

А.В. Мухин

## ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ TAKAGI-SUGENO ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ РОТОРА В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОДВЕСЕ

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского  
Нижний Новгород, Россия

Представлены результаты решения задачи построения регуляторов по состоянию для системы электромагнитного подвеса на основе применения нечетких моделей *Takagi-Sugeno*. Рассмотрены две задачи: построение стабилизирующих регуляторов и построение оптимальных регуляторов по квадратичному критерию качества. Для вычисления параметров регуляторов использовался аппарат линейных матричных неравенств применительно к нечетким моделям *Takagi-Sugeno*. Для вычисления регуляторов была выведена нечеткая математическая модель объекта, эквивалентная исходной нелинейной модели. Вычисленные регуляторы подставлялись в исходный нелинейный объект. Полученные результаты показали, что с помощью нечетких моделей *Takagi-Sugeno* можно построить как стабилизирующий регулятор, так и оптимальный регулятор по квадратичному критерию качества. Найденные регуляторы обеспечивают стабилизацию ротора в достаточно широком диапазоне начальных отклонений. Сравнительный анализ графиков переходных процессов показал, что регулятор с квадратичным критерием качества обеспечивает более высокое качество стабилизации.

*Ключевые слова:* электромагнитный подвес, ротор, нечеткие модели Takagi-Sugeno, нелинейный объект, стабилизация, оптимальное управление, линейные матричные неравенства, переходные процессы.

### Введение

Принцип действия электромагнитного подвеса основан на явлении магнитной левитации, благодаря которой осуществляется бесконтактное вывешивание ротора в системе магнитных подшипников. Практическое применение последних охватывает целый спектр самых разных сфер промышленности и техники, а также некоторых областей медицины [1-4]. Вследствие привлекательности электромагнитных подшипников для решения целого ряда задач, управление ротором в электромагнитном подвесе представляет важную и актуальную задачу. Реализация управления осуществляется, как правило, путем изменения величины магнитного поля, создаваемого электромагнитом при подаче на его обмотки переменного напряжения. Решению задачи управления, а также связанных с ней вопросов, посвящено немало работ [5-9]. В большинстве из них рассматриваются линеаризованные системы. Математические методы работы с ними достаточно хорошо изучены, имеют солидную теоретическую и практическую базу. Однако, очевидным недостатком линеаризованных моделей является ограниченная применимость, поскольку они работают только в окрестности положения равновесия при небольших начальных отклонениях. Следовательно, они не могут в полной мере пускаться динамику исследуемого объекта.

В настоящей статье представлены результаты синтеза законов управления для нелинейной системы электромагнитного подвеса на основе непрерывных нечетких моделей *Takagi-Sugeno* [10]. Рассматривались задачи синтеза по состоянию, т.е., предполагалось, что значения всех фазовых переменных системы известны в любой момент времени. В качестве метода построения законов управления использовался аппарат линейных матричных неравенств [11-13]. Вопросы применения нечетких моделей *Takagi-Sugeno* для управления нелинейными объектами с помощью линейных матричных неравенств рассмотрены в [14].

### Нечеткая математическая модель

Электромагнитный подвес представляет собой механическую систему, состоящую из вывешиваемого жесткого тела (ротора) и расположенного сверху электромагнита [5]. Ротор находится в поле действия двух сил: силы тяжести и силы магнитного притяжения. Согласно второму закону Ньютона, при равенстве этих сил тело будет находиться в неподвижном состоянии. С математической точки зрения, электромагнитный подвес является нелинейным объектом, описываемым системой дифференциальных уравнений следующего вида [5] (1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(1+x_3)^2}{(1-x_1)^2} - 1 \right], \\ \dot{x}_3 &= -\frac{(1+x_3)}{(1-x_1)} x_2 - a(1-x_1)x_3 + (1-x_1)u, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^{n_x}$  – вектор состояния системы;  $u \in R^{n_u}$  – управление;  $a$  – постоянная величина ( $a = 7,5$ ).

Безразмерная переменная  $x_1$  соответствует вертикальному перемещению ротора,  $x_2$  соответствует скорости перемещения, а  $x_3$  описывает ток в цепи электромагнита. Неустойчивым положением равновесия системы является точка  $x = 0$ .

