

УДК 517.4

DOI: 10.46960/1816-210X_2021_4_32

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МНОГОУРОВНЕВОЙ ИНИЦИАЛИЗАЦИИ ДЛЯ УСКОРЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

А.В. Стручков

ORCID: 0000-0002-6979-8968 e-mail: andrye134@yandex.ru

Российский федеральный ядерный центр

«Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики»

Саров, Россия

Представлен алгоритм ускорения решения задач аэродинамики на основе геометрической многоуровневой инициализации. Помимо более быстрой сходимости, разработанный алгоритм способствует устойчивому поведению решения на этапе формирования и установления структуры течения. Идея метода состоит в генерации последовательности грубых сеток на основе исходной с решением на каждой из них и интерполяцией полученного решения при переходе на более подробную сетку. После расчета на самой подробной сетке полученное решение интерполируется на исходную сетку, выступая при этом начальной инициализацией на ней. Алгоритм разработан для применения на любых неструктурированных сетках с ячейками произвольной формы. При генерации последовательности грубых сеток в качестве критерия для объединения ячеек в новые контрольные объемы используется соотношение, рассчитываемое через площадь граней и объем ячейки. Процесс объединения ячеек основан на анализе взвешенного графа. Анализ влияния на устойчивость и скорость сходимости решения сделан на тестовых задачах обтекания.

Ключевые слова: цифровизация, аэродинамика, многосеточный решатель, взвешенный граф, критерий объединения, неструктурированная сетка, агломерация.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Стручков, А.В. Применение метода геометрической многоуровневой инициализации для ускорения решения задачи аэродинамики на произвольных неструктурированных сетках // Труды НГТУ им. П.Е. Алексеева. 2021. № 4. С. 32-42. DOI: 10.46960/1816-210X_2021_4_32

APPLICATION OF THE GEOMETRIC MULTILEVEL INITIALIZATION METHOD TO SPEED UP THE SOLUTION OF AERODYNAMICS PROBLEMS ON ARBITRARY UNSTRUCTURED GRIDS

A.V. Struchkov

ORCID: 0000-0002-6979-8968 e-mail: andrye134@yandex.ru

Russian Federal Nuclear Center –

The All-Russian Research Institute of Experimental Physics

Sarov, Russia

Abstract. In this paper we present an algorithm for speeding up the solution to aerodynamics problems based on geometric multilevel initialization. In addition to faster convergence, the developed algorithm contributes to the stable behavior of the solution at the stage of formation and establishment of the flow structure. The idea of the method is to generate a sequence of coarse grids based on the original one with a solution on each of them and interpolation of the resulting solution when switching to a more detailed grid. After calculating on the most detailed grid, the resulting solution is interpolated onto the original grid, while acting as the initial initialization on it. The algorithm is designed for use on any unstructured grids with cells of arbitrary shape. When generating a sequence of coarse grids, the ratio calculated through the area of the faces and the volume of the cell is used as a criterion for combining cells into new control volumes. The process of combining cells is based on the analysis of a weighted graph. The analysis of the effect on the stability and convergence rate of the solution is made on the flow test problems.

Key words: digitalization, aerodynamics, multigrid solver, weighted graph, unification criterion, unstructured grid, agglomeration.

FOR CITATION: A.V. Struchkov. Application of the geometric multilevel initialization method to speed up the solution of aerodynamics problems on arbitrary unstructured grids. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2021. № 4. Pp. 32-42. DOI: 10.46960/1816-210X_2021_4_32

Введение

В настоящее время в рамках численного решения задач аэродинамики наибольшее предпочтение отдается использованию неструктурированных расчетных сеток [1]. В случае промышленно-ориентированных задач, например, расчета аэродинамических характеристик летательных аппаратов, для получения качественного решения размерность расчетных моделей может достигать нескольких десятков миллионов ячеек. Использование сеток большой размерности, естественно, приводит к существенному увеличению времени расчета. Для сокращения временных затрат разработаны специализированные численные методы и алгоритмы; широкое распространение получили алгебраический и геометрический многосеточные методы. Обзор по применению данных методов на практике для решения различных задач можно найти в многочисленных статьях и монографиях [2].

Известно, что при решении задач аэро- и гидродинамики значительная часть времени расчетного шага затрачивается на решение *СЛАУ* (*системы линейных алгебраических уравнений*), полученной в результате аппроксимации уравнений Навье-Стокса неявными методами, которые в настоящее время преобладают при решении промышленно-ориентированных задач на неструктурированных сетях [1]. Так, в [2-3] для ускорения решения СЛАУ при расчете течений жидкости и газа используется алгебраический многосеточный метод. В алгебраическом многосеточном методе построение иерархии вложенных сеток осуществляется на матричном уровне – для объединения в группы у каждой ячейки рассматриваются ее соседи и выбираются ячейки, связь с которыми сильнее. Под связью ячеек подразумевается величина коэффициента для ячейки из матрицы, записанной в формате *LDU* [2], формируемой для решения СЛАУ [2].

