

УДК 517.977

DOI: 10.46960/1816-210X_2021_2_32

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СТАБИЛИЗАЦИИ ЖЕСТКОГО РОТОРА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОДШИПНИКАХ

А.В. МухинORCID: 0000-0003-2402-7016 e-mail: myhin-aleksey@yandex.ruНациональный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского
Ниžний Новгород, Россия

Рассмотрена задача оптимальной стабилизации жесткого ротора, вращающегося в электромагнитных подшипниках. Для решения задачи формируется линейный стационарный закон управления по принципу обратной связи для линеаризованной системы. Рассмотрены два подхода к решению задачи: стабилизация по состоянию и стабилизация по выходу полного порядка. Результаты, полученные в первом подходе, являются вспомогательными и используются для сопоставительного анализа. Основным результатом, с точки зрения возможности практического использования, получен в рамках второго подхода, где в качестве измеряемых параметров рассматривались токи в цепях электромагнитов. В качестве критерия оптимальности использовалась обобщенная H_∞ -норма линеаризованной системы, позволяющая учесть как внешнее возмущение, так и начальное отклонение ротора. Для вычисления параметров обратной связи использовался аппарат линейных матричных неравенств. Представлены результаты математического моделирования динамики вращающегося ротора. Приведены оценки качества переходных процессов в системе.

Ключевые слова: линейные матричные неравенства, методы выпуклой оптимизации, обобщенная H_∞ -норма, ротор, управление.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Мухин, А.В. Математическое моделирование процесса стабилизации жесткого ротора, вращающегося в электромагнитных подшипниках // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2021. № 2. С. 32-42. DOI: 10.46960/1816-210X_2021_2_32

STABILIZATION PROCESS MATHEMATICAL MODELING FOR RIGID ROTOR THAT ROTATES IN ELECTROMAGNETIC BEARINGS

A.V. MukhinORCID: 0000-0003-2402-7016 e-mail: myhin-aleksey@yandex.ruLobachevsky State University of Nizhny Novgorod
Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. The problem of optimal stabilization of a rigid rotor rotating in electromagnetic bearings is considered. To solve the problem, a linear stationary control law is formed, according to the feedback principle for a linearized system. Two approaches for the problem solution are considered: stabilization on condition, and stabilization on full order output. Results obtained in the first approach are auxiliary and are used for comparative analysis. Basic result, from the viewpoint of the possibility of practical use is obtained within limits of the second approach, where electromagnetic circuit currents were considered as measured parameters. As an optimality criterion, generalized H_∞ -norm of the linearized system was used; it allowed us to take into account both the external excitation and initial deviation of the rotor. To calculate the feedback parameters, the system of linear matrix inequalities was used. Results of rotating rotor dynamics mathematical modeling are presented. Quality estimations of transient phenomena in the system are given.

Key words: linear matrix inequalities, convex optimization methods, generalized H_∞ norm, rotor, control.

FOR CITATION: Mukhin, A.V. Stabilization process mathematical modeling for rigid rotor that rotates in electromagnetic bearings / A.V. Mukhin // Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2021. № 2. P. 32-42. DOI: 10.46960/1816-210X_2021_2_32

Введение

Электромагнитные подшипники представляют большой практический интерес для целого ряда промышленных применений. Преимуществом таких подшипников, в частности, является отсутствие физического контакта и, как следствие, отсутствие механического трения, что, в свою очередь, позволяет существенно увеличить срок эксплуатации и КПД по сравнению с традиционными механическими аналогами. Вместе с тем, одной из наиболее актуальных задач для электромагнитных подшипников является оптимальное управление динамикой ротора. Решению этой задачи посвящено немало количество как отечественных, так и зарубежных работ [1-4]. В большинстве из них рассматриваются линеаризованные системы, а в качестве основного метода синтеза стабилизирующих управлений используется аппарат линейных матричных неравенств.

В настоящей работе представлено решение задачи стабилизации ротора, вращающегося в электромагнитных подшипниках. Основным результатом является решение задачи стабилизации по выходу полного порядка, когда измерению доступна только часть компонентов вектора состояния. В качестве вспомогательной задачи рассматривалась стабилизация ротора по состоянию. В качестве показателя качества переходных процессов использовалась обобщенная H_∞ -норма системы, позволяющая учитывать влияние внешних возмущений и ненулевых начальных условий [1]. Для реализации указанных задач использовались техника линеаризации исходных дифференциальных уравнений, аппарат линейных матричных неравенств [5,6], а также методы теории выпуклой оптимизации, реализованные в виде стандартных команд пакета программ *MATLAB* [7].

Математическая модель вращающегося ротора

Схема, описывающая вращение ротора в магнитном поле, создаваемом четырьмя парами электромагнитов, представлена на рис. 1 [2].