Выведем эквивалентную модель для системы (1) с помощью нечетких моделей *Takagi-Sugeno*. Непрерывные нечеткие модели *Takagi-Sugeno* в общем виде представляют собой матрично-векторные системы следующего вида [14] (2):

$$\dot{x} = F(\sigma)x + B(\sigma)u, \quad x(0) = x_0, \quad (2)$$

где  $F(\sigma) \in R^{n_x \times n_x}$ ;  $B(\sigma) \in R^{n_x \times n_u}$ ;  $\sigma = \sigma(x) \in R^{n_\sigma}$ .

Элементами матриц  $F(\sigma)$  и  $B(\sigma)$  должны быть непрерывные функции  $\sigma_i(x)$ . Для вывода эквивалентной нечеткой модели выполним следующие преобразования. Введем новую фазовую переменную (3):

$$x_4 = \frac{1+x_3}{1-x_1}. \quad (3)$$

Продифференцировав выражение (3), получим следующее линейное уравнение

$$\dot{x}_4 = \frac{x_3 + x_4 x_2}{1-x_1} = -ax_3 + u, \quad (4)$$

Таким образом, после такого преобразования система уравнений, описывающих электромагнитный подвес, примет следующий вид (4):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2} [x_4^2 - 1], \\ \dot{x}_3 &= -x_4 x_2 - a(1-x_1)x_3 + (1-x_1)u \\ \dot{x}_4 &= -ax_3 + u, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in R^{n_{x^*}}$  – состояние системы;  $u \in R^{n_u}$  – управление.

Переход от (1) к (5) означает отображение вида  $R^{n_x} \mapsto R^{n_{x^*}}$ . Существует и обратное отображение вида  $R^{n_{x^*}} \mapsto R^{n_x}$ . Теперь приведем систему (5) к виду (2). Матрицы  $F(\sigma)$  и  $B(\sigma)$  примут вид (6):

$$F(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix}, \quad B(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

где  $\sigma_1 = \frac{1}{2}(x_4 - \frac{1}{x_4})$ ;  $\sigma_2 = ax_3$ ;  $\sigma_3 = -x_4$ ;  $\sigma_4 = a(x_1 - 1)$ ;  $\sigma_5 = -x_2$ ;  $\sigma_6 = 1 - x_1$ .

Функция  $\sigma_1$  в точке  $x_4 = 0$  терпит разрыв. Для того чтобы уйти от этого, можно сделать следующую замену во втором уравнении системы (5):

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2} [x_4^2 - 1] = \frac{1}{2} (x_4 - 1)(x_4 + 1) = \frac{1}{2} x_4^* (x_4^* + 2). \quad (7)$$

Тогда, опустив звездочку в новой переменной  $x_4^*$ , система (5) примет следующий эквивалентный вид (8):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{2}x_4(x_4 + 2), \\
\dot{x}_3 &= -(x_4 + 1)x_2 - a(1 - x_1)x_3 + (1 - x_1)u, \\
\dot{x}_4 &= -ax_3 + u.
\end{aligned} \tag{8}$$

Зададим подмножество  $\Omega = \{a_{i1} \leq x_i < a_{i2}, i = \overline{1, n_x^*}\} \subseteq R^{n_x^*}$ , в котором будем рассматривать нелинейный объект (5). Возможными положениями равновесия системы (8) могут быть точки  $x_0^1 = (0,0,0,0)$ ,  $x_0^2 = (0,0,0,-2)$ . Однако точка  $x_4 = -2$  не принадлежит области значений переменной  $x_4$ , следовательно, остается только  $x_0^1$ .

Для каждого значения  $\sigma_i$  определим функции принадлежности треугольного вида (9):

$$M_{i1,2} = \frac{\pm\sigma_i \mp \sigma_i^{\min, \max}}{\sigma_i^{\max} - \sigma_i^{\min}}, i = \overline{1, n_\sigma}. \tag{9}$$

Общее количество таких функций равно  $2n_\sigma$ . Область значений каждой функции принадлежности образует свое нормированное нечеткое множество. Значения функций  $\sigma_i(x)$  удобно представить в виде матрицы  $\sigma_{imax, min} \in R^{2 \times n_\sigma}$ .

