

М.В. Кокоулина¹, А.С. Епифанова¹, Е.Н. Пелиновский¹⁻³
О.Е. Куркина¹, А.А. Куркин¹

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОРОНАВИРУСА С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОЙ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева¹
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»²
Институт прикладной физики РАН³

В условиях спада заболеваемости коронавирусом во многих странах накопленные данные позволяют представить анализ в широком диапазоне значений от начала эпидемии до ее конца. Целью настоящей работы является анализ динамики развития COVID-19 с помощью обобщенного стохастического логистического уравнения для оценки числа вероятных пиков заболеваемости коронавирусом, а также оценка характера разброса коэффициентов обобщенной логистической модели в целом. Использована логистическая модель, основанная на обобщенном логистическом уравнении первого порядка. Данные о заболеваемости коронавирусом в разных странах взяты с сайта Всемирной организации здравоохранения. Показано, что для всех рассматриваемых стран обобщенное логистическое уравнение является неплохой регрессионной моделью. В то же время для описания суточного хода заболеваемости необходимо учитывать случайные факторы, что позволяет считать коэффициенты логистической модели случайными или вводить внешние силы, делая логистическое уравнение стохастическим. Определены спектральные и вероятностные свойства случайных вариаций логистического уравнения. При всей простоте обобщенной логистической модели ею хорошо описывается зависимость роста числа заболевших от времени.

Ключевые слова: обобщенная логистическая модель, математическое моделирование, COVID-19.

Введение

Последняя эпидемия коронавируса (COVID-19) затронула буквально все страны, вынужденные принять чрезвычайные меры для нераспространения заражения (закрытие государственных границ, карантин, самоизоляция, прекращение работы многих предприятий и учреждений, переход на дистанционную работу и обучение). Число заразившихся в мире уже превысило 9 млн чел. (данные конца июня 2020 г.). К счастью, во многих странах эпидемию удается обуздать, и она идет на спад. Общая информация о распространении вирусной инфекции широко представлена в интернете; динамика распространения заболевания отражена на сайте <http://91-divoc.com/pages/covid-visualization/> в виде интерактивных графиков.

Распространение эпидемии в любой стране имеет почти один и тот же сценарий: сначала происходит быстрый рост заболевших (близкий к экспоненциальному или степенному), который затем замедляется (численные значения констант, описывающие эти зависимости, естественно, различны для разных стран). В целом данные кривые достаточно гладкие, хотя на части из них заметны изломы, связанные с действием мер карантинного характера. Также на сайте приведены графики суточной динамики заболевших. Данные кривые не являются гладкими: на них заметны спорадические вспышки числа заболевших, обусловленные многими причинами. Это означает, что динамика распространения эпидемии характеризуется разными масштабами: от нескольких месяцев (общая продолжительность эпидемии) до нескольких недель (инкубационный период) и даже до нескольких дней (инфекционный интервал и локальные причины). Одна часть масштабов связана с определенными свойствами данного вируса, другая – с действием государственных и местных органов управления, вводивших карантинные меры; есть и непредсказуемые причины, обусловленные социальным поведением (несоблюдение карантина). Отмеченные особенности динамики распространения

коронавируса SARS-CoV-2 должны отражаться в математических моделях и описываться уравнениями с переменными или даже случайными коэффициентами.

Для объяснения скорости распространения эпидемий и прогнозирования их последствий используется ряд математических моделей различной сложности. Исторически первой моделью было логистическое уравнение Ферхюльста [1], представляющее собой нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) первого порядка с постоянными коэффициентами. Оно применяется также как простейшая модель для описания роста народонаселения и эффективности рекламы. Качественно она объясняет рост числа заболевших от времени: почти экспоненциальный рост числа больных на начальном этапе развития эпидемии и выход на константу к ее завершению. Применительно к COVID-19 эта модель используется, например, в [2, 3]. Анализ данных COVID-19, сделанный в [4], показал, что экспоненциальный рост числа заболевших на начальном этапе встречается, главным образом, в Америке и Австралии, в то время как во многих европейских странах он является степенным. В этом случае можно использовать обобщенное логистическое уравнение [5-8], которое также применяется для интерпретации числа заболевших коронавирусом в [3, 9-11]. С математической точки зрения, динамика в рамках логистического уравнения является тривиальной и полностью детерминистской. Более сложная динамика, в том числе, хаотическая, возникает в разностном логистическом уравнении или с учетом запаздывания на инкубационный период [12-16], эти модели также привлекаются для интерпретации и прогноза динамики COVID-19 [17-19]. В еще более сложных моделях людей разбивают на различные группы, т.н. SIR-модели, включающие в себя систему ОДУ высокого порядка. Динамика таких систем менее изучена математически, и в ней возможны стохастические колебания [20-26]. Однако модели этого уровня просты в реализации, показали свою эффективность и активно используются для моделирования и прогноза распространения COVID-19 [27-35].

Основная трудность в применении математических моделей для прогноза эпидемии связана с неопределенностью выбора коэффициентов в уравнениях. С повышением сложности модели число коэффициентов сильно возрастает. Опыт применения моделей для интерпретации прежних эпидемий не всегда может быть использован, поскольку меняется интенсивность воздействия вирусов на живые организмы. Ранее многие эпидемии имели локальный характер, и, соответственно, меры предотвращения их распространения были иными. Характер кривых числа заболевших от времени и суточного прироста показывает их сильное различие для разных стран, что связано с различной плотностью населения, обычаями и административными превентивными мерами. В силу этого на начальной стадии развития эпидемии любые прогнозы ее конечной стадии весьма грубы и ненадежны. По мере развития эпидемии все больше констант в уравнениях может быть определено из наблюдений, вместе с тем, «старые» константы, определенные на ранних стадиях, также надо исправлять. Поэтому, в сущности, в прогностических целях решаются уравнения с переменными коэффициентами, математические свойства которых (существование, сходимости и устойчивость) не всегда определены. Таким образом, разные модели с постоянно «подправляемыми» коэффициентами могут приводить к близким результатам прогноза на короткое время. В то же время для долгосрочных прогнозов необходимо понимать возможную временную изменчивость коэффициентов модели и их влияние на характер получаемых решений.

В настоящей работе на основе имеющихся данных по первой волне COVID-19 мы попытаемся оценить характер разброса коэффициентов обобщенной логистической модели в целом, не связываясь с проблемой прогноза, когда анализируются данные короткого ряда. Идея этого исследования описана в нашей статье [8], где на примере только четырех стран обсуждается применимость простой и обобщенной логистической моделей. Из такого небольшого числа стран трудно делать какие-то общие выводы. В дайной статье использованы данные развития эпидемии в двенадцати странах: Испания, Бельгия, Германия, Чехия, Австралия, Норвегия, Австрия, Швейцария, Нидерланды, Испания, Турция, Южная Корея. В результате удастся получить значимые статистические выводы.