Алгебраический многосеточный метод используется на каждом счетном шаге итерационного процесса решения задачи [4-6]. Однако ускорения решения можно добиться введением дополнительной процедуры не в счетный шаг итерационного процесса, а в начальный этап вычислительной процедуры, соответствующий инициализации расчетной области. Это позволяет обеспечить формирование структуры потока вблизи обтекаемого объекта во время распространения по расчетной области начального возмущения. В случае моделирования течений с ударно-волновыми процессами достигается наибольший эффект, выражаемый в увеличении скорости сходимости решения и повышении его устойчивости. Способом введения процедуры инициализации является геометрическая многосеточная инициализация. Идея метода состоит в генерации на основе исходной базовой сетки последовательности грубых сеток, на которых решается рассматриваемая задача до полной сходимости численного решения. Решение задачи начинается с самой грубой сетки в последовательности. За счет того, что огрубленные сетки имеют меньшее число ячеек по сравнению с исходной базовой, решение на них имеет более высокую скорость сходимости. Затем полученное решение интерполируется на более подробную сетку (а в итоге – на исходную базовую сетку) и используется как инициализация при расчете. Таким образом, за счет использования инициализации, максимально близкой к конечному решению, ускоряется процесс сходимости этого решения как на каждой сетке в последовательности, так и в итоге – на базовой сетке.

Такой подход уже применяется для решения задач аэродинамики. Однако в доступных публикациях описание технологии довольно общее и применимо на структурированных сетках. В случае неструктурированных сеток зачастую не уделяется должного внимания описанию алгоритма построения последовательности грубых сеток и методам решения на них, так

как построенные сетки обычно характеризуются ячейками сложной формы, что вызывает трудности с дискретизацией основных уравнений на подобных сетках.

В настоящей работе рассматривается описание вычислительного алгоритма, включающего в себя шаг инициализации на основе геометрического многосеточного метода и его применение при решении задач аэродинамики с использованием неструктурированной расчетной сетки. В предлагаемом алгоритме генерация последовательности грубых сеток рассматривается как задача оптимизации, решаемая с применением соответствующего критерия для объединения ячеек в контрольные объемы грубой сетки. Используется подход на основе взвешенного графа. Представленный метод обеспечивает формирование сеток грубых уровней, решение на которых используется в качестве инициализации при расчете на исходной базовой сетке.

Основные уравнения и метод решения

Для описания нестационарного вязкого течения газа используется система уравнений Навье-Стокса, которая в консервативной форме в декартовых координатах имеет вид (1):

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial (F_e - F_\mu)}{\partial x} + \frac{\partial (G_e - G_\mu)}{\partial y} + \frac{\partial (E_e - E_\mu)}{\partial z} = \mathbf{H}, \quad (1)$$

где \mathbf{W} – вектор консервативных переменных $F_e(\mathbf{W})$, $G_e(\mathbf{W})$, $E_e(\mathbf{W}_e)$, $F_\mu(\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W})$, $G_\mu(\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W})$, $E_\mu(\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W})$ – вектора соответственно конвективных и диффузионных потоков через поверхности ортогональные осям координат, $\mathbf{H}(\mathbf{W}, \nabla \mathbf{W})$ – источник.

В результате дискретизации уравнений (1) формируется система разностных уравнений с разреженной матрицей большого размера, которая решается итерационным методом и является одной из самых затратных процедур с точки зрения вычислительных ресурсов. Для максимально эффективного решения системы разностных уравнений используется алгебраический многосеточный решатель. Полный шаг численной итерационной процедуры представлен на рис. 1.