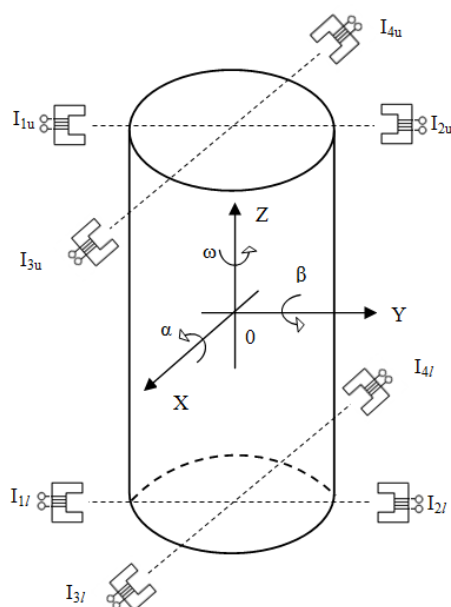


Рис. 1. Схема вращающегося ротора

Fig. 1. Rotating rotor diagram

Предполагается, что сверху и снизу также расположены магниты, которые удерживают ротор в центре системы. Таким образом, механическая система представляет собой вывешенное с помощью эффекта левитации жесткое тело, которое вращается в вертикальной

плоскости. Исходная нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающая такое движение в магнитном поле, записывается в следующем виде [2] (1):

$$\begin{aligned} J\ddot{\alpha} &= -l_0(F_2^u - F_1^u) + l_0(F_2^l - F_1^l) - J_z\omega\dot{\beta}, \\ J\ddot{\beta} &= l_0(F_3^u - F_4^u) - l_0(F_3^l - F_4^l) + J_z\omega\dot{\alpha}, \\ m\ddot{x} &= F_3^u - F_4^u + F_3^l - F_4^l, \\ m\ddot{y} &= F_2^u - F_1^u + F_2^l - F_1^l, \end{aligned} \quad (1)$$

где x, y – координаты центра масс ротора;

α, β – углы поворота ротора относительно осей X и Y, соответственно;

l_0 – расстояние от центра масс ротора до верхнего и нижнего подшипников;

m – масса ротора;

J, J_z – главные моменты инерции ротора;

ω – угловая частота вращения ротора относительно оси Z.

Пары электромагнитных сил, действующих со стороны электромагнитов, определяются следующими соотношениями [2] (2).

$$\begin{aligned} F_2^u - F_1^u &= \frac{L_0 S_0}{2} \left[\frac{I_{2u}^2}{(S_0 - y_u)^2} - \frac{I_{1u}^2}{(S_0 + y_u)^2} \right], \\ F_2^l - F_1^l &= \frac{L_0 S_0}{2} \left[\frac{I_{2l}^2}{(S_0 - y_l)^2} - \frac{I_{1l}^2}{(S_0 + y_l)^2} \right], \\ F_3^u - F_4^u &= \frac{L_0 S_0}{2} \left[\frac{I_{3u}^2}{(S_0 - x_u)^2} - \frac{I_{4u}^2}{(S_0 + x_u)^2} \right], \\ F_3^l - F_4^l &= \frac{L_0 S_0}{2} \left[\frac{I_{3l}^2}{(S_0 - x_l)^2} - \frac{I_{4l}^2}{(S_0 + x_l)^2} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где I_{ij} – сила тока в соответствующем электромагните;

L_0 – индуктивность каждого электромагнита;

S_0 – зазор в электромагните;

x_i, y_i – смещения ротора в электромагнитных подшипниках.

Смещения ротора связаны с переменными x, y, α, β следующими формулами (3):

$$x_u = x + \beta l_0, x_l = x - \beta l_0, y_u = y - \alpha l_0, y_l = y + \alpha l_0. \quad (3)$$

Представим силу тока в каждом подшипнике в виде суммы постоянной (I_0) и переменной (i_k) составляющих (4):

$$\begin{aligned} I_{1u} &= I_0 + i_1, I_{2u} = I_0 - i_1, I_{1l} = I_0 + i_2, I_{2l} = I_0 - i_2, \\ I_{3u} &= I_0 - i_3, I_{4u} = I_0 + i_3, I_{3l} = I_0 - i_4, I_{4l} = I_0 + i_4. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив уравнения (4) в уравнения (2), а затем уравнения (2) в (1), с учетом соотношений (3) получим систему нелинейных дифференциальных уравнений следующего вида (5):