Обобщенная логистическая модель

Рассмотрим обобщенную модель логистического уравнения, содержащего четыре константы [5, 6] (1):

$$\frac{dN}{dt} = rN^\alpha \left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)^\beta, \quad (1)$$

где $N(t)$ – число заболевших людей, N_∞ – максимально возможное число заболевших людей и r – скорость роста эпидемии. При $\alpha = \beta = 1$ уравнение (1) совпадает с простым логистическим уравнением [1], решение которого находится тривиально. Обобщенное логистическое уравнение в общем случае точно не решается, однако характер решения остается неизменным – число заболевших монотонно приближается к N_∞ . На самом деле данные задаются с дискретностью в одни сутки, так что необходимо решать разностное уравнение (2):

$$N_{n+1} - N_n = r(\Delta t)N_n^\alpha \left(1 - \frac{N_n}{N_\infty}\right)^\beta, \quad (2)$$

где $\Delta t = 1$ день (естественный масштаб в медицинской статистике, и его величина всюду ниже опущена). Свойства уравнения (2) в принципе, отличаются от уравнения (1). В частности, возможны стохастические режимы, если скорость роста (r) велика. В случае классического логистического уравнения $\alpha = \beta = 1$ при $r < 2$ решение уравнения (2) описывается монотонной функцией, как и уравнения (1) [36]. Как мы увидим далее, значения скорости роста на порядок меньше, чем критическое значение, так что эта разница невелика, она показана на рис. 1 для данных из Испании, обсуждаемых ниже.

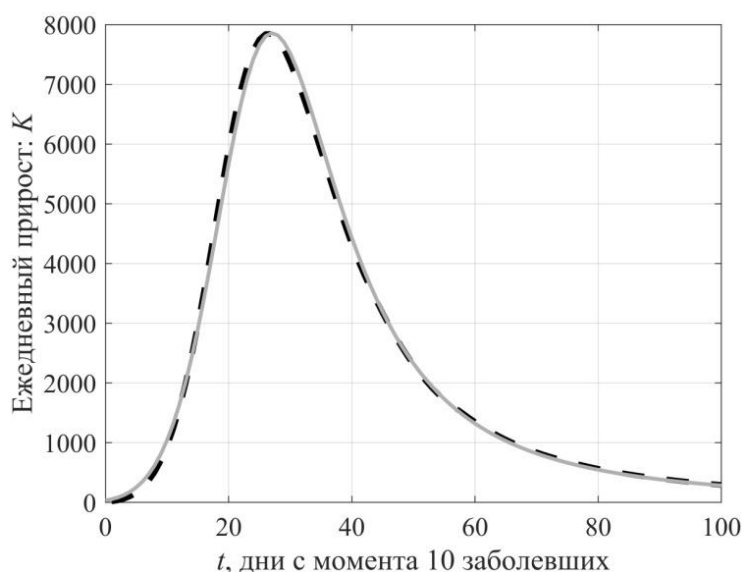


Рис. 1. Зависимость числа заболевших в день от времени:
 черная штриховая линия - численное решение обобщенного логистического уравнения (1),
 серая линия – решения разностного уравнения (2) для Испании

Обратим внимание, что величина $K_n = N_{n+1} - N_n$ есть число заболевших в сутки, оно также приводится в сводках ВОЗ. Но тогда, если справедливо обобщенное логистическое уравнение, мы получаем из (2) алгебраическую связь между количеством заболевших в сутки (K) и общим количеством зараженных (N) (3):

$$K = rN^\alpha \left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)^\beta. \quad (3)$$

Имеющийся массив данных ВОЗ может быть использован для регрессионных оценок четырех констант в алгебраическом уравнении (3). Здесь мы возьмем данные о заболеваемости коронавирусом в двенадцати странах, где уже закончилась первая волна эпидемии. Это Испания, Бельгия, Германия, Чехия, Австралия, Норвегия, Австрия, Швейцария, Нидерланды, Турция, Южная Корея. Число данных для каждой страны превышает шестьдесят записей (два месяца), что позволяет рассчитывать на репрезентативность получаемых оценок. Количество стран также достаточно велико (12), чтобы уверенно судить о применимости обобщенной логистической модели. Мы будем оперировать данными на 25.06.2020; взятыми из (<https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019/situation-reports>).

На рис. 2 представлены данные официальной статистики заболеваемости и аппроксимации (3). Здесь темно-серая сплошная линия описывает регрессионную кривую, а штриховые линии – границы 95 % доверительного интервала. Для вычисления доверительного интервала использовали встроенную функцию «predint» пакета Matlab. В частности, двусторонний доверительный интервал имеет вид [37] (4):

$$y_{n+l}^n \leq y_{n+l} \leq y_{n+l}^g = f(x_{n+l}) + t_{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{s\lambda(n,l)}{2} \quad (4)$$

где $f(x_{n+l}) = y_{n+l}$ – значение y , вычисленное по регрессии при $x = x_{n+l}$; t_α – α -квантиль распределения Стьюдента при $f = n - k - 1$ степенях свободы, где k – порядок регрессии;

$s^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2$ – дисперсия регрессии; λ – коэффициент регрессии, зависящий от

n и l . Светло-серая линия соответствует классическому логистическому уравнению $\alpha = \beta = 1$. В табл. 1 приведены значения коэффициента детерминации R^2 , который всюду превышает 0,8, свидетельствуя в пользу хорошей аппроксимации логистической кривой (3). В то же время, для простой логистической кривой $\alpha = \beta = 1$ такое согласие было бы значительно хуже, и коэффициент R^2 в ряде случаев опускался бы до 0,5. Таким образом, для всех рассмотренных стран обобщенная логистическая кривая является адекватной аппроксимацией натуральных данных, и эта модель хорошо описывает течение эпидемии.

Таблица 1.

**Коэффициенты обобщенной логистической модели (1)
и коэффициент детерминации**

Страна	N_∞	r	A	β	R^2
Италия	499300	0,994	0,8	5,1	0,96
Турция	146500	3,573	0,7	1,07	0,975
Нидерланды	41950	3,573	0,7	0,7	0,94
Южная Корея	16200	0,143	1,2	5,4	0,91
Австрия	18500	0,151	1,1	2,56	0,88
Швейцария	32100	1,093	0,8	1,5	0,86
Испания	256000	1,2	0,8	1,9	0,9
Бельгия	62000	2,2	0,7	1,3	0,9
Германия	211000	1,8	0,8	2,1	0,8
Чехия	14000	0,3	0,9	4,1	0,8
Австралия	8500	0,03	1,4	3,5	0,8
Норвегия	8900	0,6	0,9	1,6	0,8