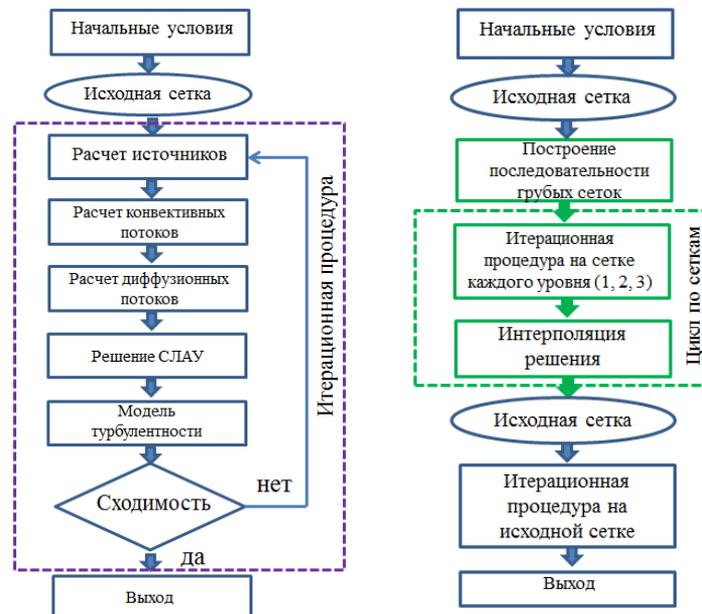


Рис. 1. «Главная» итерационная процедура (слева – без алгоритма инициализации, справа – с алгоритмом инициализации)

Fig. 1. The «main» iterative procedure (on the left – without the initialization algorithm, on the right – with the initialization algorithm)

В соответствии с блок-схемой (рис. 1, слева) перед началом итерационной процедуры на исходной базовой сетке выполняется инициализация расчетной области однородным равномерным полем всех расчетных величин в соответствии с заданными начальными условиями. Далее выполняется расчет источников, конвективных и диффузионных потоков, а также расчет уравнений модели турбулентности. Итерационный процесс продолжается до достижения сходимости численного решения. Как уже отмечалось, алгоритм многосеточной инициализации предполагает построение последовательности грубых сеток на основе исходной базовой и последовательное решение (получение конечного сошедшегося численного решения) на каждой из них, начиная с самой грубой. При этом полученное решение используется в качестве инициализации при переходе к более подробной сетке. Поэтому для реализации алгоритма многосеточной инициализации необходима модификация счетного алгоритма. Модификация заключается в добавлении двух основных шагов.

Первый шаг – это введение перед итерационной процедурой решения алгоритма построения последовательности грубых сеток на основе исходной базовой сетки. Количество грубых сеток предполагается равным трем (алгоритм построения грубой сетки на основе исходной описан ниже) – третьего, второго и первого уровней. Сетка третьего уровня является самой грубой, состоит из контрольных объемов с максимальным числом ячеек исходной сетки. Самая подробная сетка в последовательности – сетка первого уровня.

Второй шаг – выполнение итерационной процедуры и получение конечного решения на каждой из построенных сеток, с интерполяцией решения при переходе от сетки к сетке (интерполяция осуществляется простым переносом сеточных массивов при переходе от грубой к более подробной сетке). Блок-схема численного метода с введением новых алгоритмов представлена на рис. 1 справа.

Алгоритм построения последовательности грубых сеток

Построение последовательности грубых сеток выполняется на основе взвешенного графа, соответствующего исходной сетке. Взвешенный граф строится по следующим правилам. Каждой ячейки ставится в соответствие вершина графа. Две вершины графа соединены через ребро, если соответствующие ячейки сетки разделены общей гранью. Пример фрагмента трехмерной сетки и соответствующий ей взвешенный граф представлен на рис. 2.

