

УДК 51-74

DOI: 10.46960/1816-210X_2023_2_14

ОЦЕНКА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

А.А. ПоповORCID: 0000-0002-0598-5203 e-mail: popov@dpingtu.ruНижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
(Дзержинский политехнический институт)*Дзержинск, Россия***О.Н. Косырева**ORCID: 0000-0003-2126-3275 e-mail: lelia7@list.ruДзержинский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации*Дзержинск, Россия***С.А. Добротин**ORCID: 0000-0001-6925-2693 e-mail: zavkaf_sgpd@dzr.ranepa.ruДзержинский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации*Дзержинск, Россия*

Впервые при проведении расчетов неопределенности результатов косвенных измерений предложено рассматривать остаточный член формулы Тейлора как неисключенную систематическую погрешность. В соответствии с этим положением для данного вида измерений сформулировано условие пренебрежения остаточным членом. В случае невозможности данного пренебрежения предложена формула расчета расширенной неопределенности, учитывающая его наличие. Записана формула расчета остаточного члена в форме Лагранжа для случая отклонений входных переменных в виде расширенных неопределенностей. Для случая модельного одномерного уравнения измерения исследовано изменение остаточного члена. В соответствии с полученными результатами предложен алгоритм расчета расширенной неопределенности результата косвенных измерений. По данным, приведенным в ГОСТ 34100.3-2017, выполнен расчет стандартной неопределенности результата измерения в соответствии с разработанным алгоритмом. Выявлены неточности, допущенные в некоторых нормативных документах по оценке неопределенности результатов косвенных измерений.

Ключевые слова: косвенные измерения, расширенная неопределенность, системный анализ, формула Тейлора, остаточный член.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Попов, А.А. Оценка неопределенности результатов косвенных измерений по результатам системного анализа остаточного члена формулы Тейлора / А.А. Попов, О.Н. Косырева, С.А. Добротин // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2023. № 2. С. 14-29. DOI: 10.46960/1816-210X_2023_2_14

ESTIMATION OF INDIRECT OBSERVATION UNCERTAINTY ACCORDING TO TAYLOR REMAINDER SYSTEM ANALYSIS

A.A. PopovORCID: 0000-0002-0598-5203 e-mail: popov@dpingtu.ruNizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev
(Dzerzhinsk Polytechnic Institute)*Dzerzhinsk, Russia*

O.N. Kosyreva

ORCID: 0000-0003-2126-3275 e-mail: lelia7@list.ru

The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
(The Presidential Academy, RANEPА), Dzerzhinsky branch
Dzerzhinsk, Russia

S.A. Dobrotin

ORCID: 0000-0001-6925-2693 e-mail: zavkaf_sgpд@dzr.ranepa.ru

The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
(The Presidential Academy, RANEPА), Dzerzhinsky branch
Dzerzhinsk, Russia

Abstract. For the first time, Taylor remainder is proposed to be considered during estimation of indirect observation uncertainty as a residual bias. According to this statement, for this type of measurement, the authors lay down a condition for neglecting a remainder. In case that neglecting a remainder is impossible, an extended uncertainty calculation formula is proposed, that takes its presence into account. A formula for remainder calculation in Lagrangian form is given for a case of deviation in input variables in the form of extended uncertainties. For the first time, Taylor remainder is proposed to be considered during estimation of indirect observation uncertainty as a residual bias. According to this statement, for this type of measurement, the authors lay down a condition for neglecting a remainder. In case that neglecting a remainder is impossible, an extended uncertainty calculation formula is proposed, that takes its presence into account. A formula for remainder calculation in Lagrangian form is given for a case of deviation in input variables in the form of extended uncertainties. The remainder change is investigated for a case of model one-dimensional measurement equation. According to the observations, an algorithm for calculation of extended indirect observation uncertainty is proposed. According to the developed algorithm, calculation of indirect observation uncertainty is conducted based on the example given in GOST 34100.3-2017. Some reference documents on estimation of indirect observation uncertainty demonstrate ambiguities.

Key words: indirect observations, extended uncertainty, system analysis, Taylor formula, remainder.