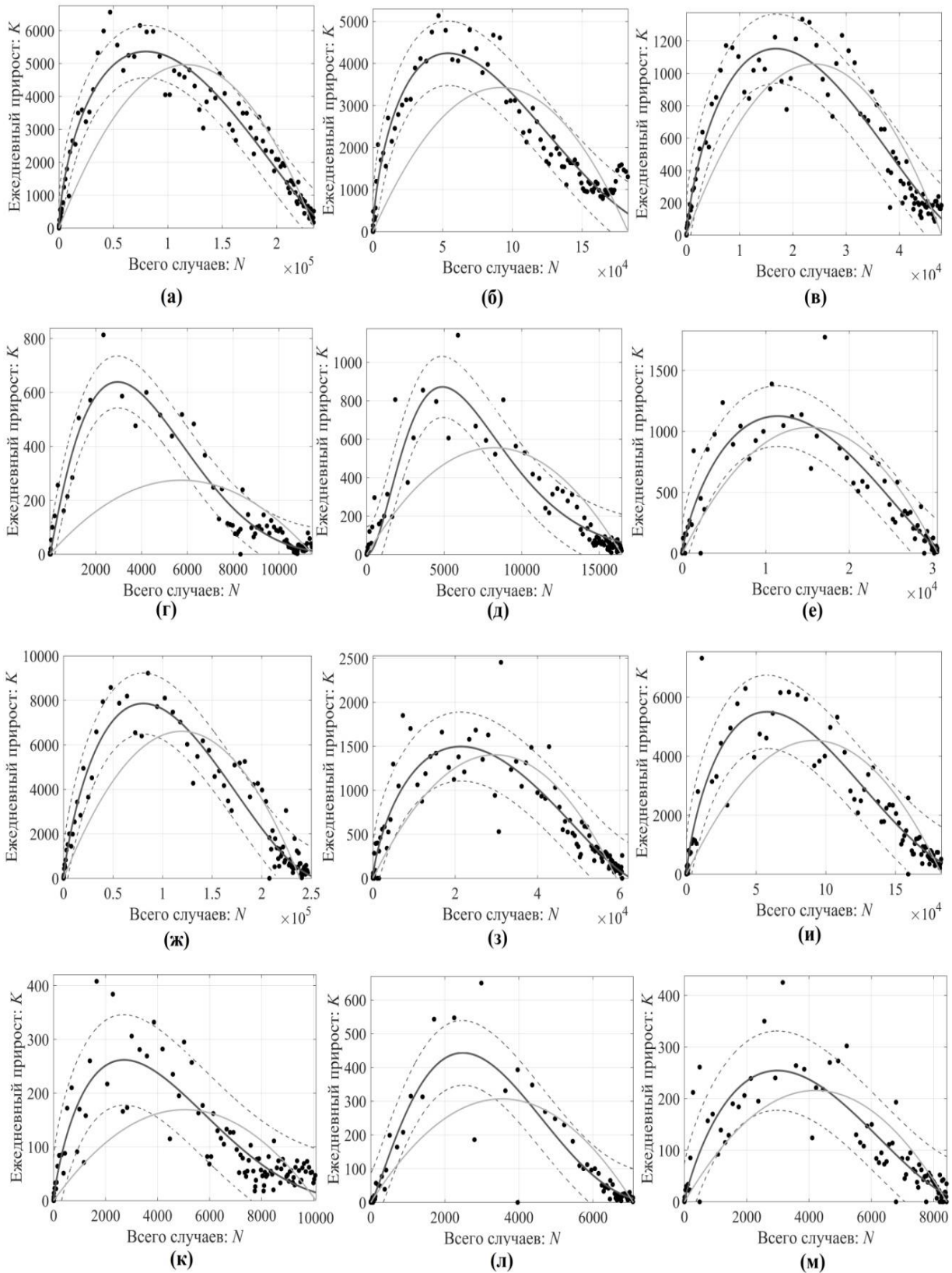


Рис. 2. Связь количества заболевших в сутки (K)

и общего числа заболевших (N) в рамках обобщенной модели:

- (1) – темно-серая линия, пунктиром даны границы 95 % доверительного интервала;
 светло-серой линией показана аналогичная кривая в рамках простой логистической модели:
 (а) Италия, (б) Турция, (в) Нидерланды, (г) Южная Корея, (д) Австрия, (е) Швейцария,
 (ж) Испания, (з) Бельгия, (и) Германия, (к) Чехия, (л) Австралия, (м) Норвегия

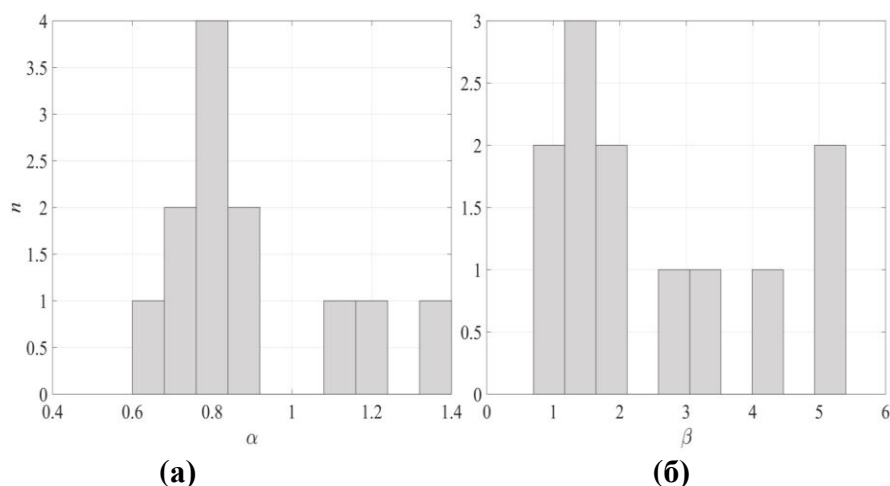


Рис. 3. Гистограмма величин показателей степени в уравнениях (1)-(2): (а) – степень α ; (б) – степень β

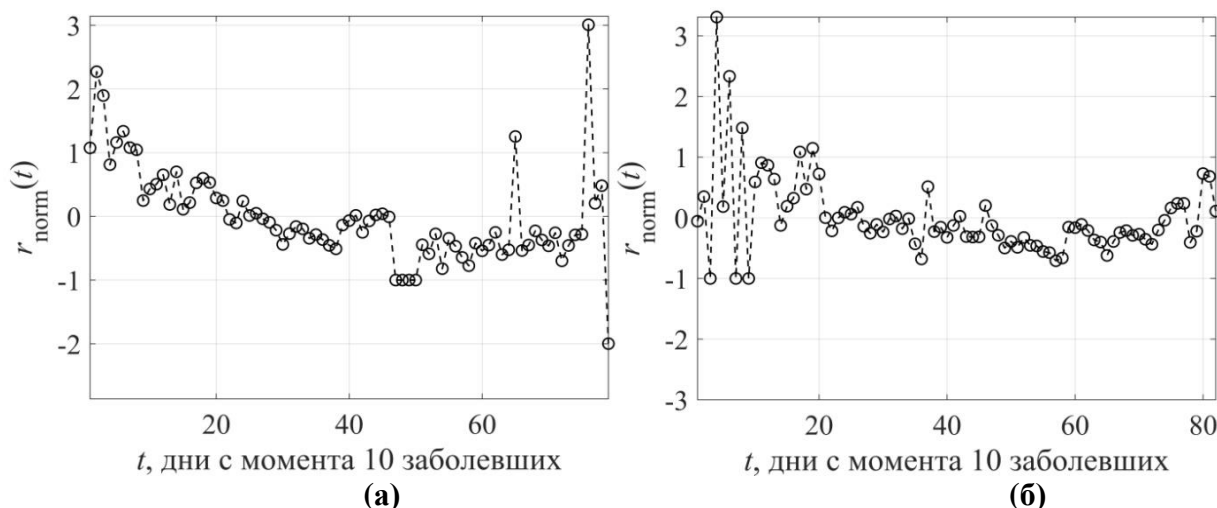


Рис. 4. Зависимость $r_{\text{norm}} = (r - \langle r \rangle) / \langle r \rangle$ от времени справа