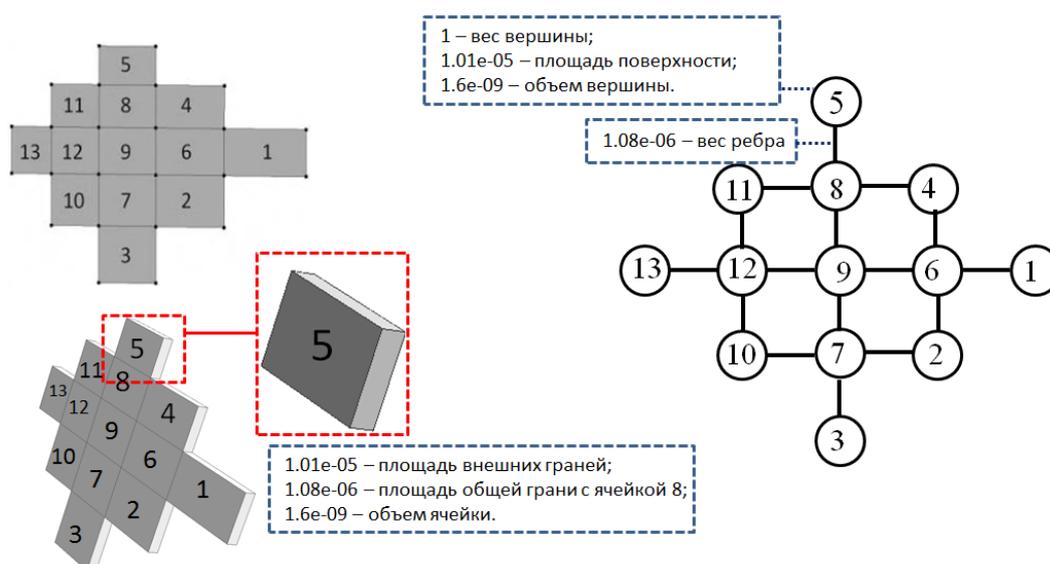


Рис. 2. Сетка и соответствующий ей взвешенный граф

Fig. 2. The grid and its corresponding weighted graph

Каждую вершину графа характеризуют три значения – вес вершины, площадь поверхности вершины и объем вершины. Вес вершины характеризует количество исходных ячеек сетки, образующих данный контрольный объем. Изначально вес каждой вершины графа исходной сетки равен одному. По мере огрубления сетки значение весов для вершин обновляются и становятся равными числу ячеек, образующих данный контрольный объем. Площадь поверхности вершины характеризует площадь поверхности, не используемой совместно с другими контрольными объемами, т.е. являющейся внешней границей сетки. Объем вершины графа соответствует контрольному объему. Кроме того, каждое ребро взвешенного графа имеет вес, характеризующий площадь поверхности, разделяющей два контрольных объема. Таким образом, взвешенный граф содержит всю информацию необходимую для формирования контрольного объема грубой сетки. Далее на основе алгоритма агломерации, с использованием взвешенного графа, выполняется построение последовательности грубых сеток, отличающихся друг от друга максимальным числом ячеек исходной сетки, используемых для объединения в новые контрольные объемы.

В алгоритме агломерации (agglomeration method) производится слияние контрольных объемов подробной сетки, имеющих общую грань, в контрольный объем грубой сетки (full coarsening). Для улучшения качества сеток на размер контрольных объемов грубой сетки накладываются дополнительные ограничения. Наиболее важным ограничением является размер и форма контрольного объема, полученного в результате слияния нескольких соседних контрольных объемов подробной сетки. Для преодоления проблем, связанных с дискретизацией основных уравнений (1) на грубых сетках, при формировании контрольного объема оценивают его меру качества. Для контрольного объема произвольной неструктурированной сетки меру качества A , можно вычислить, используя геометрические параметры ячейки – площади сторон и объем. В численном виде данная мера имеет следующее выражение (2):

$$A = S^{3/2}/V, \quad (2)$$

где S – площадь сторон контрольного объема, V – объем.

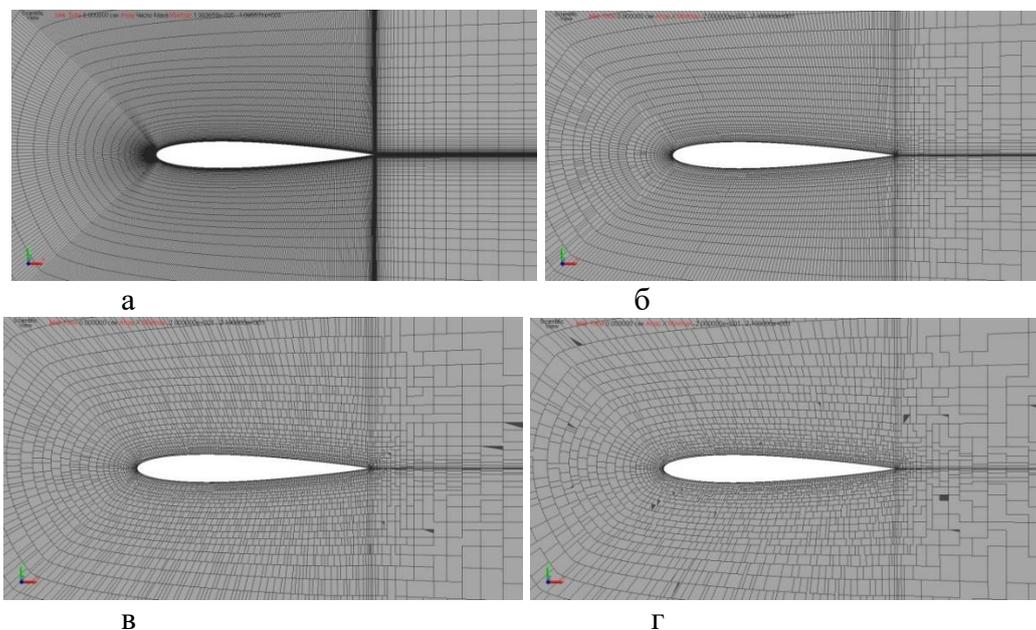


Рис. 3. Последовательность сеток, построенная при помощи метода агломерации:
а – исходная, б – 1-го уровня, в – 2-го уровня, г – 3-го уровня

