок, затрудняет использование для их решения стандартных пакетов программ. Это обуславливает разработку для их решения алгоритмов, учитывающих специфику задачи и позволяющих решать задачи такой размерности в реальном времени. Основной спецификой задачи является *транспортная структура системы ограничений* (1)-(6) – коэффициенты перед переменными принимают значения из множества $\{0,1\}$.

Задача 2. Сведение задачи к поиску допустимой циркуляции в транспортной сети

При принятых обозначениях, пусть G_{pit}^{-}, G_{pit}^{+} – соответственно минимальный и максимальный объемы работ, которые могут быть выполнены по изделию p , i-ым исполнителем, в такт планирования t, $p\in P,\ i\in I,\ t\in T$. Рассмотрим следующую систему ограничений: при сохранении ограничений (1), (2), (3), (5), (6), вместо ограничений (4) рассмотрим новые ограничения (8):

$$G_{pit}^{-} \le \sum_{q \in Q} \sum_{j \in J} \sum_{r \in R} x_{pqjtir} \le G_{pit}^{+},\ p \in P,\ i \in I,\ t \in T. \tag{8}$$

Ограничения на выполнение работ исполнителями по каждому изделию в каждый такт планирования. Рассмотрим задачу 2 с ограничениями (1), (2), (3), (4), (5), (6) и критерием (7).

Алгоритмы решения задач

Для систем транспортного типа принципиальным является то, что в них вместо вектора варьируемых переменных используются многоиндексные матрицы неизвестных. В таких системах суммирование может осуществляться по одному или нескольким индексам. Введенные системы ограничений задачи 1 и задачи 2 являются шести индексной. Число индексов в таких задачах быть достаточно большим, поэтому, для удобства изложения, мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в [12]. Пусть $N(s) = \{1, 2, ..., s\}$. Каждому числу l ставится в соответствие параметр j_l, называемый индексом, который может принимать значения из множества $J_l = \{1, 2, ..., n_l\}$, $n_l \ge 2$, $l \in N(s)$. Пусть $f = \{k_1, k_2, ..., k_t\}$, $f \subseteq N(s)$. Набор значений индексов $F_f = (j_{k_1}, j_{k_2}, ..., j_{k_t})$ называется t-индексом, а множество всех t-индексов обозначается через $E_f = J_{k_1} \times J_{k_2} \times ... \times J_{k_t}$, $t = \overline{1, s}$. Каждому набору F_f ставится в соответствие действительное число z_{F_f}, $F_f \in E_f$. Совокупность таких чисел для всех возможных значений индексов $j_{k_1}, j_{k_2}, ..., j_{k_t}$ называется t-индексной матрицей и обозначается через $\{z_{j_{k_1}, j_{k_2}, ..., j_{k_t}}\} = \{z_{F_f}\}$. Пусть $\overline{f} = N(s) \setminus f$. Тогда через $F = F_f F_{\overline{f}}$ обозначается s-индексный набор $(j_{k_1}, j_{k_2}, ..., j_{k_t}, j_{k_{t+1}}, ..., j_{k_s})$. При этом считается, что если $f = \varnothing$, то E_f состоит из специально выделенного 0-индекса $F_\varnothing$, причем $F = F_\varnothing F$. Тогда для сокращения записи можно ввести следующие обозначения: $\sum_{F_f \in E_f} z_{F_f F_{\overline{f}}} = \sum_{j_{k_1} \in J_{k_1}} \sum_{j_{k_2} \in J_{k_2}} ... \sum_{j_{k_t} \in J_{k_t}} z_{F_f F_{\overline{f}}}$, $F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}}$.

Задача заключается в определении существования для заданного множества M, $M \subseteq 2^{N(s)}$, такой s-индексной матрицы $\{x_F\}$, которая удовлетворяет системе линейных алгебраических двусторонних неравенств (9):

$$a_{F_{\overline{f}}} \le \sum_{F_f \in E_f} x_{F_f F_{\overline{f}}} \le b_{F_{\overline{f}}},\ F_{\overline{f}} \in E_{\overline{f}},\ f \in M. \tag{9}$$

В дальнейшем систему неравенств (8) при заданном множестве M будем обозначать через $D(M)$.