в рамках обобщенной логистической модели: (а) – для Бельгии; (б) – для Италии

Отличия обобщенной логистической кривой от классической можно характеризовать гистограммами показателей степени (рис. 3). Как видим, коэффициент α может быть как меньше, так и больше единицы (среднее значение составляет 0,89), в то время как коэффициент β почти всегда превышает единицу (среднее значение 2,57). Там, где $\beta > 1$, кривая $K(N)$ перекошена в сторону малых значений, что означает, что пик эпидемии проходит относительно быстро, в то время как окончание эпидемии затягивается. Отличия показателей степени от $\alpha = \beta = 1$ приводят к тому, что состояния равновесия уравнения (1) не являются грубыми, и решение в окрестности состояния равновесия не является экспоненциальным. Оно становится степенным и легко находится из решения уравнения (1) в окрестности состояния равновесия. Как отмечалось во Введении, степенной рост числа заболевших во время эпидемии COVID-19 характерен для многих стран [4], и обобщенная логистическая кривая неплохо соответствует данным медицинской статистики.

Хотя в среднем обобщенная логистическая кривая в достаточной мере соответствует данным наблюдений, все же ясно, что суточное количество заболевших испытывает случайные вариации, которые могут быть связаны как с асоциальным поведением (нарушением карантина), так и с количеством тестов. Эти вариации хорошо видны на рис. 2. Для простоты свяжем все вариации с изменением только одного параметра – скорости роста эпидемии, которую легко найти по формуле (5):

$$r = \frac{K}{N^\alpha \left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)^\beta}, \quad (5)$$

подставляя сюда известные данные ВОЗ. Эта идея, высказанная в нашей работе [7], была отражена также в одновременно появившейся публикации [38], где была применена к итальянским данным. На рис. 4 представлена зависимость $r_{norm} = (r - \langle r \rangle) / \langle r \rangle$ от времени (t) в рамках обобщенной логистической модели для Испании и Бельгии. На рис. 5 показан спектр вариаций и гистограмма распределения коэффициента роста для этих же стран. Анализ зависимостей для всех 12 государств показывает, что в целом характеристики изменчивости близки для разных стран, в том смысле, что спектры имеют пики на близких частотах (удобнее, однако, приводить периоды вместо частоты, что сделано на рис. 5) и гистограммы примерно одинаковы. Аппроксимация гистограмм гауссовым распределением носит, конечно, условный характер, однако полезна, поскольку стохастические уравнения часто решаются в классе нормальных случайных процессов. Аналогичный разброс можно изучить и по другому параметру N_∞ , на чем мы здесь останавливаться не будем.

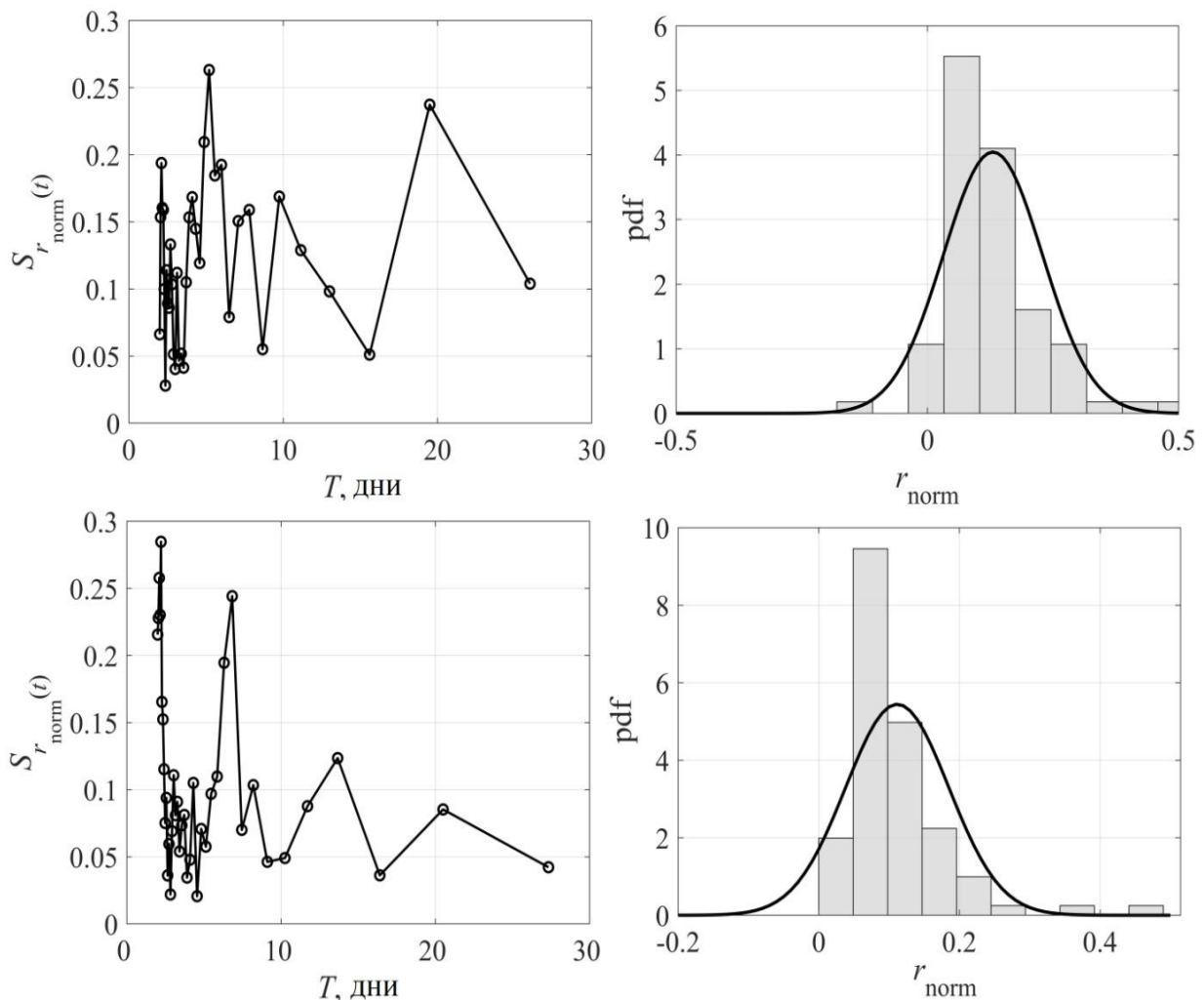


Рис. 5. Спектр и гистограмма распределения зависимости $r(t)$ в рамках обобщенной логистической модели для Испании (сверху) и Бельгии (снизу)