$$\begin{aligned} J\ddot{\alpha} &= l_0 \frac{L_0 S_0}{2} \left[\frac{(I_0 - i_2)^2}{(S_0 - y_l)^2} - \frac{(I_0 + i_2)^2}{(S_0 + y_l)^2} - \frac{(I_0 - i_1)^2}{(S_0 - y_u)^2} + \frac{(I_0 + i_1)^2}{(S_0 + y_u)^2} \right] - J_z\omega\dot{\beta}, \\ J\ddot{\beta} &= l_0 \frac{L_0 S_0}{2} \left[\frac{(I_0 - i_3)^2}{(S_0 - x_u)^2} - \frac{(I_0 + i_3)^2}{(S_0 + x_u)^2} - \frac{(I_0 - i_4)^2}{(S_0 - x_l)^2} + \frac{(I_0 + i_4)^2}{(S_0 + x_l)^2} \right] + J_z\omega\dot{\alpha}, \\ m\ddot{x} &= \frac{L_0 S_0}{2} \left[\frac{(I_0 - i_3)^2}{(S_0 - x_u)^2} - \frac{(I_0 + i_3)^2}{(S_0 + x_u)^2} + \frac{(I_0 - i_4)^2}{(S_0 - x_l)^2} - \frac{(I_0 + i_4)^2}{(S_0 + x_l)^2} \right], \\ m\ddot{y} &= \frac{L_0 S_0}{2} \left[\frac{(I_0 - i_1)^2}{(S_0 - y_u)^2} - \frac{(I_0 + i_1)^2}{(S_0 + y_u)^2} + \frac{(I_0 - i_2)^2}{(S_0 - y_l)^2} - \frac{(I_0 + i_2)^2}{(S_0 + y_l)^2} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

После линеаризации в окрестности положения равновесия (I_0, S_0) и перехода к безразмерным величинам система примет вид (6):

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= \lambda(i_1 - i_2) + 2\lambda\alpha - \rho\dot{\beta}, \\ \ddot{\beta} &= \lambda(i_4 - i_3) + 2\lambda\beta + \rho\dot{\alpha}, \\ \dot{x} &= -(i_3 + i_4) + 2x, \\ \dot{y} &= -(i_1 + i_2) + 2y.\end{aligned}\quad (6)$$

Необходимо дополнить эту систему уравнениями для токов i_k . Для этого запишем уравнения Кирхгофа для электрических цепей электромагнитов в линеаризованном виде (7):

$$\begin{aligned}i_1 &= (\dot{y} - \dot{\alpha}) - \mu i_1 + u_1, \\ i_2 &= -(\dot{y} + \dot{\alpha}) - \mu i_2 + u_2, \\ i_3 &= (\dot{x} + \dot{\beta}) - \mu i_3 + u_3, \\ i_4 &= -(\dot{x} - \dot{\beta}) - \mu i_4 + u_4.\end{aligned}\quad (7)$$

Комбинация систем (6) и (7) дает полную систему дифференциальных уравнений, описывающих динамику ротора, вращающегося в электромагнитных подшипниках.

Для составления системы ОДУ первого порядка введем следующие обозначения: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = x$, $x_4 = y$, $x_5 = \dot{\alpha}$, $x_6 = \dot{\beta}$, $x_7 = \dot{x}$, $x_8 = \dot{y}$, $x_9 = i_1$, $x_{10} = i_2$, $x_{11} = i_3$, $x_{12} = i_4$. Тогда объединенная линейная система ОДУ примет следующий эквивалентный вид (8):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_5, \\ \dot{x}_2 &= x_6, \\ \dot{x}_3 &= x_7, \\ \dot{x}_4 &= x_8, \\ \dot{x}_5 &= \lambda(x_9 - x_{10}) + 2\lambda x_1 - \rho x_6, \\ \dot{x}_6 &= \lambda(x_{12} - x_{11}) + 2\lambda x_2 + \rho x_5, \\ \dot{x}_7 &= -(x_{11} + x_{12}) + 2x_3, \\ \dot{x}_8 &= -(x_9 + x_{10}) + 2x_4, \\ \dot{x}_9 &= (x_8 - x_5) - \mu x_9 + u_1, \\ \dot{x}_{10} &= -(x_8 + x_5) - \mu x_{10} + u_2, \\ \dot{x}_{11} &= (x_7 + x_6) - \mu x_{11} + u_3, \\ \dot{x}_{12} &= -(x_7 - x_6) - \mu x_{12} + u_4.\end{aligned}\quad (8)$$

Параметры, входящие в систему уравнений (8) для рассматриваемого объекта равны: $\lambda=5.12$, $\mu=0.065$ и $\rho=2$.

Перед тем как непосредственно перейти к постановке задачи, необходимо отметить, что измерение всех компонент вектора состояний на практике весьма затруднительно и в ряде случаев может быть технически нереализуемой задачей. В связи с этим, целесообразно рассмотреть наиболее вероятный с практической точки зрения вариант, когда измерению доступна только определенная часть компонент вектора состояний, некоторая выборка. Будем считать, что измерению доступны только токи в цепях электромагнита, т.е., компоненты вектора состояний x_9 , x_{10} , x_{11} , x_{12} . При этих условиях введем для системы (8) уравнения измеряемого выхода для соответствующих компонент вектора состояний (9):

$$y_i = x_{i+8} + w_{i+8}, \quad i = \overline{1,4}, \quad (9)$$

w_i – погрешность измерения i -й компоненты вектора состояний.