FOR CITATION: A.A. Popov, O.N. Kosyreva, S.A. Dobrotin. Estimation of indirect observation uncertainty according to Taylor remainder system analysis. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2023. № 2. Pp. 14-29. DOI: 10.46960/1816-210X_2023_2_7

Оценка неопределенности результатов измерений является обязательным атрибутом процесса, обеспечивающим достоверность и воспроизводимость полученных результатов. Вследствие этого необходимость ее определения отражена во многих нормативных документах в области метрологии [1-3]; базовые принципы представлены в [4], а реализующий их метод – в [5].

Результат косвенных измерений рассчитывается по уравнению измерения:

$$y = f(X), \quad (1)$$

где f – функциональная зависимость, связывающая выходную и входные величины; X – вектор входных величин.

Вектор входных величин определяется своими компонентами:

$$X = (x_1, \dots, x_m)^T, \quad (2)$$

численное значение которых получается в результате прямых измерений, либо берется из сторонних источников информации. Таковыми могут быть свидетельства о поверке средств измерений, справочные данные и т.п.

Для нахождения стандартной неопределенности результата косвенных измерений проводится преобразование уравнения измерения (1) с использованием формулы Тейлора:

$$f(X) = P_n(X) + R_n(X), \quad (3)$$

где $P_n(X)$ – многочлен n -го порядка; $R_n(X)$ – остаточный член.

При этом используется многочлен первого порядка в точке оценки математических ожиданий:

$$\mu_y = f(\mu_i), \quad (4)$$

где μ_y и μ_i – соответственно математические ожидания величин y и x_i .

Линеаризация формулы (1) приводит к формуле:

$$y = f(\mathbf{M}) + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{M}} \cdot (x_i - \mu_i) \right), \quad (5)$$

где \mathbf{M} – вектор математических ожиданий входных величин x_i .

$$\mathbf{M} = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T, \quad (6)$$

Перенос в формуле (5) слагаемого $f(\mathbf{M})$ в левую часть, возведение левой и правой частей равенства в квадрат и нахождение математического ожидания от левой и правой частей приводит к следующей последовательности формул:

$$y - f(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{M}} \cdot (x_i - \mu_i) \right), \quad (7)$$

$$E((y - \mu_y)^2) = E \left(\left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{M}} \cdot (x_i - \mu_i) \right) \right)^2 \right), \quad (8)$$

$$u^2(y) = E \left(\left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{M}} \cdot (x_i - \mu_i) \right) \right)^2 \right), \quad (9)$$

где $u^2(y)$ – дисперсия результата косвенных измерений.

Применяя известную формулу сокращенного умножения

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_i \cdot a_j, \quad (10)$$

к формуле (9), получаем:

$$u^2(y) = E \left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{M}} \cdot (x_i - \mu_i) \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{M}} \cdot (x_i - \mu_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{M}} \cdot (x_j - \mu_j) \right), \quad (11)$$

Раскрытие скобок в правой части равенства (11) и взятие квадратного корня от обеих частей равенства приводит к формуле, используемой для расчета стандартной неопределенности результата измерений:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot K(x_i, x_j)}, \quad (12)$$

где $u^2(x_i)$ – дисперсия входной величины x_i ; $K(x_i, x_j)$ – ковариация входных величин x_i и x_j .

Данная формула записана в таком виде, например, в стандарте [5], однако в стандарте [6, Приложение А] сомножитель «2» у второго слагаемого отсутствует. Разница представления формул определяется различием индексов суммирования. Обе формулы являются правильными, однако представление в виде формулы (12) является в практическом плане более простым и понятным.

Наиболее распространенным способом представления результата измерения с учетом его неопределенности является следующая форма [7]:

$$y = \bar{y} \pm U(y), \quad (13)$$

где \bar{y} – значение измеряемой величины, осредненной по результатам единичных определений; $U(y)$ – расширенная неопределенность результата измерения величины y .

Расширенная неопределенность определяется как:

$$U(y) = k \cdot u(y), \quad (14)$$

где k – коэффициент охвата.

Однако при нахождении неопределенности измерений, исходя из линеаризованной зависимости, происходит смещение границ доверительного интервала в оценке результата измерения (рис. 1). Нелинейность исходной функциональной зависимости $f(x)$ обуславливает несимметричность исходных границ доверительного интервала $f(\mu_x \pm U(x))$.

После линеаризации полученные границы $\mu_y \pm U(y)$ становятся симметричными и не соответствуют границам доверительного интервала величины y , определяемым по исходной зависимости (1).