Теперь сформируем базу нечетких правил для исследуемого объекта (10):

$$\begin{aligned}
R^i: & \text{IF } \sigma_1 \text{ is } M_{11} \text{ and } \dots \text{ and } \sigma_{n_\sigma} \text{ is } M_{n_\sigma 1} \\
& \text{THEN } \dot{x} = A_i x + B_i u,
\end{aligned} \tag{10}$$

где  $R^i$  – нечеткое правило ( $i = \overline{1, r}$ );  $r = 2^{n_\sigma}$  – количество правил;  $A_i \in R^{n_x^* \times n_x^*}$ ,  $B_i \in R^{n_x^* \times n_u}$ .

Каждому правилу соответствует своя линейная подсистема, определяемая матрицами  $A_i$ ,  $B_i$ . Общее количество таких линейных подсистем равно количеству правил  $r$ . Нечеткая модель нелинейной системы (8) представляется как взвешенная сумма всех линейных подсистем (11):

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(\sigma) [A_i x + B_i u], \tag{11}$$

где  $h_i(\sigma) = \prod_{j=1}^{n_\sigma} M_{i1,2}^j(\sigma_j)$  – произведение функций принадлежности.

Таким образом, полученная непрерывная нечеткая модель (11) представляет нелинейный объект (8) на рассматриваемом подмножестве  $\Omega \in R^{n_x^*}$ .

Прежде чем переходить к постановке задачи, несколько упростим модель (8). Наибольшее количество нелинейных функций сосредоточено в третьем уравнении системы (8). Линеаризация этого уравнения позволит существенно сократить количество правил и тем самым, упростить весь дальнейший анализ. После линеаризации этого уравнения в окрестности положения равновесия, система (8) примет вид (12):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{2}x_4(x_4 + 2), \\
\dot{x}_3 &= -x_2 - ax_3 + u, \\
\dot{x}_4 &= -ax_3 + u.
\end{aligned} \tag{12}$$

Тогда матрицы  $F(\sigma)$  и  $B$  запишутся как (13):

$$F(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & -1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где  $\sigma_1 = \frac{1}{2}(x_4 + 2)$ .

Очевидно, что работать с системой (12) значительно проще, нежели с системой (8). Окончательная нечеткая модель нелинейной системы (12) запишется в следующем виде (14):

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r M_i A_i x + B u. \tag{14}$$

### Постановка задач управления

Сформулируем две задачи управления. Первая из них состоит в вычислении нечеткого стабилизирующего регулятора, обеспечивающего асимптотическую устойчивость нечеткой системы (11). Вторая задача заключается в синтезе нечеткого регулятора по квадратичному критерию качества. Для этого введем в рассмотрение целевой выход  $z \in R^{n_z}$  (15):

$$z = Cx + Du, \quad (15)$$

В качестве квадратичный критерия будем рассматривать функционал следующего вида (16):

$$\|z\|^2 = \int_0^\infty (x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + u^2) dt. \quad (16)$$

Соответствующие этому функционалу матрицы  $C$  и  $D$  имеют следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задача 1. Для каждого правила  $i = \overline{1, r}$  найти закон управления следующего вида (17):

$$u(t) = F_i x(t), \quad (17)$$

где  $F_i \in R^{n_u \times n_x}$ .

Полное управление всей системой запишется в виде взвешенной суммы (18):

$$u(t) = \sum_{i=1}^r M_i F_i x(t). \quad (18)$$

Уравнение замкнутой нечеткой системы с учетом (18) примет вид (19):

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r M_i (A_i + B F_i) x. \quad (19)$$

Задача 2. Найти закон управления вида (17), который минимизирует квадратичный функционал (16).

Таким образом, требуется вычислить два регулятора: регулятор стабилизирующего типа и регулятор, доставляющий минимум функционалу (16).

### Синтез законов управления

Для синтеза законов управления использовался аппарат линейных матричных неравенств [11-13]. Воспользуемся результатами, представленными в монографии [11] и распространим эти результаты на случай нечетких систем.