Для некоторых многоиндексных систем решение вопроса об их совместности сводится к решению задачи T – поиска допустимой циркуляции в транспортной сети. Пусть в системе ограничений (8) $a_{F_{\overline{f}}}$ и $b_{F_{\overline{f}}}$ – целые числа. Будем считать, что задача $D(M)$ сводится к задаче T, если некоторое подмножество компонент оптимального решения задачи T образует оптимальное решение задачи $D(M)$ и задача $D(M)$ не имеет допустимого решения, если не имеет допустимого решения задача T. Из [6] следует, что для того чтобы задача $D(M)$ сводилась к задаче T достаточно, чтобы существовало такое разбиение $M_1 = \{f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, ..., f_{m_1}^{(1)}\}$, $M_2 = \{f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, ..., f_{m_2}^{(2)}\}$ множества М, для которого выполняется (10):

$$f_i^{(1)} \subseteq f_{i+1}^{(1)},\ i = \overline{1, m_1 - 1} \quad \text{и} \quad f_i^{(2)} \subseteq f_{i+1}^{(2)},\ i = \overline{1, m_2 - 1}. \tag{10}$$

Для системы ограничений задачи 1 условия (10) выполняется для случая, когда $M_2 = \varnothing$. Действительно, в ограничениях (1) суммирование происходит по индексам множества $\{p, q, j, t, i, r\}$. Для ограничений (2) суммирование происходит по индексам множества $\{q, j, t, i, r\}$. Для ограничений (3) суммирование происходит по индексам множества $\{j, t, i, r\}$. Для ограничений (4) суммирование происходит по индексам множества $\{t, i, r\}$. Для ограничений (5) суммирование происходит по индексам множества $\{i, r\}$. Ограничения (6) не используют суммирование.

Тем самым мы имеем $\{p, q, j, t, i, r\} \supseteq \{q, j, t, i, r\} \supseteq \{j, t, i, r\} \supseteq \{t, i, r\} \supseteq \{i, r\} \supseteq \varnothing$.

Эти условия означают, что система (1)-(6) моделируется взвешенным корневым ориентированным деревом, в котором корень дерева определяется ограничением (1), листья – ограничениями (6), а промежуточные элементы – ограничениями (2)-(5). Тогда исходная задача формально ставится как задача распределения однородного ресурса в иерархической системе древовидной структуры [10]. Вершинам дерева присвоены веса, определяющие минимальные и максимальные допустимые объемы, ограничивающие объем ресурса, который может быть передан через эту вершину. Кроме того, листьям дерева поставлены в соответствия величины c_{pqjirt}, определяющие затраты системы за единицу ресурса, который будет передан соответствующему листу.

Согласно [2], определим так называемые приведенные границы для элементов системы:

$$a'_{pqjtir} = 0, \quad a''_{pqjtir} = a_{pqjtir}, \ p \in P, \ q \in Q, \ j \in J, t \in T, i \in I, r \in R \ ,$$

$$E'_{pqjt} = \max(E^-_{pqjt}, \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} a'_{pqjtir}) \ ,$$

$$E''_{pqjt} = \min(E^+_{pqjt}, \sum_{i \in I} \sum_{r \in R} a''_{pqjtir}) \ , \quad p \in P, \ q \in Q, \ j \in J, t \in T \ ,$$

$$D'_{pqj} = \max(D^-_{pqj}, \sum_{t \in T} E'_{pqjt} \ , \ D''_{pqj} = \min(D^+_{pqj}, \sum_{t \in T} E''_{pqjt}), \quad p \in P, \ q \in Q, \ j \in J \ ,$$

$$C'_{pq} = \max(C^-_{pq}, \sum_{j \in J} D'_{pqj}) \ , \ C''_{pq} = \min(C^+_{pq}, \sum_{j \in J} D''_{pqj}), \quad p \in P, \ q \in Q \ ,$$

$$B'_p = \max(B^-_p, \sum_{q \in Q} C''_{pq}) \ , \ B''_p = \min(B^+_p, \sum_{q \in Q} C''_{pq}),$$

$$A' = \max(A^-, \sum_{p \in P} B'_p) \ , \ A'' = \min(A^+, \sum_{p \in P} B''_p) \ .$$