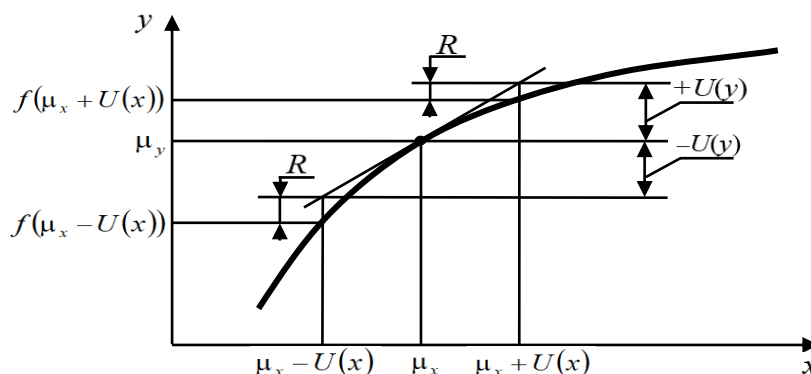


Рис. 1. Смещение границ доверительного интервала при линеаризации функциональной зависимости

Fig. 1. Shift of confidence limits at functional relationship linearization

Остаточный член формулы Тейлора R , которым пренебрегают при такой линеаризации, в форме Лагранжа имеет вид:

$$R = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \Big|_{x_i = \mu_i + \lambda_i \cdot \Delta x_i} \cdot \Delta x_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\substack{x_i = \mu_i + \lambda_i \cdot \Delta x_i \\ x_j = \mu_j + \lambda_j \cdot \Delta x_j}} \cdot \Delta x_i \cdot \Delta x_j \right), \quad (15)$$

где λ_i – параметр, определяющий положение точки на интервале $[\mu_i, x_i]$, в которой обеспечивается равенство остатка ряда и остаточного члена ряда Тейлора; Δx_i и Δx_j – отклонения соответственно i -ой и j -ой входных переменных от своих математических ожиданий.

Учитывая, что максимальное отклонение значения результата измерения определяется расширенной неопределенностью, выражение для остаточного члена в данном случае примет вид:

$$R = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \Big|_{x_i = \mu_i + \lambda_i \cdot U(x_i)} \cdot U^2(x_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\substack{x_i = \mu_i + \lambda_i \cdot U(x_i) \\ x_j = \mu_j + \lambda_j \cdot U(x_j)}} \cdot U(x_i) \cdot U(x_j) \right), \quad (16)$$

где $U(x_i)$ – расширенная неопределенность результата измерения величины x_i .

Согласно стандарту [5], формула (12) оценки стандартной неопределенности в случае существенной нелинейности функциональной зависимости (1) должна быть дополнена слагаемыми, отображающими члены ряда более высоких порядков, однако описываемый подход имеет следующие недостатки:

- критерий отнесения зависимости к существенно нелинейной не приводится;

- в качестве дополнительных членов ряда более высоких порядков выбираются только некоторые члены, которым присваивается статус наиболее существенных без какого-либо описания обоснования;
- критерий достаточности использования таких дополнительных членов отсутствует.

Согласно рекомендациям [8], остаточным членом пренебрегают при выполнении условия:

$$R < 0,8 u(y). \quad (17)$$

Однако из приводимой в данных рекомендациях формулы видно, что под остаточным членом понимается только одно из слагаемых остаточного члена формулы Тейлора. Кроме того, численные значения производных, необходимых при расчете значения остаточного члена, при этом определяются в точке оценок математических ожиданий, что не обеспечивает равенства остатка ряда Тейлора и остаточного члена.

Как видно из перечисленных несоответствий, для уточнения расчета стандартной неопределенности результата косвенных измерений, необходимо решить следующие задачи:

1) определить условия пренебрежения остаточным членом при оценке стандартной неопределенности результата косвенного измерения;

2) определить формулу для коррекции значения расширенной неопределенности с учетом определения остаточного члена.

3) сформулировать принцип определения значения параметра λ_i , обеспечивающего минимум невязки остатка ряда Тейлора и остаточного члена.