Аналогично можно сопоставить невязку данных с логистической кривой с помощью «внешней силы», которая может описывать как неконтролируемую миграцию инфицированных в данном регионе, так и увеличение числа тестов на коронавирус (6):

$$f = K - rN^\alpha \left(1 - \frac{N}{N_\infty}\right)^\beta. \quad (6)$$

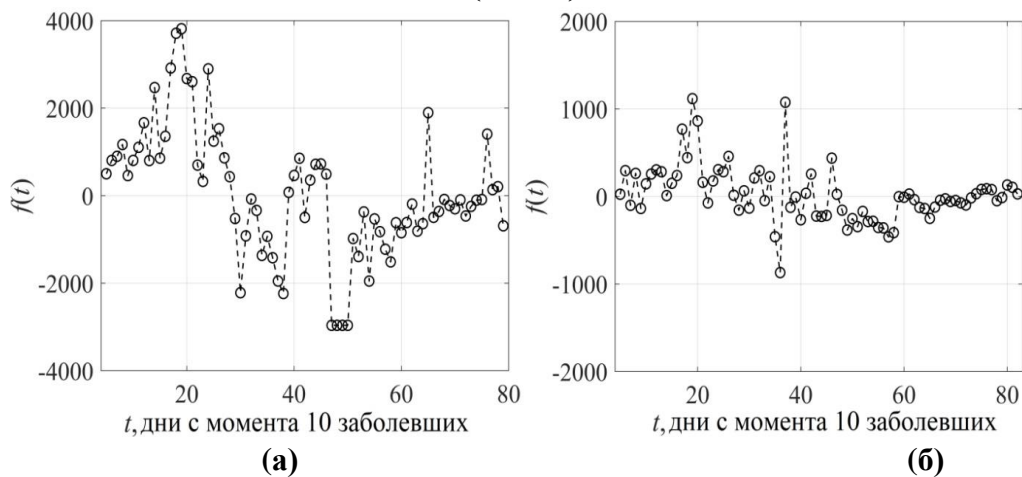


Рис. 6. «Внешняя сила» $f(t)$ в рамках обобщенной логистической модели: (а) – для Бельгии; (б) – для Италии

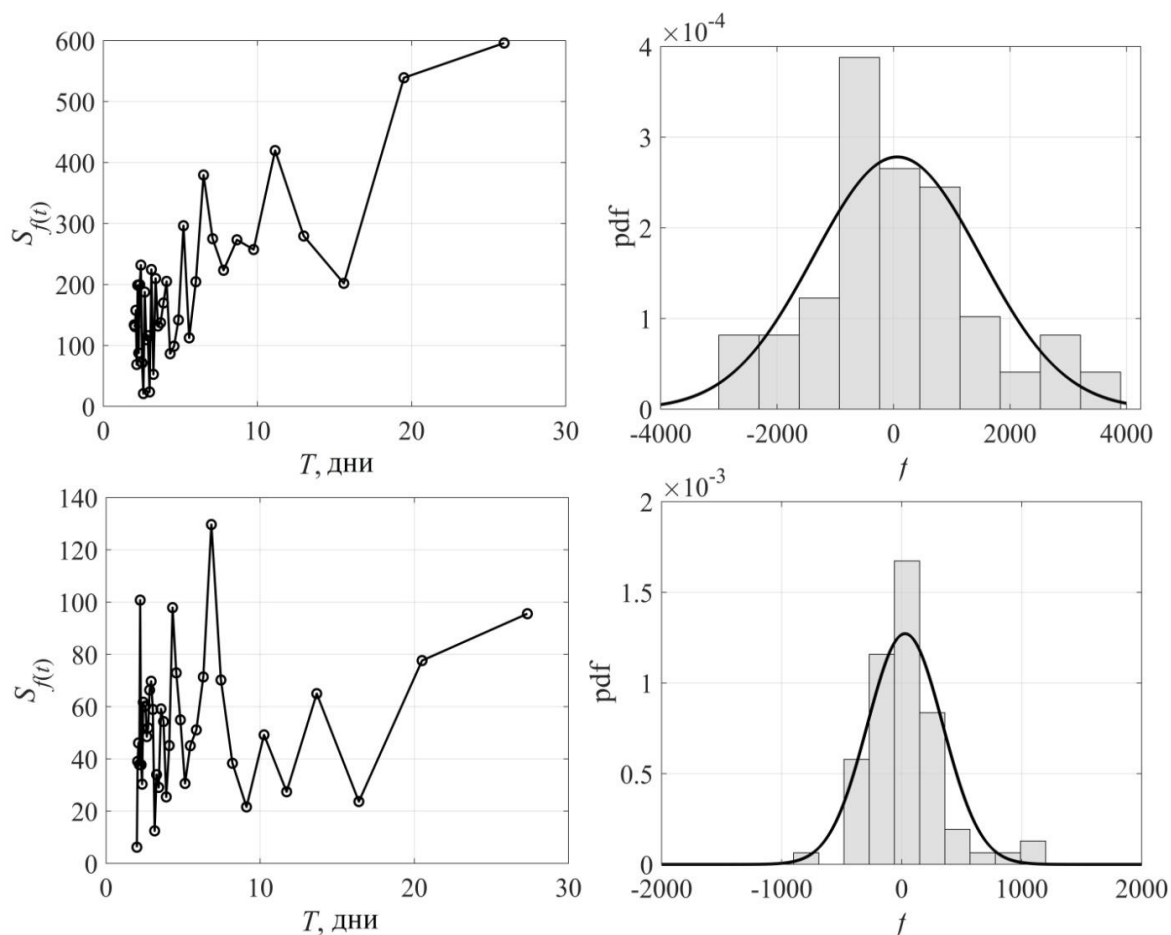


Рис. 7. Справа спектр распределения зависимости $f(t)$, слева гистограмма и ее гауссова аппроксимация (черная линия) для Испании (сверху) и Бельгии (снизу)

На рис. 6 представлены рассчитанные зависимости внешней силы от времени, а их спектральные и вероятностные характеристики – на рис. 7, опять же для двух стран: Бельгии и Испании (для остальных рисунки схожи). И здесь проявляются те же масштабы, что и при изменчивости коэффициентов уравнения.

Таким образом, натурные данные свидетельствуют о возможности использования обобщенного логистического уравнения с переменными коэффициентами и внешней силой (7):

$$\frac{dN}{dt} = r(t)N^\alpha [1 - p(t)N]^\beta + f(t), \quad (7)$$

которое может быть стохастическим. Такая модель еще нуждается в специальном математическом исследовании.

Заключение

Подведем итоги. При всей простоте обобщенной логистической модели она неплохо описывает рост числа заболевших от времени, что иллюстрируется рис. 8, на котором представлены фактические данные и численные решения уравнения (1) для 6 стран (аналогичные кривые построены для всех 12 стран). Здесь же мы привели известную логистическую кривую для случая $\alpha = \beta = 1$, демонстрирующую, что обобщенное логистическое уравнение является более адекватной моделью. Обратим внимание, что прогностическое число общего количества заболевших в обобщенной логистической модели несколько выше, чем в простой логистической модели, и выход на константу затягивается во времени.