Постановка задачи управления

Запишем систему в матрично-векторной форме для управляемой системы с учетом внешних возмущений, к которым относятся отброшенные при линеаризации нелинейные члены, а также погрешности, которые возникают при измерении токов (10):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u, \quad x(0) = x_0 \\ y &= C_2 x + D_2 w, \end{aligned} \quad (10)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_{12})^T \in R^{n_x}$ – вектор-функция состояния системы;

$w = (w_1, w_2, \dots, w_{12})^T \in R^{n_w}$ – вектор-функция возмущений;

$u = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T \in R^{n_u}$ – вектор-функция управления по току;

$y = (y_1, y_2, \dots, y_4)^T \in R^{n_y}$ – измеряемый выход.

Будем считать, что возмущение представляет собой ограниченную в пространстве L_2 функцию с соответствующей нормой (11):

$$\|w\|^2 = \int_0^\infty |w|^2 dt < \infty. \quad (11)$$

Отметим, что оптимальное подавление таких возмущений, а именно возмущений с ограниченной энергией, достигается с использованием H_∞ -управления. Считаем, что оно является непрерывной или кусочно-непрерывной функцией. Также будем считать, что начальное положение ротора отлично от нуля и представляет собой начальное возмущение. Наряду с измеряемым выходом $y(t)$, введем в рассмотрение целевой выход $z \in R^{n_z}$, описываемый следующей формулой (12):

$$z = C_1 x + D_1 u. \quad (12)$$

В качестве количественной характеристики целевого выхода будем считать L_2 -норму (13):

$$\|z\|^2 = \int_0^\infty z^T z dt = \int_0^\infty (x^T C_1^T C_1 x + x^T C_1^T D_1 u + u^T D_1^T C_1 x + u^T D_1^T D_1 u) dt. \quad (13)$$

Минимизация функционала (13) позволяет ограничить не только величину управления, но также и величину вектора состояний. За счет подбора матриц можно варьировать компоненты измеряемого и целевого выходов. Матрицы, входящие в системы уравнений (10)-(12) можно представить в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \text{ где } A_{11} = A_{13} = A_{31} = 0_{4 \times 4}, A_{12} = I_{4 \times 4}, A_{22} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \rho G \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 2\lambda I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 2I_{2 \times 2} \end{pmatrix}, A_{23} = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{32} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{33} = -\mu I_{4 \times 4};$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 8} & 0_{4 \times 4} \\ I_{8 \times 8} & 0_{8 \times 4} \end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix} 0_{8 \times 4} \\ I_4 \end{pmatrix}; C_2 = (0_{8 \times 8} \quad I_{4 \times 4}); D_2 = (0_{8 \times 8} \quad I_{4 \times 4});$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} I_{12} \\ 0_{4 \times 12} \end{pmatrix}; D_1 = \begin{pmatrix} 0_{12 \times 4} \\ I_4 \end{pmatrix}.$$

Квадрат нормы целевого выхода с учетом матриц C_1 и D_1 будет равен (13*):

$$\|z\|^2 = \int_0^\infty (\sum_{i=1}^{12} x_i^2 + \sum_{i=1}^4 u_i^2) dt. \quad (13^*)$$

Отметим, что матрица A не является гурвицевой, следовательно, положение равновесия системы (10) является неустойчивым.

Будем различать два вида возмущений: начальное возмущение, когда $x(0) = x_0 \neq 0$ и внешнее возмущение, определяемое ранее введенным вектором возмущений. Поскольку на объект могут действовать возмущения обоих видов, целесообразно ввести обобщенный уровень гашения возмущений [1] (14):

$$J(u) = \sup_{\|w\|^2 + \rho_1^2 |x_0|^2 \neq 0} \frac{\|z\|}{[\|w\|^2 + \rho_1^2 |x_0|^2]^{\frac{1}{2}}}, \quad (14)$$

где ρ_1 – весовой коэффициент.

Функционал (14) позволяет учесть возмущения обоих видов и поэтому, будет рассматриваться в дальнейшем в качестве основного. Теперь сформулируем две задачи, связанные с этим функционалом. Первая задача синтеза управления в предположении измерения полного состояния системы носит вспомогательный характер. С практической точки зрения эта задача не представляет собой особого интереса и используется в дальнейшем для сопоставительного анализа.

Задача 1. Для системы (10)-(12) найти закон управления в форме линейной обратной связи по состоянию вида (15):

$$u = \theta x, \quad (15)$$

где $\theta \in R^{n_u \times n_x}$.

Предполагается, что в каждый момент времени известны значения всех компонент вектора состояний с высокой степенью точности.

Задача 2. Для системы (10)-(12) найти управление по измеряемому выходу в виде линейного динамического регулятора вида (16):

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r u \\ u &= C_r x_r + D_r y, \end{aligned} \quad (16)$$

где $x_r \in R^{n_x}$ – состояние регулятора.