Как видно из рис. 1, наиболее простым способом выявления условия пренебрежения остаточным членом является его сопоставление с расширенной неопределенностью результата измерения $U(y)$ или связанной с ней стандартной неопределенностью $u(y)$. Если рассматривать остаточный член R как неисключенную систематическую погрешность, а стандартную неопределенность результата измерения $u(y)$ – как стандартное отклонение случайной погрешности, то в соответствии с [9] остаточным членом можно пренебречь, если выполняется условие:

$$\frac{R}{u(y)} < 0,8. \quad (18)$$

В рекомендациях [7] условие пренебрежения систематической составляющей результата измерения записывается следующим образом:

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_R} \leq \frac{1}{3}, \quad (19)$$

где σ_c – стандартное отклонение неисключенной систематической погрешности; σ_R – стандартное отклонение воспроизводимости, характеризующее случайную погрешность результатов измерений, полученных в условиях воспроизводимости.

В случае принятия допущения о равномерном законе распределения неисключенной систематической погрешности, как, например, в [9], стандартное отклонение:

$$\sigma_c = \frac{\theta}{\sqrt{3}}, \quad (20)$$

где θ – границы неисключенной систематической погрешности.

В нашем случае:

$$\sigma_c = \frac{R}{\sqrt{3}}, \quad (21)$$

$$\sigma_R = u(y) \quad (22)$$

Это приводит к условию:

$$\frac{R}{u(y)} < 0,6. \quad (23)$$

В случае принятия допущения о нормальном законе распределения неисключенной систематической погрешности, как, например, в рекомендациях [7], стандартное отклонение при доверительной вероятности в 95 % будет равно:

$$\sigma_c = \frac{R}{2}, \quad (24)$$

что приводит к выражению:

$$\frac{R}{u(y)} < 0,7. \quad (25)$$

Как видно, все полученные значения близки друг к другу, и можно окончательно записать условие пренебрежения остаточным членом ряда Тейлора:

$$R \leq (0,6 \div 0,8) \cdot u(y). \quad (26)$$

Если характер выпуклости графика функциональной зависимости в уравнении измерения в области расширенной неопределенности входных переменных не меняется, то для получения границ $f(\mu_x \pm U(x))$ значение остаточного члена на одной границе необходимо вычитать из расширенной неопределенности результата измерения, а на другой – прибавлять (см. рис.1). Однако для этого необходимо исследование характера выпуклости многомерной функции. Поскольку в определении расширенной неопределенности результата измерения необходима оценка сверху, для упрощения задачи можно суммировать остаточный член с расширенной неопределенностью результата измерения, полученной по формуле (14). В результате расширенную неопределенность результата измерения, полученную с учетом остаточного члена, следует рассчитывать по формуле:

$$U_{\Sigma}(y) = U(y) + R. \quad (27)$$

Для определения процедуры расчета значения параметра λ_i , минимизирующего разность остатка ряда и остаточного члена в интервале $\bar{y} \pm U(y)$, рассмотрим простой пример линеаризации одномерной функции

$$f(x) = e^x \quad (28)$$

в интервале $|\Delta x| = 1$ в окрестности точки $x_0 = 1$.

Линеаризованная функция имеет вид:

$$\varphi(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = e \cdot x. \quad (29)$$

Графики исходной и линеаризованной функции показаны на рис. 2.

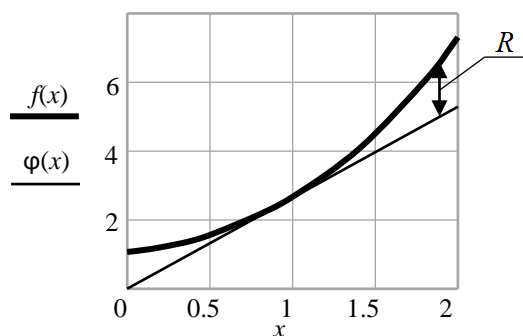


Рис. 2. Графики исходной и линеаризованной функции

Fig. 2. Curves of original and linearised functions

Остаточный член имеет вид:

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_{x=x_0+\lambda \cdot \Delta x} \cdot (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} \cdot e^x \Big|_{x=1+\lambda \cdot (x-1)} \cdot (x - 1)^2 = 0,5 \cdot e^{1+\lambda \cdot (x-1)} \cdot (x - 1)^2 \quad (30)$$