Рис. 9 иллюстрирует возможности логистической модели для описания количества заболевших людей в сутки. В среднем теоретическая модель хорошо описывает известные данные, однако разброс точек все же значителен: иногда отклонения могут достигать 50 % и выше. Эти различия особенно заметны на пике заболеваемости, когда медицинским учреждениям необходимо иметь наиболее точный прогноз по динамике развития эпидемии. Насколько точно этот разброс описывается другими моделями (например, SIR), мы узнаем в ближайшем будущем, когда появятся результаты соответствующих исследований. С точки зрения математики, полученная разница в использовании логистической модели для описания двух характеристик – общего числа заболевших (N) и числа заболевших в сутки (K) очевидна: кривая $N(t)$ является интегральной по отношению $K(t)$, поэтому она более гладкая и «детерминированная». Для описания же зависимости $K(t)$, по крайней мере, на качественном уровне лучше использовать стохастические уравнения логистической модели типа (7), в которых введены внешние случайные силы или случайные коэффициенты. Они позволят понять степень разброса данных и, главное, число возможных больших выбросов во время эпидемии. Эти исследования еще предстоит провести.

Авторы понимают, что для реального прогноза развития эпидемии необходимо иметь многофакторные модели, включающие в себя деление населения на различные группы по возрасту, условиям жизни, плотности населения и т.д. Такие модели должны включать в себя обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных высокого порядка, учитывать запаздывающие аргументы и интегральные члены; в настоящее время они разрабатываются. Тем не менее, анализ в рамках простых малопараметрических моделей важен, поскольку позволяет качественно описать процесс, обозначив роль тех или иных факторов. В этом смысле полученные выше результаты демонстрируют возможности хорошо развитой логистической модели для описания эпидемии такого масштаба, как COVID-19.

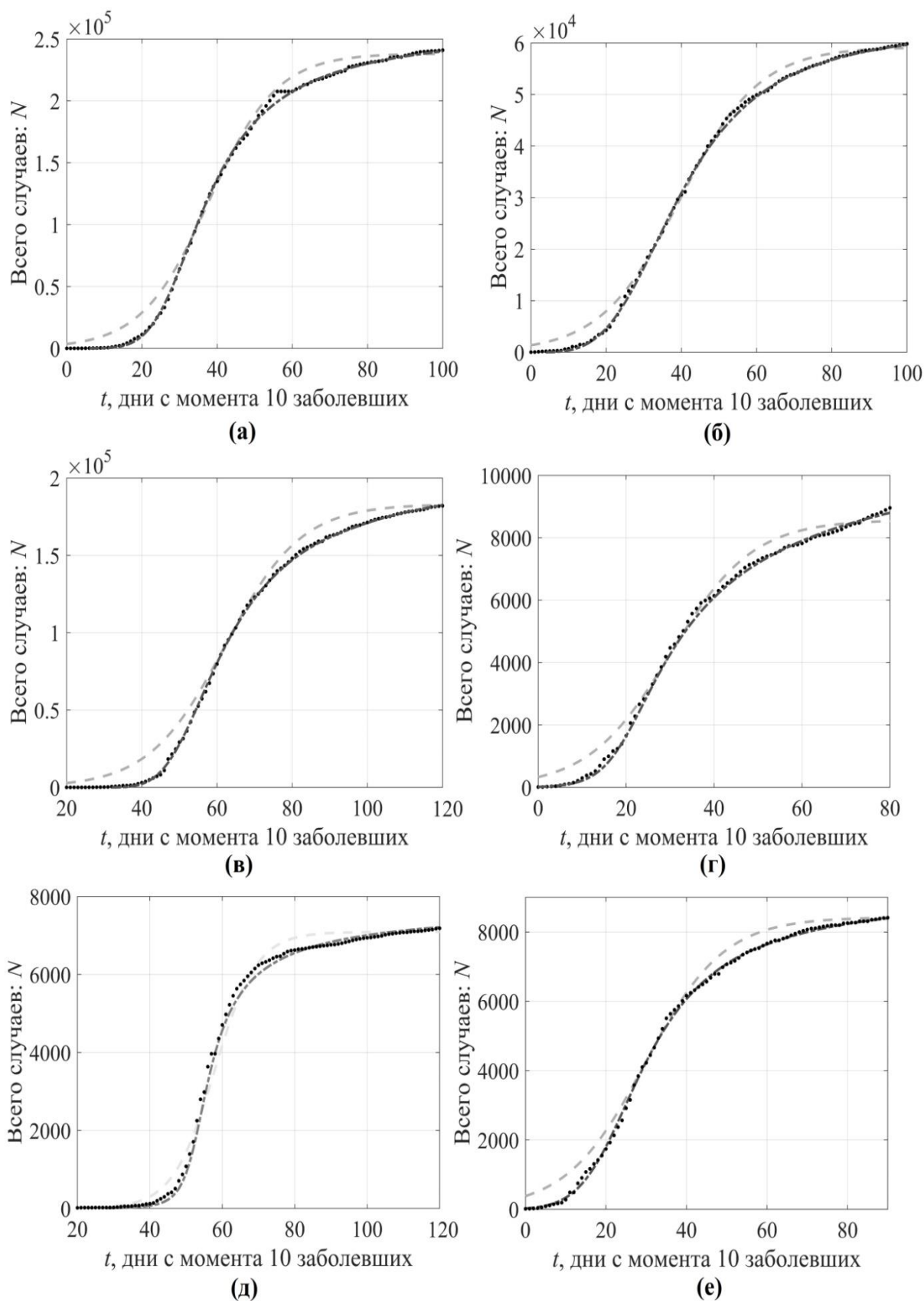


Рис. 8. Зависимость числа заболевших от времени:

черные точки – исходные данные, серая пунктирная линия – решение обыкновенной логистической модели, темно-серая штрих-пунктирная линия – численное решение уравнения (1) обобщенной логистической модели для Испании (а), Бельгии (б), Германии (в), Чехии (г), Австралии (д), Норвегии (е)