Систему уравнений (16) можно представить в виде одного эквивалентного уравнения (16*):

$$\dot{u} = C_r A_r x_r + C_r B_r u + D_r \dot{y}. \quad (16^*)$$

Компоненты вектора управления можно представить в следующем виде (17):

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_x} C_r^{ij} x_j + \sum_{j=1}^{n_y} D_r^{ij} y_j, \quad i = \overline{1, n_u}. \quad (17)$$

Результаты именно этой задачи представляют наибольший практический интерес.

Синтез обобщенных H_∞ -оптимальных законов управления

Подход, используемый для решения сформулированных задач, предложен и подробно расписан в работе [5]. Кратко изложим конечные результаты, которые позволят решить поставленные задачи.

Синтез обобщенного H_∞ -управления по состоянию. Уравнение замкнутой системы с учетом введения обратной связи вида $u = \theta x$ примет следующий вид (18):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_2\Theta)x + B_1w, \quad x(0) = x_0 \\ z &= (C_1 + D_1\Theta)x = C_c x, \end{aligned} \quad (18)$$

где $A_c = A + B_2\Theta$ – матрица замкнутой системы.

Для объекта (17) выполняется неравенство $J(u = Qx) < \gamma$ тогда и только тогда, когда линейные матричные неравенства (19):

$$\begin{pmatrix} XA_c + A_c^T X^T & XB_c & C_c^T \\ B_c^T X^T & -\gamma^2 I_{n_w} & 0_{n_w \times n_z} \\ C_c & 0_{n_z \times n_w} & -I_{n_z} \end{pmatrix} < 0, \quad X < \gamma^2 \rho^2 I_{n_x}, \quad (19)$$

разрешимы относительно матрицы $X = X^T$.

Если расписать все составные матрицы, входящие в первое неравенство (19), затем умножить слева и справа на блочно-диагональную матрицу $\text{diag}(X^{-1}, I_{n_w}, I_{n_z})$ и ввести обозначения $X^{-1} = Y$ и $Z = \Theta Y$, а также применить лемму Шура ко второму неравенству, то получим следующие неравенства (20):

$$\begin{pmatrix} AY + Y^T A^T + B_2 Z + Z^T B_2^T & B_1 & Y C_1^T + Z^T D_1^T \\ B_1^T & -\gamma^2 I_{n_w} & 0_{n_w \times n_z} \\ C_1 Y + D_1 Z & 0_{n_z \times n_w} & -I_{n_z} \end{pmatrix} < 0 \quad (20)$$

$$\begin{pmatrix} Y & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \gamma^2 \rho^2 I_{n_x} \end{pmatrix} > 0 \quad (21)$$

Если неравенства (19), (20) разрешимы относительно матриц $Y = Y^T$ и Z , то параметры обобщенного H_∞ -управления по состоянию находятся как $\Theta = ZY^{-1}$. Для определения оптимального значения функционала (14), необходимо найти точную нижнюю грань значений γ , при которой неравенства (20) и (21) разрешимы относительно $Y = Y^T > 0$, Z и $\gamma^2 > 0$. Такая задача успешно решается с использованием стандартной команды пакета MATLAB.

Синтез обобщенного H_∞ -управления по выходу. Объединим уравнения динамического регулятора (16) с соотношениями для управляемого объекта (10) и введем новую переменную $x_c = \text{col}(x, x_r)$. Тогда уравнения замкнутой системы, выраженные через x_c и w , примут вид (22):

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c w, \quad x_c(0) = \text{col}(x_0, 0) \\ z &= C_c x_c + D_c w, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{где } A_c = \begin{pmatrix} A + B_2 D_r C_2 & B_2 C_r \\ B_r C_2 & A_r \end{pmatrix}; B_c = \begin{pmatrix} B_1 + B_2 D_r D_2 \\ B_r D_2 \end{pmatrix}; C_c = (C_1 + D_1 D_r C_2 \quad D_1 C_r); D_c = D_1 D_r D_2.$$

Вычисление матрицы регулятора основывается на условии $J(Q) < \gamma$. Для выполнения этого условия необходимо, чтобы линейные матричные неравенства (23):

$$\begin{pmatrix} XA_c + A_c^T X^T & XB_c & C_c^T \\ B_c^T X^T & -\gamma^2 I_{n_w} & D_c^T \\ C_c & D_c & -I_{n_z} \end{pmatrix} < 0, \quad X_{11} < \gamma^2 \rho^2 I_{n_x}, \quad (23)$$

были разрешимы относительно положительной симметрической блочной матрицы X , которую можно представить в виде $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix}$.

Технология решения состоит в следующем. С помощью серии матричных преобразований, учитывая блочную структуру матрицы X , необходимо привести неравенство (23) к стандартному линейному матричному неравенству следующего вида (24):

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0. \quad (24)$$

Это неравенство разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимы следующие неравенства [5] (25):

$$W_P^T \Psi W_P < 0, \quad W_Q^T \Psi W_Q < 0 \quad (25)$$

где W_P и W_Q – ядра матриц P и Q соответственно, т.е., $PW_P = 0$ и $QW_Q = 0$.