Согласно теореме о приведенных границах [2], система ограничений (1)-(6) совместна тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$E'_{pqjt} \le E''_{pqjt}, \ D'_{pqj} \le D''_{pqj}, \ C'_{pq} \le C''_{pq}, \ \dot{B}_p \le B''_p, \ A' \le A'' ,$$
$$p \in P, \ q \in Q, \ j \in J, t \in T, i \in I, r \in R$$

Проверка на совместность системы ограничений (1)-(6) требует линейного числа операций относительно переменных рассматриваемой задачи. Алгоритм решения исходной задачи использует процедуры проверки системы ограничений (1)-(6) на совместность [9]. Найдем все s цепей, соединяющих корень дерева с листьями. Для каждой такой цепи известна величина затрат c_{pqjirt}, которую получит система от распределения единицы ресурса от корня дерева до соответствующего листа. Начиная с цепи, для которой величина затрат наименьшая (если их несколько – то цепь любая из них), не нарушая приведенные границы, пропускаем максимальное количества ресурса по этой цепи. Уменьшим левые и правые границы на эту величину во всех вершинах, соответствующих выбранной цепи. Исключим эту цепь из рассмотрения, при этом условия теоремы о приведенных границах будут выполнены. Повторяем процедуру s раз. Найденные величины ресурса будут определять оптимальное решение исходной задачи. Вычислительная сложность предложенного алгоритма $O(n^2)$, где n – число вершин в дереве. Действительно, максимальная длина цепи для такой сети не превосходит n, а по каждой цепи алгоритм обращается к каждой вершине один раз.

Для системы ограничений задачи 2 имеем $\{p,q,j,t,i,r\} \supseteq \{j,t,i,r\} \supseteq \{i,r\} \supseteq \varnothing$, $\{q,j,t,i,r\} \supseteq \{q,j,r\}$. Тем самым $M_1 \neq \varnothing$, $M_2 \neq \varnothing$. Тогда для многоиндексной системы ограничений задачи 2 решение вопроса об ее совместности сводится к решению задачи поиска допустимой циркуляции в транспортной сети.

Заключение

В работе рассмотрена проблема объемно-календарного планирования, построена математическая модель, поставлены оптимизационные задачи назначения исполнителей на работы с использованием ресурсов по тактам планирования таким образом, чтобы все запланированные работы были выполнены и при этом суммарные затраты системы, связанные с квалификацией исполнителей и производительностью используемых ресурсов, были минимальны. Показано, что поставленная задача формализуется как многоиндексная задача линейного программирования транспортного типа с двусторонними ограничениями. Специфика поставленной задачи позволила применить к ее решению алгоритм квадратичной сложности, использующий описанные процедуры приведенных границ. Полученные в работе результаты положены в основу реализованного прототипа программной системы, решающей описанный класс задач объемно-календарного планирования. Проведенные вычислительные эксперименты на реальных исходных данных опытного производства АО «ОКБМ Африкантов», Н. Новгород, показали адекватность построенной математической модели и применимость предложенных алгоритмов к решению большеразмерных задач объемно-календарного планирования.