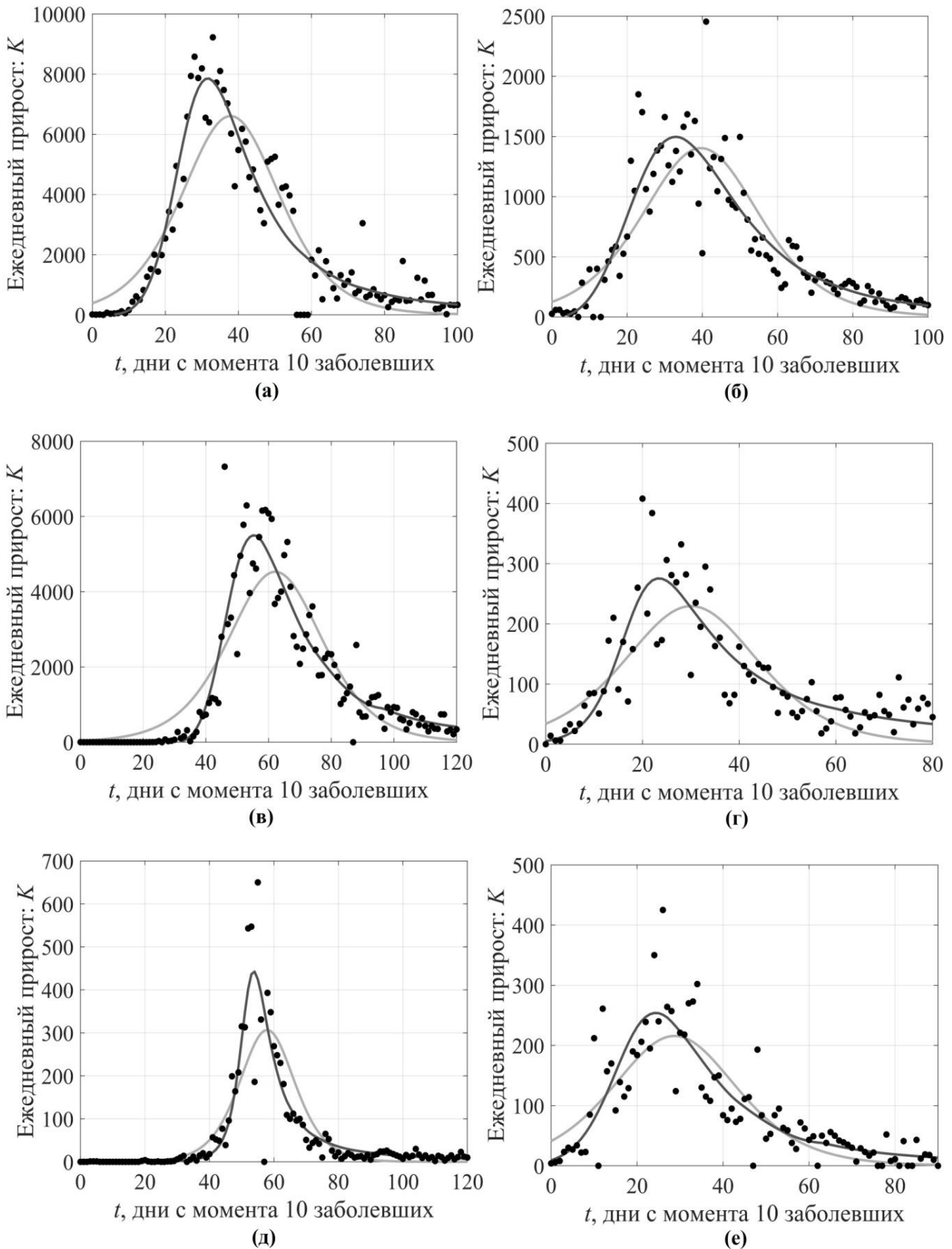


Рис. 9. Зависимость числа заболевших в день от времени:
 черные точки – исходные данные, светло-серая линия – в рамках простого логистического уравнения, темно-серая линия – численное решение обобщенного логистического уравнения (1) для Испании (а), Бельгии (б), Германии (в), Чехии (г), Австралии (д), Норвегии (е)

В заключение хотелось бы отметить, что к схожим выводам пришли авторы только что опубликованной работы [39], где анализировалась применимость SIR модели для описания числа умерших от COVID-19; их анализ основан на данных по 16 странам. Основное уравнение для аппроксимации в этой работе отличается от нашего уравнения (3).

Представленные результаты получены при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке научных исследований ведущих научных школ Российской Федерации НШ-2485.2020.5 и для ПЕН при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

Библиографический список

1. **Verhulst, P.F.** Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement // *Corresp. Math. Phys.* – 1838. – V. 10. – P. 113-126.
2. **Liang, K.** Mathematical model of infection kinetics and its analysis for COVID-19, SARS and MERS // *Infection, Genetics and Evolution.* – 2020. – V. 82. – P. 104306.
3. **Sonnino, G.** Dynamics of the COVID-19 – Comparison between the Theoretical Predictions and Real Data / G. Sonnino // *arXiv preprint arXiv: 2003.13540.* 2020.
4. **Wodarz, D.** Patterns of the COVID19 epidemic spread around the world: exponential vs power laws / D. Wodarz, N.L. Komarova // *medRxiv.* 2020. DOI: 10.1101/2020.03.30.20047274.
5. **Blumberg, A.A.** Logistic growth rate functions / A.A. Blumberg // *Journal of Theoretical Biology.* – 1968. – V. 21. – № 1. – P. 42-44.
6. **Brilhante, M.F.** Modeling risk of extreme events in generalized Verhulst models / M.F. Brilhante, M.I. Gomes, D. Pestana // *REVSTAT–Statistical Journal.* – 2019. – V. 17. – № 2. – P. 145-162.
7. **Куркин, А.А.** Логистические модели распространения эпидемий / А.А. Куркин, О.Е. Куркина, Е.Н. Пелиновский // *Труды НГТУ им. П.Е. Алексеева.* – 2020. – Т. 2(129). – С. 9-18.
8. **Pelinovsky, E.** Logistic equation and COVID-19 / E. Pelinovsky, A. Kurkin, O. Kurkina, M. Kokoulina, A. Epifanova // *Chaos, Solitons and Fractals.* – 2020. – V. 140. – P. 110241.
9. **Cássaro, F.A.M.** Can we predict the occurrence of COVID-19 cases? Considerations using a simple model of growth / F.A.M. Cássaro, L.F. Pires // *Science of the Total Environment.* – 2020. – V.728. – P. 138834. DOI: 10.1016/j.scitotenv.2020.138834.
10. **Wu, K.** Generalized logistic growth modeling of the COVID-19 outbreak in 29 provinces in China and in the rest of the world / K. Wu, D. Darcet, Q. Wang, D. Sornette // *arXiv preprint arXiv:2003.05681.* 2020.
11. **Tappe, S.** A simple mathematical model for the evolution of the corona virus / S. Tappe // *arXiv preprint arXiv:2003.09477.* 2020.
12. **Wright, E.M.** A non-linear difference-differential equation / E. M. Wright // *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* – 1955. – V. 1955. – № 194. – P. 66-87.
13. **Бочаров, Г.А.** Прикладные проблемы математического моделирования в иммунологии / Г.А. Бочаров, Г.И. Марчук // *Журнал вычислительной математики и математической физики.* – 2000. – Т. 40. – № 12. – С. 1905-1920.
14. **Bocharov, G.** Modelling of Experimental Infections / G. Bocharov, V. Volpert, B. Ludewig, A. Meyers // *Mathematical Immunology of Virus Infections.* – Springer, Cham, 2018. – P. 97-152. DOI: 10.1007/978-3-319-72317-4_4.
15. **Bánhelyi, B.** Global attractivity of the zero solution for Wright's equation / B. Bánhelyi, T. Csendes, T. Krisztin, A. Neumaier // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems.* – 2014. – V. 13. – № 1. – P. 537-563. DOI: 10.1137/120904226.
16. **Andrianov, I.** The Verhulst-Like Equations: Integrable ODE and ODE with Chaotic Behavior / I. Andrianov, G. Starushenko, S. Kvitka, L. Khajiyeva // *Symmetry.* – 2019. – V. 11. – № 12. – P. 1446. DOI: 10.3390/sym11121446.
17. **Perc, M.** Forecasting Covid-19 / M. Perc, Miksić N. Gorišek, M. Slavinec, A. Stožer // *Frontiers in Physics.* – 2020. – V. 8. – P. 127. DOI: 10.3389/fphy.2020.00127.
18. **Koltsova, E.M.** Mathematical Modeling of the Spread of COVID-19 in Moscow and Russian Regions / E.M. Koltsova, E.S. Kurkina, A.M. Vasetsky // *arXiv preprint arXiv:2004.10118.* 2020.