Fig. 3. A sequence of grids constructed using the agglomeration method:
а – initial, б – 1st level, в – 2nd level, г – 3rd level

Контрольный объем считается хорошо сформированным, если он является максимально компактным, т.е. отношение суммы площадей граней к объему является минимальным. Последовательность сеток различной разрешающей способности, построенная при помощи метода агломерации, для профиля крыла *NACA0012* приводится на рис. 3. Для первого уровня объединение в новый контрольный объем выполняется по 4 ячейки, для второго уровня – по 8, для третьего уровня – по 16. Исходная сетка наилучшей разрешающей способности содержит 157 914 ячеек (фрагмент а). При переходе к грубым сеткам число ячеек уменьшается примерно в 4 раза (фрагмент б, 41907 ячеек), в 8 раз (фрагмент в, 21529 ячеек) и в 16 раз (фрагмент г, 11022 ячеек), а форма ячеек сетки становится более сложной.

На рис. 4 показано решение, полученное на последовательности грубых сеток.

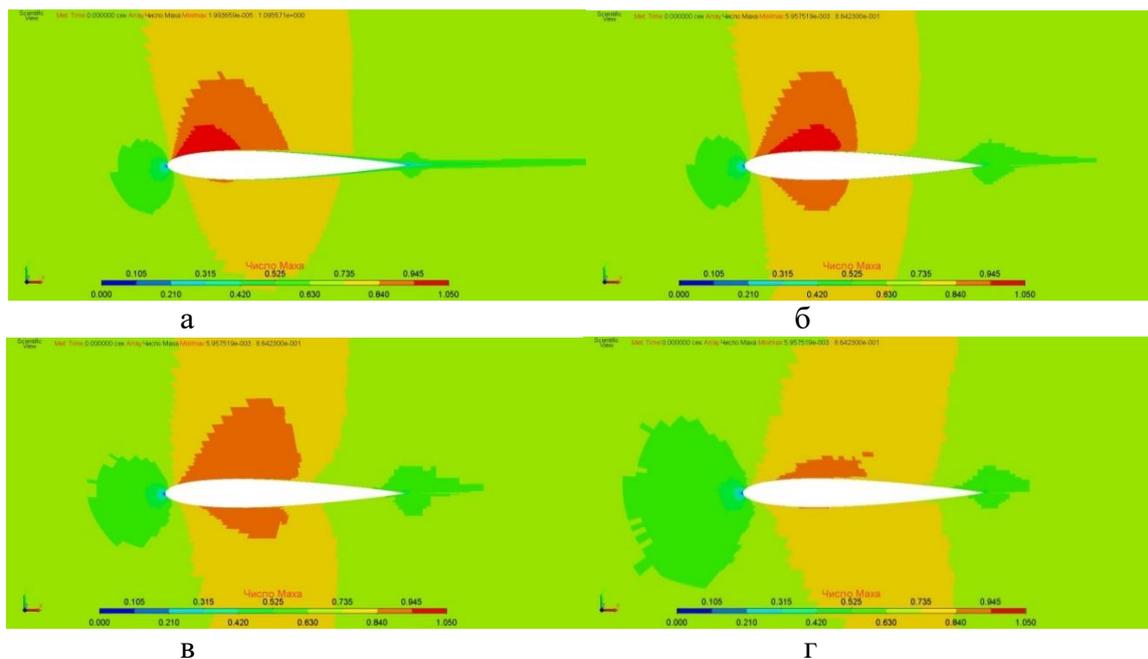


Рис. 4. Решение, поле распределение числа Маха, полученное на сетках:
а – исходная, *б* – 1-го уровня, *в* – 2-го уровня, *г* – 3-го уровня

Fig. 4. Solution, the Mach number distribution field obtained on grids:
a – initial, *b* – 1st level, *b* – 2nd level, *d* – 3rd level

Таким образом, применение шага многосеточной инициализации позволяет выбрать приближение численного решения, обеспечивающее более быстрый и устойчивый процесс сходимости численного решения, что показано далее.

Численные эксперименты

Описанная физико-математическая модель реализована в пакете программ ЛОГОС — отечественном программном продукте, предназначенном для решения трехмерных задач теплопереноса, аэродинамики и гидродинамики на параллельных ЭВМ. Пакет программ ЛОГОС ориентирован на решение задач вычислительной гидродинамики на произвольных неструктурированных сетках и успешно прошел верификацию на серии различных гидродинамических задач, включая расчеты турбулентных и геофизических течений.