Рассмотрим квадратичную функцию Ляпунова  $V(x) = x^T(t) X x(t)$ . Производная  $V(x)$  в силу системы нечеткой системы (19) равна (20):

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r M_i x^T [(A_i + B F_i)^T X + X(A_i + B F_i)] x. \quad (20)$$

Чтобы замкнутая система (19) была устойчивой, необходимо и достаточно чтобы выполнялись следующие матричные неравенства (21):

$$(A_i + B F_i)^T X + X(A_i + B F_i) < 0, \quad (21)$$

где  $X = X^T > 0$ .

Раскроем скобки и умножим слева и справа неравенства (21) на  $X^{-1} = Y > 0$

$$Y A_i^T + A_i Y + Y F_i^T B^T + B F_i Y < 0. \quad (22)$$

Введем новые матричные переменные  $Z_i = F_i Y$ . Тогда (22) перепишутся в виде линейных матричных неравенств (23):

$$Y A_i^T + A_i Y + Z_i^T B^T + B Z_i < 0. \quad (23)$$

Чтобы нечеткая система (19) была асимптотически устойчивой, должны существовать общая положительно определенная матрица  $Y$  и семейство матриц  $Z_i$ , удовлетворяющих линейным матричным неравенствам (23). Если эти матрицы существуют, то матрицы обратной связи находятся из соотношений (24):

$$F_i = Z_i Y^{-1}. \quad (24)$$

где  $i = \overline{1, r}$ . Выражения (23) представляют собой систему, состоящую из  $r$  линейных матричных неравенств с  $(r + 1)$  матричными переменными.

Для вычисления управления, доставляющего минимум функционалу (16), воспользуемся конечными результатами, изложенными в [11]. Для нечеткой системы (19), общая матрица  $Y$  и семейство матриц  $Z_i$ , должны удовлетворять системе линейных матричных неравенств (25):

$$\begin{pmatrix} YA_i^T + A_i Y + Z_i^T B^T + BZ_i & YC^T + Z_i^T D^T \\ CY + DZ_i & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} Y & I \\ I & \gamma I \end{pmatrix} > 0, \quad (26)$$

где  $i = \overline{1, r}$ . Оптимальное управление по критерию (16) вычисляется путем минимизации параметра  $\gamma$  при ограничениях, заданных в виде системы матричных неравенств (25), (26). Если искомые матрицы существуют и найдены, то матрицы обратной связи вычисляются согласно (24). Полное управление вычисляется по формуле (18).

### Численные результаты

Вычисленные регуляторы поочередно подставлялись в исходный нелинейный объект (1). При переходе к (1) учитывалась введенная при выводе нечеткой модели фазовая переменная  $x_4 = \frac{x_1 + x_3}{1 - x_1}$  и осуществлялось обратное отображение  $R^{n_{x^*}} \mapsto R^{n_x}$ . Для решения системы дифференциальных уравнений использовались одношаговые явные методы Рунге-Кутты четвертого и пятого порядков. Графики переходных процессов в исходной системе с регулятором стабилизирующего типа представлены на рис. 1.

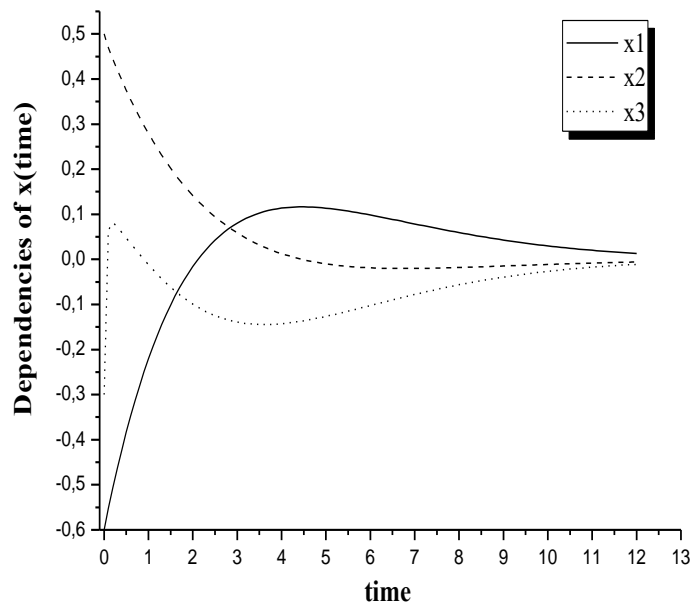


Рис. 1. Переходные процессы в системе с регулятором стабилизирующего типа

Графики переходных процессов в системе с регулятором по квадратичному критерию качества показаны на рис. 2.