19. **Dell'Anna, L.** Solvable delay model for epidemic spreading: the case of Covid-19 in Italy / L. Dell'Anna // arXiv preprint arXiv:2003.13571. 2020.
20. **Gray, A.** A stochastic differential equation SIS epidemic model / A. Gray, D. Greenhalgh, L. Hu, X. Mao, J. Pan // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2011. – V. 71. – № 3. – P. 876-902. DOI: 10.1137/10081856X.
21. **Dieu, N.T.** Classification of asymptotic behavior in a stochastic SIR model / N. T. Dieu, D. H. Nguyen, N. H. Du, G. Yin // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. – 2016. – V. 15. № 2. – P. 1062-1084. DOI: 10.1137/15M1043315.
22. **Choi, S.H.** A multi-stage SIR model for rumor spreading / S. H. Choi, H. Seo, M. Yoo // Discrete & Continuous Dynamical Systems-B. – 2020. – V. 25. – № 6. – P. 2351-2372.
23. **Nguyen, D.H.** Long-Term Analysis of a Stochastic SIRS Model with General Incidence Rates / D.H. Nguyen, G. Yin, C. Zhu // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2020. – V. 80. – № 2. – P. 814-838. DOI: 10.1137/19M1246973.
24. **Yang, Y.** Dynamical analysis of a diffusive SIRS model with general incidence rate / Y. Yang, L. Zou, T. Zhang, Y. Xu // Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B. – 2020. – V. 25. – № 7. – P. 2433-2451. DOI: 10.3934/dcdsb.2020017.
25. **Otunuga, O.M.** Qualitative analysis of a stochastic SEITR epidemic model with multiple stages of infection and treatment / O.M. Otunuga, M.O. Ogunsolu // Infectious Disease Modelling. – 2020. – V. 5. – P. 61-90. DOI: 10.1016/j.idm.2019.12.003.
26. **Cui, J.A.** Global dynamics of an epidemiological model with acute and chronic HCV infections / J.A. Cui, S. Zhao, S. Guo, Y. Bai, X. Wang, T. Chen // Applied Mathematics Letters. – 2020. – V. 103. – P. 106203. DOI: 10.1016/j.aml.2019.106203.
27. **Bjørnstad, O.N.** Modeling infectious epidemics / O.N. Bjørnstad, K. Shea, M. Krzywinski, N. Altman // Nature methods. – 2020. – V. 17. – P. 455-456. DOI: 10.1038/s41592-020-0822-z.
28. **Giordano, G.** Modelling the COVID-19 epidemic and implementation of population-wide interventions in Italy / G. Giordano, F. Blanchini, R. Bruno, P. Colaneri, A. Di Filippo, A. Di Matteo, M. Colaneri // Nature Medicine. – 2020. – V. 26. – P. 855-860. DOI: 10.1038/s41591-020-0883-7.
29. **Nakamura, G.** Confinement strategies in a simple SIR model / G. Nakamura, B. Grammaticos, M. Badoual // arXiv preprint arXiv:2004.09314. 2020.
30. **Maier, B.F.** Effective containment explains subexponential growth in recent confirmed COVID-19 cases in China / B.F. Maier, D. Brockmann // Science. – 2020. – V. 368. – № 6492. – P. 742-746. DOI: 10.1126/science.abb4557.
31. **Barlow, N.S.** Accurate closed-form solution of the SIR epidemic model / N.S. Barlow, S.J. Weinstein // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2020. – V. 408. – P. 132540. DOI: 10.1016/j.physd.2020.132540.
32. **Lopez, V.** The comparison of trends in Spain and the Nederland: a Dynamical compartment model of the transmission of Coronavirus / V. Lopez, M. Čukić // arXiv preprint arXiv:2004.09874. 2020.
33. **Fanelli, D.** Analysis and forecast of COVID-19 spreading in China, Italy and France / D. Fanelli, F. Piazza // Chaos, Solitons & Fractals. – 2020. – V. 134. – P. 109761. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.109761.
34. **Fredj, H.B.** Novel Corona virus Disease infection in Tunisia: Mathematical model and the impact of the quarantine strategy / H.B. Fredj, F. Chrif // Chaos, Solitons & Fractals. – 2020. – V. 138. – P. 109969. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.109969.
35. **Криворотько, О.И.** Математическое моделирование и прогнозирование COVID-19 в Москве и Новосибирской области. / О.И. Криворотько, С.И. Кабанихин, Н.Ю. Зятков, А.Ю. Приходько, Н.М. Прохошин, М.А. Шишленин // arXiv:2006.12619v1 [q-bio.PE]. 2020.
36. **Tsoularis, A.** Analysis of logistic growth models / A. Tsoularis, J. Wallace // Mathematical Biosciences. – 2002. – V. 179. – № 1. – P. 21-55. DOI: 10.1016/S0025-5564(02)00096-2.
37. **Кобзарь, А.И.** Прикладная математическая статистика. / А.И. Кобзарь. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
38. **Consolini, C.** A stretched logistic equation for pandemic spreading / C. Consolini, M. Materassi // Chaos, Solitons and Fractals. – 2020. – V. 140. – P. 110113. DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110113.
39. **Carletti, T.** COVID-19: The unreasonable effectiveness of simple models / T. Carletti, D. Fanelli, F. Piazza // Chaos, Solitons and Fractals. – 2020. – V. 140. – P. 100034.

*Дата поступления
в редакцию: 15.07.2020*

M.V. Kokoulina¹, A.S. Epifanova¹, E.N. Pelinovsky¹⁻³, O.E. Kurkina¹, A.A. Kurkin¹

**ANALYSIS OF CORONAVIRUS DYNAMICS
USING THE GENERALIZED LOGISTIC MODEL**

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev¹
National Research University – Higher School of Economics²
Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences³

Purpose: to analyze the dynamics of COVID-19 development using a generalized stochastic logistic equation to estimate the number of probable peaks in coronavirus incidence and to evaluate the nature of the scatter of the generalized logistic model coefficients.

Design/methodology/approach: we use a logistic model based on a generalized first-order logistic equation. The data on the incidence of coronavirus in different countries are taken from the website of the World Health Organization.

Findings: It is shown that the generalized logistic equation is a good regression model for all considered countries. At the same time, to describe the daily course of the incidence, it is necessary to take into account random factors, which allows us to consider the coefficients of the logistics model as random, or to introduce external forces, making the logistics equation stochastic. Spectral and probabilistic properties of random variations of the logistic equation are determined.

Originality/value: The obtained results may be used for the forecasting of the epidemic characteristics, including COVID-19.

Key words: generalized logistic model, mathematical modeling, COVID-19.