Течение в канале с клином

Для исследования зависимости скорости сходимости численного решения от использования геометрической многосеточной инициализации рассматривается задача моделирования сверхзвукового течения в канале с клином. Данная задача имеет аналитическое решение и является известным тестом для верификации численных схем и алгоритмов. По условию задачи во входном сечении канала (рис. 5) задается статическое давление 101325 Па, температура $T=300^\circ\text{ К}$ и скорость потока 697,52 м/с, что соответствует числу Маха 2. Исходная сетка состоит из 95 000 ячеек (рис. 6).



Рис. 5. Схема задачи

Fig. 5. Task diagram

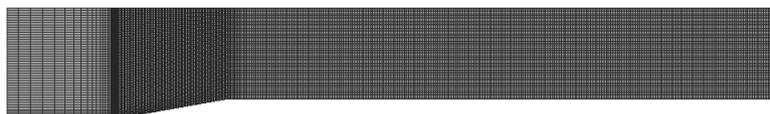


Рис. 6. Расчетная сетка

Fig. 6. Calculation grid

При решении задачи использовался алгоритм геометрической многосеточной инициализации, в результате работы которого было получено следующее приближение решения (рис. 7). В канале формируется ударно-волновая структура, распространяющаяся по его длине. Однако сеточного разрешения не хватило, чтобы сохранить интенсивность ударной волны, в результате чего в конце канала она была «размыта».

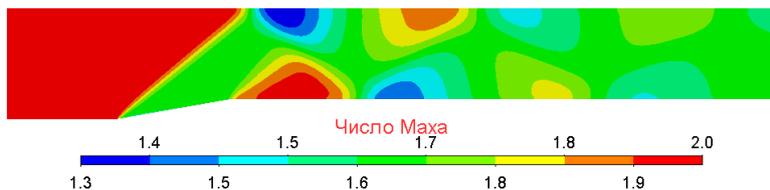


Рис. 7. Поле распределения числа Маха (решение, начальная инициализация)

Fig. 7. Mach number distribution field (solution, initial initialization)

Далее полученное решение использовалось как инициализация при расчете на исходной сетке. В результате было получено решение, показанное на рис. 8. Можно отметить, что инициализация и конечное решение имеют одинаковую структуру течения (система ударных волн, отразившихся от стенок канала) и отличаются лишь интенсивностью ударно-волновой структуры, что объясняется сеточным разрешением.

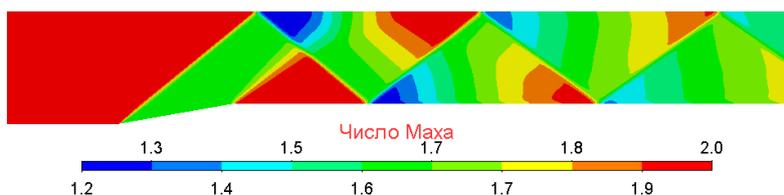


Рис. 8. Поле распределения числа Маха (конечное решение)

Fig. 8. Mach number distribution field (solution, final solution)

Оценим влияние инициализации на скорость сходимости решения. Для этого сравним график (рис. 9) установления величины расхода через выходную границу канала в случае использования алгоритма геометрической инициализации перед началом решения и без использования такового.

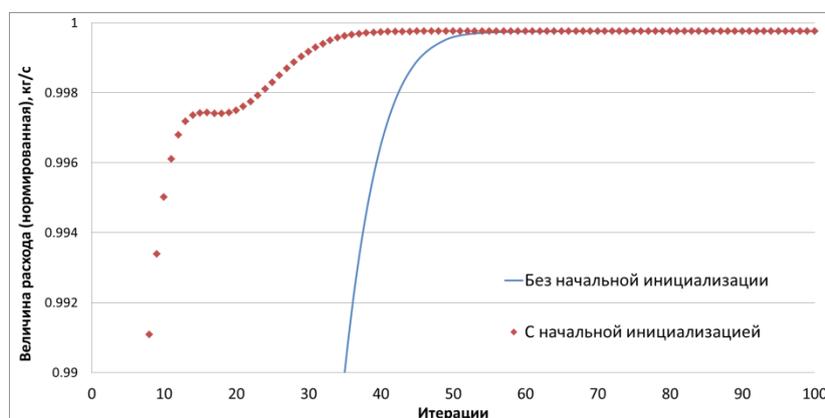


Рис. 9. График сходимости величины расхода

Fig. 9. Flow rate convergence graph

В случае использования инициализации решение сошлось за 30 итераций, в то время как без нее – примерно за 60 итераций. Как отмечалось выше, задача является простым тестом для верификации численных схем и алгоритмов и характеризуется быстрым процессом сходимости. Именно поэтому в данной задаче разница в скорости сходимости полностью нивелируется затраченным временем на выполнение алгоритма многосеточной инициализации. Можно сделать вывод, что инициализация положительно влияет на скорость сходимости численного решения и при одинаковых параметрах решателя уменьшает число итераций для его получения.