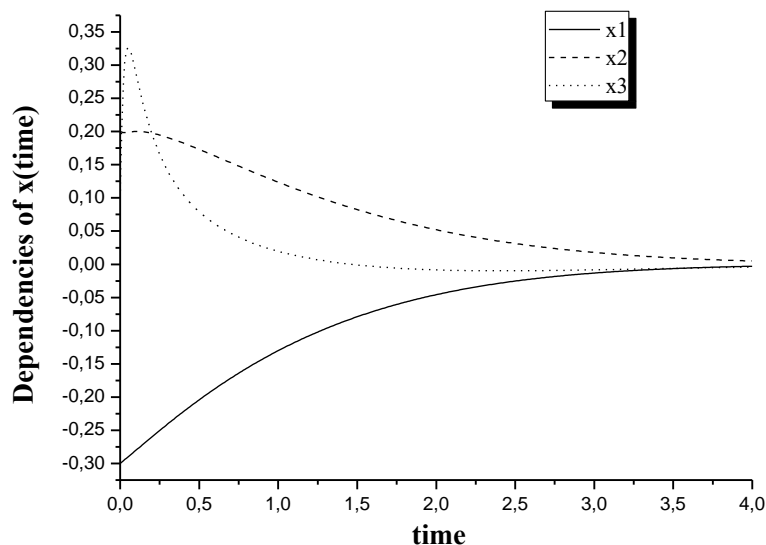


Рис. 2. Переходные процессы в системе с регулятором по квадратичному критерию

Приведенные зависимости свидетельствуют о том, что найденные нечеткие регуляторы стабилизируют исходный нелинейный объект в достаточно широком диапазоне начальных отклонений, несмотря на то, что вычисления выполнялись для упрощенной нелинейной системы. Исходя из сравнительного анализа графиков переходных процессов, можно заключить, что регулятор с квадратичным критерием качества обеспечивает стабилизацию с лучшим качеством переходных процессов.

### Заключение

Представлены результаты численных расчетов регуляторов с использованием нечетких моделей *Takagi-Sugeno* для ротора в системе электромагнитного подвеса. Выведена нечеткая модель подвеса и управления. Полученные результаты численных экспериментов показали, что с помощью нечетких моделей *Takagi-Sugeno* можно построить как стабилизирующий регулятор, так и оптимальный регулятор по квадратичному критерию качества. Найденные регуляторы обеспечивают стабилизацию ротора в достаточно широком диапазоне начальных отклонений. Представленная нечеткая модель объекта, в отличие от линейной, позволяет в более широких диапазонах описывать динамику исследуемого объекта.

Перспективной задачей для дальнейших теоретических исследований может быть применение описанного подхода для управления вращающимся ротором в электромагнитных подшипниках.

*Автор благодарит профессора кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ИТММ Д.В. Баландина за консультацию, ценные и полезные замечания, а также проявленный интерес к работе.*