Для нахождения значения параметра λ в остаточном члене формулы Тейлора, при котором наблюдается равенство остатка ряда и остаточного члена, будем находить минимум квадратичной функции, описывающей разность между остатком ряда и остаточным членом формулы Тейлора, которая в качестве экстремума имеет только минимум:

$$L(x, \lambda) = (f(x) - \varphi(x) - R)^2 \rightarrow \min. \quad (31)$$

В данном случае:

$$L(x, \lambda) = (e^x - e \cdot x - 0,5e^{1+\lambda(x-1)} \cdot (x-1)^2)^2 \rightarrow \min. \quad (32)$$

Поскольку в задаче оценки неопределенности результата измерения интересует максимальное значение остаточного члена, которое наблюдается на границе доверительного интервала, т.е. при фиксированном x , будем искать λ из условия равенства нулю производной:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2(e^x - ex - 0,5e^{1+\lambda(x-1)} \cdot (x-1)^2 \cdot (-0,5e(x-1)^2) \cdot e^{\lambda(x-1)} \cdot (x-1) = 0 \quad (33)$$

$$(e^x - ex - 0,5e \cdot e^{\lambda(x-1)} (x-1)^2) \cdot (-0,5e(x-1)^3 \cdot e^{\lambda(x-1)}) = 0 \quad (34)$$

$$(e^x - ex - 0,5e \cdot e^{\lambda(x-1)} \cdot (x-1)^2) \cdot (x-1)^3 \cdot e^{\lambda(x-1)} = 0 \quad (35)$$

При изменении λ это выражение может быть равно нулю только при равенстве нулю первого сомножителя, исходя из чего будем искать значение параметра λ . На правой границе интервала, т.е. при $x = 2$, находим λ_1 :

$$e^2 - e \cdot 2 - 0,5e \cdot e^{\lambda_1(2-1)} \cdot (2-1)^2 = 0$$

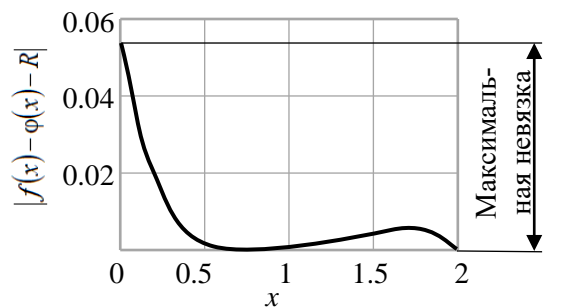
$$\lambda_1 = \ln 1,436 = 0,362$$

Аналогично находим λ_2 на левой границе изменения аргумента x , т.е. при $x = 0$

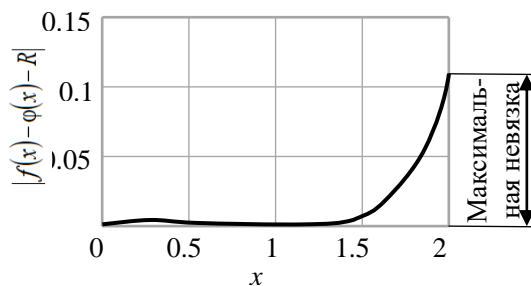
$$e^0 - e \cdot 0 - 0,5 \cdot e \cdot e^{\lambda_2(0-1)} \cdot (0-1)^2 = 0$$

$$\lambda_2 = 0,307$$

Графики, показывающие модуль невязки между правой и левой частями формулы Тейлора (3) для рассматриваемой функции при найденных λ , показаны на рис. 3.



а) при $x = 2$, $\lambda_1 = 0,362$



б) при $x = 0$, $\lambda_2 = 0,307$

Рис. 3. Невязка формулы Тейлора при найденных λ

Fig. 3. Taylor residual at λ values observed

Поскольку в исходной метрологической задаче интересует весь интервал $\bar{y} \pm U(y)$, методом сканирования между двумя найденными значениями λ была найдена точка, соответствующая минимуму максимальной невязки (рис. 4).