При выполнении всех необходимых матричных преобразований в соответствии с указанной выше технологией неравенства (25) примут вид (26):

$$\begin{pmatrix} N_1^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11}A + A^T X_{11} & X_{11}B_1 & C_1^T \\ B_1^T X_{11} & -\gamma^2 I_{n_w} & 0_{n_w \times n_z} \\ C_1 & 0_{n_z \times n_w} & -I_{n_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} N_2^T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11}A^T + AY_{11} & Y_{11}C_1^T & B_1 \\ C_1 Y_{11} & -I_{n_z} & 0_{n_z \times n_w} \\ B_1^T & 0_{n_w \times n_z} & -\gamma^2 I_{n_w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0 \quad (27)$$

где Y_{11} – левый верхний блок положительной симметрической матрицы $Y = X^{-1}$. Столбцы матриц N_1 и N_2 образуют базисы ядер матриц $(C_2 \ D_2)$ и $(B_2^T \ D_1^T)$ соответственно.

Поскольку матрицы X и Y должны быть взаимобратными, необходимо выполнение следующего неравенства [5] (28):

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & Y_{11} \end{pmatrix} \geq \quad (28)$$

Для существования обобщенного H_∞ -управления по выходу при заданном параметре γ необходимо и достаточно, чтобы неравенства (26)-(28), а также неравенство (29):

$$X_{11} < \gamma^2 \rho^2 I_{n_x}, \quad (29)$$

были разрешимы относительно положительных симметрических матриц X_{11} и Y_{11} .

Если матрицы X_{11} и Y_{11} найдены, матрица X может быть восстановлена по формуле [5] (30):

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{11} - Y_{11}^{-1} \\ X_{11} - Y_{11}^{-1} & X_{11} - Y_{11}^{-1} \end{pmatrix} \quad (30)$$

Наконец, матрица параметров регулятора Θ находится из линейного матричного неравенства (24) с помощью стандартной команды пакета MATLAB. Отметим, что матрица $X \in R^{2n_x \times 2n_x}$ представляет собой матрицу ограничивающего эллипсоида, в котором заключен вектор x_c .

Результаты численных расчетов

Прежде чем приступить к решению поставленных задач, необходимо преобразовать исходную нелинейную систему уравнений (5) к безразмерному виду. Для этого подставим соотношения (3) и (4) в систему (5) и получим следующую систему дифференциальных уравнений (31):

$$\ddot{\alpha} = \frac{\lambda}{4} \left[-\frac{(1-i_1)^2}{(1-y+\alpha)^2} + \frac{(1+i_1)^2}{(1+y-\alpha)^2} + \frac{(1-i_2)^2}{(1-y+\alpha)^2} - \frac{(1+i_2)^2}{(1+y+\alpha)^2} \right] - \rho \dot{\beta},$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\beta} &= \frac{\lambda}{4} \left[\frac{(1-i_3)^2}{(1-x-\beta)^2} - \frac{(1+i_3)^2}{(1+x+\beta)^2} - \frac{(1-i_4)^2}{(1-x+\beta)^2} + \frac{(1+i_4)^2}{(1+x-\beta)^2} \right] + \rho\dot{\alpha}, \\
\ddot{x} &= \frac{1}{4} \left[\frac{(1-i_3)^2}{(1-x-\beta)^2} - \frac{(1+i_3)^2}{(1+x+\beta)^2} + \frac{(1-i_4)^2}{(1-x+\beta)^2} - \frac{(1+i_4)^2}{(1+x-\beta)^2} \right], \\
\ddot{y} &= \frac{1}{4} \left[\frac{(1-i_1)^2}{(1-y+\alpha)^2} - \frac{(1+i_1)^2}{(1+y-\alpha)^2} + \frac{(1-i_2)^2}{(1-y+\alpha)^2} - \frac{(1+i_2)^2}{(1+y+\alpha)^2} \right].
\end{aligned} \tag{31}$$

Тогда нелинейная система дифференциальных уравнений примет следующий вид (32):