Библиографический список

1. **Прилуцкий, М.Х.** Задача упорядочения работ как задача о назначениях / М.Х. Прилуцкий, Е.А. Кумагина // Вестник Нижегородского государственного университета. Математическое моделирование и оптимальное управление. – 1999. – Вып. 21. – С. 18-24.
2. **Прилуцкий, М.Х.** Многоиндексные задачи объемно-календарного планирования транспортного типа / М.Х. Прилуцкий // Труды 5 международной конференции «Идентификация систем и задачи управления SICPRO-06». – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – 2006. – С. 503-510.
3. **Прилуцкий, М.Х.** Многокритериальные многоиндексные задачи объемно-календарного планирования / М.Х. Прилуцкий // Известия академии наук. Теория и системы управления. – 2007. – №1. – С. 78-82.
4. **Прилуцкий, М.Х.** Оптимизационные задачи объемно-календарного планирования для нефтеперерабатывающих предприятий / М.Х. Прилуцкий // Системы управления и информационные технологии. – 2007. – № 2.1(28). – С. 188-192.
5. **Прилуцкий, М.Х.** Потоковые модели для предприятий с непрерывным циклом изготовления продукции. /М.Х. Прилуцкий, В.Е. Костюков // Информационные технологии. – 2007. – №10. – С.47-52.
6. **Афраймович, Л.Г.** Многоиндексные задачи оптимального планирования производства / Л.Г. Афраймович, М.Х. Прилуцкий // Автоматика и телемеханика. –2010. – № 10. – С. 148-155.
7. **Афраймович, Л.Г.** Планирование и оперативное управление процессом изготовления сложных изделий / Л.Г. Афраймович, В.С. Власов, М.С. Куликов, М.Х. Прилуцкий, Н.В. Старостин, А.В. Филимонов // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014). – М: ИПУ РАН. – 2014. – С. 5138-5149.

8. **Афраймович, Л.Г.** Многоиндексные транспортные задачи с 1-вложенной структурой / Л.Г. Афраймович, А.С. Катеров, М.Х. Прилуцкий // Автоматика и телемеханика. – 2016. – №11. – С. 18-42.
9. **Прилуцкий, М.Х.** Задачи оптимального планирования как задачи распределения ресурсов в сетевых канонических структурах / М.Х. Прилуцкий, В.С. Власов, О.В. Кривошеев // Информационные технологии. – 2017. – Т. 23. – № 9. – С. 650-657.
10. **Прилуцкий, М.Х.** Задачи календарного планирования для предприятий с единичным и мелкосерийным характером производства / М.Х. Прилуцкий, И.В. Нетронин // Системы управления и информационные технологии. – №3(77). – 2019. – С. 46-51.
11. **Прилуцкий, М.Х.** Оптимальные стратегии распределения разнородных ресурсов в сетевых канонических структурах / М.Х. Прилуцкий, Е.А. Кумагина // Системы управления и информационные технологии. – 2014. – №1(55). – С. 60-64.
12. **Раскин, Л.Г.** Многоиндексные задачи линейного программирования (теория, методы, приложения) /Л.Г.Раскин, И.О.Кириченко // Радио и связь, 1982. – 240 с.

Дата поступления
в редакцию: 18.09.2019

M.Kh. Prilutskii[1], I.V. Netronin[2]

TASKS OF VOLUME-CALENDAR PLANNING FOR ENTERPRISES WITH A SINGLE AND SMALL-SERIES CHARACTER OF PRODUCTION

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod[1]
Fderal State Unitary Enterprise I.I. Afrikantov OKB Mechanical Engineering[2]

Purpose: The paper considers the problem of volumetric scheduling, builds a mathematical model, sets optimization tasks for appointing workers to work using resources on planning steps in such a way that all planned work is completed and at the same time the total cost of the system associated with the skills of the performers and the productivity of the resources used were minimal. It is shown that the problem posed is formalized as a multi-index linear transport-type programming problem with two-sided constraints.
Approach: Effective algorithms for solving the tasks are proposed.
Findings: A prototype of a software system has been implemented, which, using real initial data, has shown the adequacy of the constructed mathematical model and the applicability of the proposed algorithms to solving large-scale volume-scheduling problems.
Originality/value: All results are new.

Key words: volumetric scheduling, single and small-scale production, the method of reduced boundaries.