Гиперзвуковое обтекание конуса

Для демонстрации полной возможности алгоритма многосеточной инициализации в части ускорения сходимости численного решения и повышения его устойчивости рассматривается задача обтекания конуса гиперзвуковым потоком вязкого сжимаемого газа. Для постановки численного эксперимента на входной границе области обтекания (рис. 10) задается статическое давление 4.5 Па, температура $T=216^\circ\text{K}$ и скорость потока, равная числу Маха 7. Поверхность конуса считается твердой стенкой. Число ячеек в расчетной сетке составляет 557039.

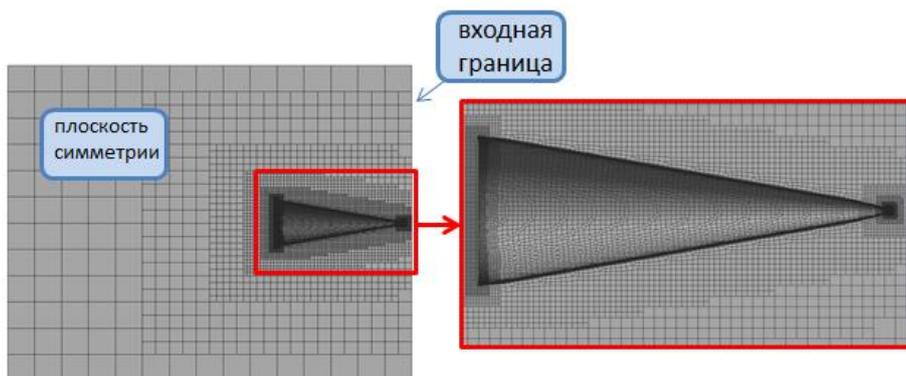


Рис. 10. Общий вид расчетной области

Fig. 10. General view of the calculation area

В результате применения алгоритма многосеточной инициализации было получено приближение решения, показанное на рис. 11.

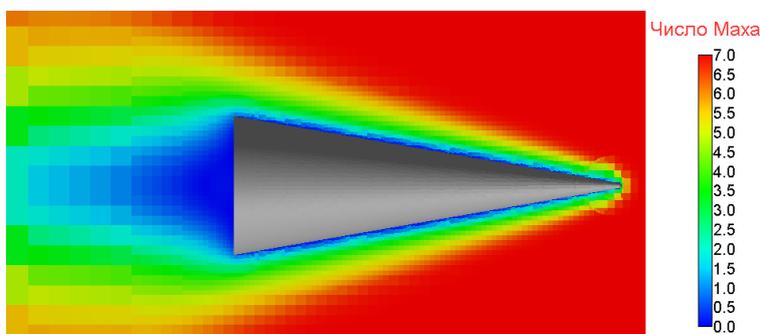


Рис. 11. Поле числа Маха (инициализация)

Fig. 11. Mach number field (initialization)

Начальное возмущение, заданное на внешней границе, прошло расчетную область, и вблизи обтекаемого конуса сформировалась структура течения. Однако, как и в предыдущем примере, сеточного разрешения грубых сеток не хватило для более детального и качественного разрешения всех структур. Например, в донной области наблюдаются достаточно «размытые» отрывные зоны. Далее полученное решение использовалось как инициализация при расчете на исходной сетке. В результате было получено следующее решение (рис. 12).

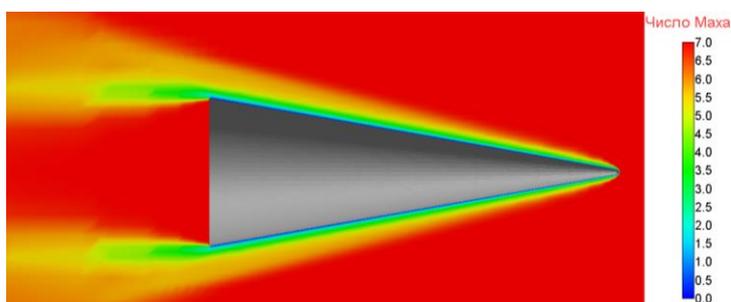


Рис. 12. Поле распределения числа Маха (конечное решение)

Fig. 12. Mach number field (final solution)

Можно отметить, что инициализация и конечное решение имеют одинаковую структуру течения, отличаясь лишь интенсивностью ударно-волновой структуры и их качеством разрешения. Оценим скорость сходимости решения в задаче с использованием инициализации и без нее. Для этого сравним график (рис. 13) сходимости величины силы лобового сопротивления.