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_5, \dot{x}_2 = x_6, \dot{x}_3 = x_7, \dot{x}_4 = x_8, \\
\dot{x}_5 &= \frac{\lambda}{4} \left[-\frac{(1-x_9)^2}{(1-x_4+x_1)^2} + \frac{(1+x_9)^2}{(1+x_4-x_1)^2} + \frac{(1-x_{10})^2}{(1-x_4+x_1)^2} - \frac{(1+x_{10})^2}{(1+x_4+x_1)^2} \right] - \rho x_6, \\
\dot{x}_6 &= \frac{\lambda}{4} \left[\frac{(1-x_{11})^2}{(1-x_3-x_2)^2} - \frac{(1+x_{11})^2}{(1+x_3+x_2)^2} - \frac{(1-x_{12})^2}{(1-x_3+x_2)^2} + \frac{(1+x_{12})^2}{(1+x_3-x_2)^2} \right] + \rho x_5, \\
\dot{x}_7 &= \frac{1}{4} \left[\frac{(1-x_{11})^2}{(1-x_3-x_2)^2} - \frac{(1+x_{11})^2}{(1+x_3+x_2)^2} + \frac{(1-x_{12})^2}{(1-x_3+x_2)^2} - \frac{(1+x_{12})^2}{(1+x_3-x_2)^2} \right], \\
\dot{x}_8 &= \frac{1}{4} \left[\frac{(1-x_9)^2}{(1-x_4+x_1)^2} - \frac{(1+x_9)^2}{(1+x_4-x_1)^2} + \frac{(1-x_{10})^2}{(1-x_4+x_1)^2} - \frac{(1+x_{10})^2}{(1+x_4+x_1)^2} \right], \\
\dot{x}_9 &= (x_8 - x_5) - \mu x_9 + u_1, \\
\dot{x}_{10} &= -(x_8 + x_5) - \mu x_{10} + u_2, \\
\dot{x}_{11} &= (x_7 + x_6) - \mu x_{11} + u_3, \\
\dot{x}_{12} &= -(x_7 - x_6) - \mu x_{12} + u_4.
\end{aligned} \tag{32}$$

Приведем результаты численных расчетов в графическом виде. Расчет включал в себя вычисление матрицы X , вычисление матриц параметров регулятора и замкнутой системы, а затем решение системы (31). Для решения систем дифференциальных уравнений использовались одношаговые явные методы Рунге-Кутты четвертого и пятого порядков.

Обобщенное H_∞ -управление по состоянию. Положим, что здесь и далее весовой коэффициент в функционале равен $\rho_1=0,05$. Подставим найденный закон управления вида (15) в систему (31). Матрица параметров регулятора имеет размерность $\theta \in R^{4 \times 12}$. Графики зависимостей углов поворота ротора относительно осей X и Y $x_1(t)$ и $x_2(t)$ показаны на рис. 2, 3.

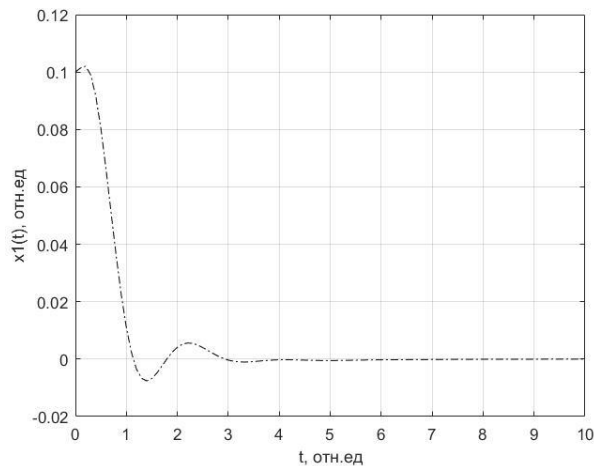


Рис. 2. Зависимость угла поворота относительно оси X от времени

Fig. 2. Angle of rotation relative to X-axis dependence on time

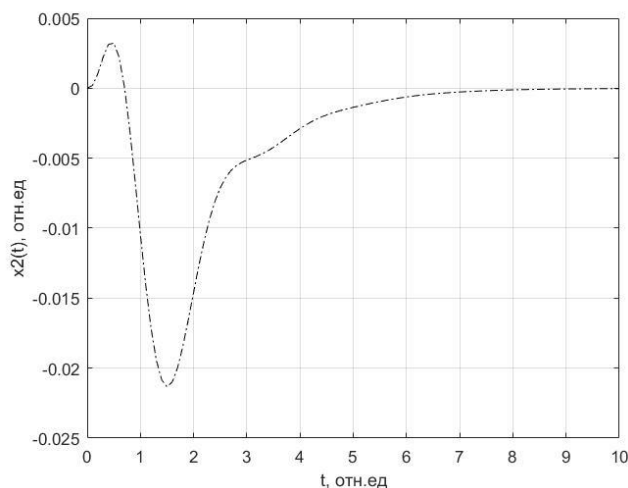


Рис. 3. Зависимость угла поворота относительно оси Y от времени

Fig. 3. Angle of rotation relative to Y-axis dependence on time

Обобщенное H_∞ -управление по выходу полного порядка. Как отмечалось выше, считаем, что измерению доступны только токи в цепях электромагнита. Матрица параметров регулятора представляет собой матрицу $\Theta \in R^{16 \times 16}$, а матрица замкнутой системы $A_c \in R^{24 \times 24}$. Подставим найденный регулятор вида (16) в систему (32). Графики $x_1(t)$ и $x_2(t)$ представлены на рис. 4,5.