**Библиографический список**

1. **Zhuravlev, Yu.N.** Active Magnetic Bearings. Theory, Calculation, Application / Yu.N. Zhuravlev. SPb.: Politechnica, 2003.
2. **Schweitzer, G.** Magnetic Bearings. Theory, Design, and Application to Rotating Machinery / G. Schweitzer, E. Maslen. – Berlin: Springer, 2009.
3. **Гринвальд, В.М.** Первый отечественный аппарат вспомогательного кровообращения АВК-Н «СПУТНИК» на основе имплантируемого насоса крови / В.М. Гринвальд, Г.С. Кузьмин, Ю.П. Маслобоев, С.В. Селищев, Д.В. Тельшев // Известия высших учебных заведений. Электроника. – 2015. – Т. 20. – № 5. – С. 516-521.
4. **Masuzawa, T.** Ch. 11: Motor design and impeller suspension / T. Masuzawa, M. Osa, M. Mapley // Mechanical Circulatory and Respiratory Support. Elsevier, 2017. – P. 335-377.
5. **Баландин, Д.В.** Оптимальная стабилизация тела в электромагнитном подвесе без изменения его положения / Д.В. Баландин, Р.С. Бирюков, М.М. Коган, А.А. Федюков // Изв. РАН. ТИСУ. – 2017. – № 3. – С. 12-24.
6. **Gruber, W.** Self-Sensing Active Magnetic Bearing Using 2-Level PWM Current Ripple Demodulation / W. Gruber, M. Pichler, M. Rothbock, W. Amrhein // Proc. 7th Intern. Conf. on Sensing Technology. Wellington, New Zealand, 2013. – P. 591-595.
7. **Gluck, T.** Resistance Estimation Algorithm for Self-Sensing Magnetic Levitation Systems / T. Gluck, W. Kemmetmuller, C. Tump, A. Kugi // Proc. 5th IFAC Symp. on Mechatronic Systems. Boston, USA, 2010. – P. 32-37.
8. **Kumar, V.** LQR Based Optimal Tuning of PID Controller for Trajectory Tracking of Magnetic Levitation System / V. Kumar, J. Jerome // Procedia Engineering. – 2013. – V. 64. – P. 254-264.
9. **Yifei, Yang** Optimal Control and Output Feedback Design Options for Active Magnetic Bearing Spindle Position Regulation / Yifei Yang, Zhu Huangqiu // J. Networks. – 2013. – V. 8. – P. 1624-1631.
10. **Takagi, T.** Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control / T. Takagi, M. Sugeno // IEEE Trans. Systems Man Cybernet. – 1985. – Vol.15. – № 116. – P. 116-132.
11. **Баландин, Д.В.** Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д.В. Баландин, М.М. Коган. – М.: Физматлит, 2007.
12. **Boyd, S.** Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory / S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. – Philadelphia: SIAM, 1994.
13. **Gahinet, P.** The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab / P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, M. Chilali // User's Guide. - Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.
14. **Tanaka, K.** Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach / K. Tanaka, H.O. Wang. – N.Y.: Wiley, 2001.

*Дата поступления  
в редакцию: 01.02.2021*

A.V. Mukhin

## APPLICATION OF TAKAGI-SUGENO FUZZY MODELS FOR ROTOR STABILIZATION IN AN ELECTROMAGNETIC SUSPENSION

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod

**Purpose:** The results of solving the problem of constructing state regulators for an electromagnetic suspension system based on the use of fuzzy Takagi-Sugeno models are presented. Two problems are considered: the construction of a stabilizing regulator and the construction of a regulator based on a quadratic quality criterion. To calculate the parameters of the regulators, we used the apparatus of linear matrix inequalities applied to fuzzy Takagi-Sugeno models. A fuzzy mathematical model of the object is derived that is equivalent to the original nonlinear model. The regulators were calculated for a fuzzy model of the object, and then substituted into the original nonlinear object. It was assumed that the values of all phase variables are known at any given time. The results showed that using fuzzy Takagi-Sugeno models, it is possible to control the rotor stabilization in an electromagnetic suspension in a wide range of initial deviations. A comparative analysis of transient graphs shown that a regulator with a quadratic quality criterion provides a higher quality of stabilization.

**Design/methodology/approach:** The fuzzy mathematical models and methods, linear matrix inequalities techniques and effective convex optimization methods are used. The conditions of tasks are presented in terms of number linear matrix inequalities.

**Findings:** This work shows that by means of Takagi-Sugeno fuzzy models it possible to design the control for a rotor in electromagnetic suspension system with good quality of transients.

**Research limitations/implications:** The results of this work are of great interest for further research on the construction of fuzzy models for rigid rotor, rotating in electromagnetic bearings.

**Originality/value:** In this work, optimal control by means of fuzzy methods for nonlinear objects was realized. To thanks this, it is possible to control the object in a wide range of initial deviations.

**Key words:** electromagnetic suspension, rotor, Takagi-Sugeno fuzzy models, nonlinear object, stabilization, optimal control, linear matrix inequalities, transients.