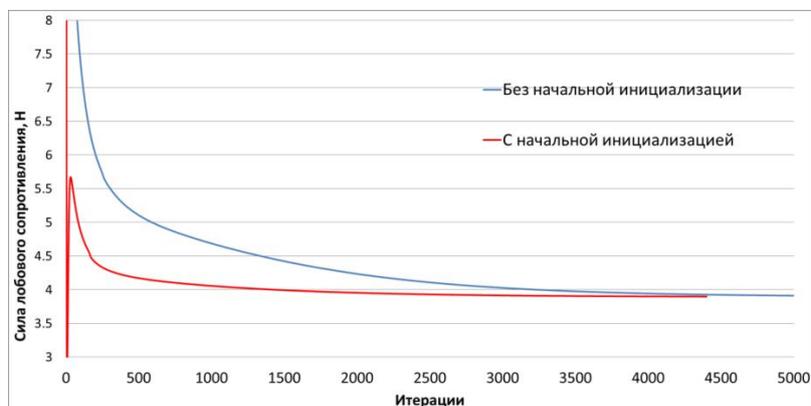


Рис. 13. График сходимости силы лобового сопротивления

Fig. 13. Graph of the convergence of the drag force

Оба решения сходятся к одному значению, однако в случае использования инициализации решение сошлось за 3000 итераций, в то время как без нее — примерно за 4000 итераций. В табл. 1 представлена оценка времени при решении данной задачи в обоих вариантах.

Таблица 1.

Оценка времени при решении задачи

Table 1.

Estimation of time when solving a problem

Способ решения	Время начальной инициализации, с	Число итераций	Общее время, с (время одной итерации 0,65 с)
Без начальной инициализации	—	4000	2600
С начальной инициализацией	45,55	3000	1995,55

Таким образом, с применением многосеточной инициализации удалось сократить время решения задачи на ~23 %. Кроме того, применение инициализации позволило вести счет с максимальным начальным значением числа Куранта, что говорит о повышении устойчивости численного решения. Без использования алгоритма значение числа Куранта приходится увеличивать постепенно в процессе счета задачи. Следует отметить, что использование алгоритма многосеточной инициализации не вносит погрешности в решение, о чем говорит график сходимости силы лобового сопротивления (рис. 13).

Заключение

Представлен алгоритм построения последовательности грубых сеток и используемая математическая модель. Формирование новых контрольных объемов происходит на основе взвешенного графа, содержащего необходимую информацию об элементах сетки. В качестве критерия для объединения ячеек в контрольные объемы рассматривается отношение площади

к объему. Алгоритм протестирован на примере решения задач сверх- и гиперзвукового течения. Показано, что для рассматриваемой задачи применение многосеточной технологии может сократить время решения на 23 %.

Библиографический список

1. **Козелков, А.С.** Исследование потенциала суперкомпьютеров для масштабируемого численного моделирования задач гидродинамики в промышленных приложениях / А.С. Козелков, В.В. Курулин, С.В. Лашкин, Р.М. Шагалиев, А.В. Ялозо // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2016. Т. 56. № 8. С. 1524-1535.
2. **Волков, К.Н.** Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках / К.Н. Волков, Ю.Н. Дерюгин, В.Н. Емельянов, А.Г. Карпенко, А.С. Козелков, И.В. Тетерина. – М.: Физматлит, 2013, 536 с.
3. **Козелков, А.С.** Расчетные исследования аэродинамических характеристик сверхзвукового самолета на крейсерских режимах полета / А.С. Козелков, А.В. Корнев, Д.Ю. Стрелец, И.А. Танненберг, А.А. Останко // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2017. №6. С. 17-21.
4. **Moinier, P.** Edge-based multigrid and preconditioning for hybrid grids / P. Moinier, J-D. Muller, M.B. Giles // AIAA Journal. 2002. v. 40. №10. P. 1954-1960.
5. **Mavriplis, D.J.** An assessment of linear versus nonlinear multigrid methods for unstructured mesh solvers / D.J. Mavriplis // Journal of Computational Physics. 2002. Vol. 175. No. 1. P. 302-325.
6. **Trottenberg, U.** Multigrid / U. Trottenberg, C. Oosterlee, A. Schuller. – London: Academic Press, 2001. 588 p.

*Дата поступления
в редакцию: 03.08.2021*