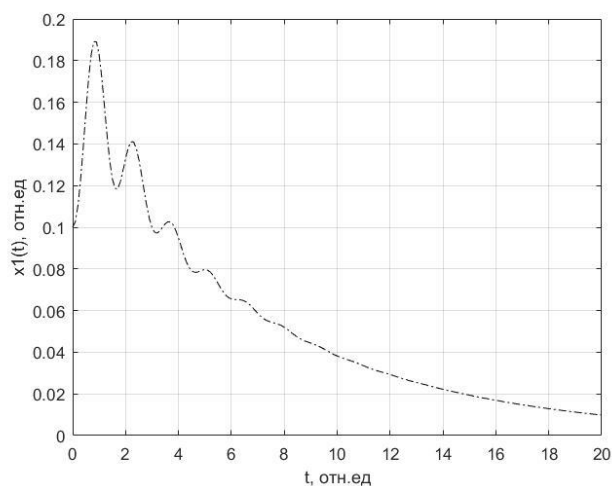


Рис. 4. Зависимость угла поворота относительно оси X от времени

Fig. 4. Angle of rotation relative to X-axis dependence on time

Количественной оценкой качества переходного процесса данного закона управления является отношение действительных частей максимального и минимального собственных чисел матрицы замкнутой системы A_c , т.е., величина $\eta = \frac{Re(\lambda_{max})}{Re(\lambda_{min})}$ [1]. Чем меньше отношение, тем, соответственно, лучше качество переходных процессов. Для данного закона управления имеем $\eta_{out}=7,86$. Аналогичная величина для управления по состоянию составила $\eta_{state}=5,9$. На основании этих значений можно сделать вывод о высоком качестве переходных процессов.

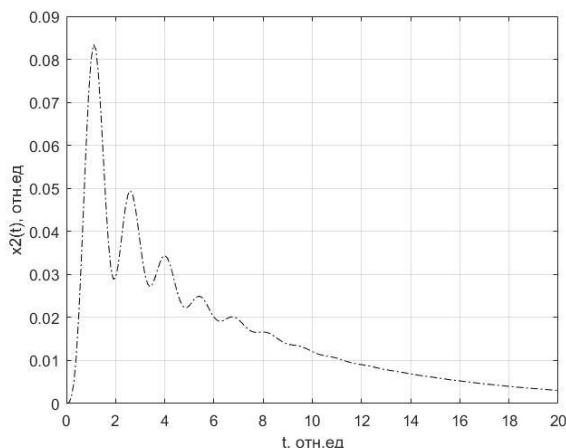


Рис. 5. Зависимость угла поворота относительно оси Y от времени

Fig. 5. Angle of rotation relative to Y-axis dependence on time

Заключение

Рассмотрена задача стабилизации вертикально вращающегося ротора в электромагнитных подшипниках. Построен линейный динамический регулятор полного порядка на основе измерений токов в цепях электромагнитов. Для учета влияния возмущений и погрешности измерений рассматривалась ограниченная в L_2 -норме функция. В качестве показателя качества переходных процессов использовалась обобщенная H_∞ -норма системы, позволяющая учитывать влияние как внешних возмущений, так и ненулевых начальных условий. В качестве основного математического инструмента использовался аппарат линейных матричных неравенств. Проведенные численные эксперименты показали, что, измеряя только токи в цепях электромагнитов, можно синтезировать закон управления по выходу с высоким качеством переходных процессов.

Автор благодарит профессора кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ИТММ Д.В. Баландина за консультацию и ценные замечания.

Библиографический список

1. Баландин, Д.В. Оптимальная стабилизация тела в электромагнитном подвесе без изменения его положения / Д.В. Баландин, Р.С. Бирюков, М.М. Коган, А.А. Федюков // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 3. С. 12-24.
2. Баландин, Д.В. Управление движением вертикального жесткого ротора, вращающегося в электромагнитных подшипниках / Д.В. Баландин, М.М. Коган // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 5. С. 3-17.
3. Davoodi, M. H_2 - and H_∞ -Dynamic Output Feedback Control of a Magnetic Bearing System via LMIs / M. Davoodi, P.K. Sedgh, R. Amirifar // Proc. American Control Conf. Washington, USA, 2008. P. 2522–2527.
4. Yang, Yifei Optimal Control and H_∞ Output Feedback Design Options for Active Magnetic Bearing Spindle Position Regulation / Yifei Yang, Huangqiu Zhu // J. Networks. 2013. V. 8. P. 1624-1631.
5. Баландин, Д.В. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д.В. Баландин, М.М. Коган. – М.: Физматлит, 2007.
6. Boyd, S. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory / S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. Philadelphia: SIAM, 1994.
7. Gahinet, P. The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide / P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, M. Chilali. – Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995.

*Дата поступления
в редакцию: 11.12.2020*