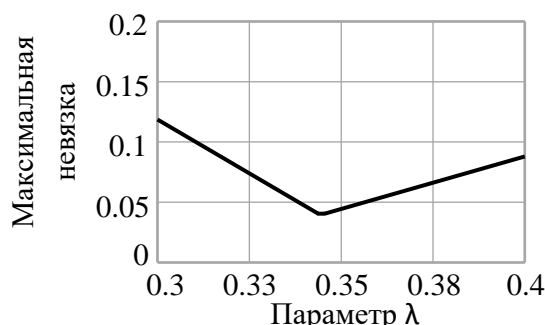


Рис. 4. Зависимость максимальной невязки формулы Тейлора от параметра λ

Fig. 4. Dependence of maximum Taylor residual on λ parameter

Минимальное значение невязки соответствует значению параметра $\lambda = 0,345$ (рис. 4), что близко к среднему значению из двух найденных

$$\lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2};$$

$$\lambda = \frac{0,362 + 0,307}{2} = 0,335.$$

Невязка формулы Тейлора в интервале $x_0 \pm \Delta x$ при этих двух значениях λ показана на рис. 5.

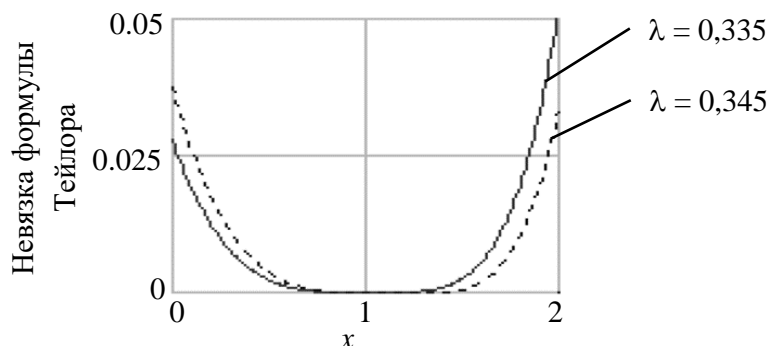


Рис. 5. Невязка формулы Тейлора при разных λ

Fig. 5. Taylor residual at different λ values

Максимальное различие между ними на правой границе не превышает $2 \cdot 10^{-2}$, что составляет 1 % от разницы между исходной и линейризованной функциями на правой границе интервала (рис. 2). В связи с этим этой разностью можно пренебречь и в качестве наилучшего приближения параметра λ использовать его среднее арифметическое от найденных значений на правой и левой границах переменной x .

Сопоставим значения остаточного члена при нахождении значения производных второго порядка, необходимых для оценки его численного значения, в точках $x = x_0$ и $x = x_0 + \lambda \cdot \Delta x$. Поскольку интересует максимальное значение остаточного члена, то, в соответствии с формулой (30)

$$R_{\max_0} = 0,5 \cdot e^x \Big|_{x_0} \cdot \Delta x^2 = 0,5 \cdot e^{x_0} \cdot \Delta x^2 \quad (36)$$

$$R_{\max_1} = 0,5 \cdot e^x \Big|_{x_0+\lambda \cdot \Delta x} \cdot \Delta x^2 = 0,5 \cdot e^{x_0+\lambda \cdot \Delta x} \cdot \Delta x^2 \quad (37)$$

Изменение остаточного члена, возникающее при сдвиге точки нахождения производной, представим в относительном виде, в процентах

$$\delta R = \left| \frac{R_{\max_0} - R_{\max_1}}{R_{\max_1}} \right| \cdot 100 = \left| \frac{R_{\max_0}}{R_{\max_1}} - 1 \right| \cdot 100 = \left| \frac{0,5 \cdot e^{x_0} \cdot \Delta x^2}{0,5 \cdot e^{x_0+\lambda \cdot \Delta x} \cdot \Delta x^2} - 1 \right| \cdot 100 = \left| 0,5 \cdot e^{-\lambda \cdot \Delta x} - 1 \right| \cdot 100 \quad (38)$$

Как видно из полученной формулы, относительное изменение остаточного члена в случае рассматриваемой функции не зависит от точки оценки математических ожиданий и определяется только сдвигом точки нахождения производной, т.е. параметром λ и величиной интервала изменения входной переменной. В исходной задаче величина интервала изменения входной переменной определяется ее расширенной неопределенностью, которая пропорциональна стандартной определенности. В метрологии расширенная неопределенность часто представляется в относительном виде. Поэтому интервал Δx также представим в относительном виде в %:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_0} \cdot 100, \quad (39)$$

что по форме будет соответствовать относительному стандартному отклонению. Полученный график зависимости показан на рис. 6.

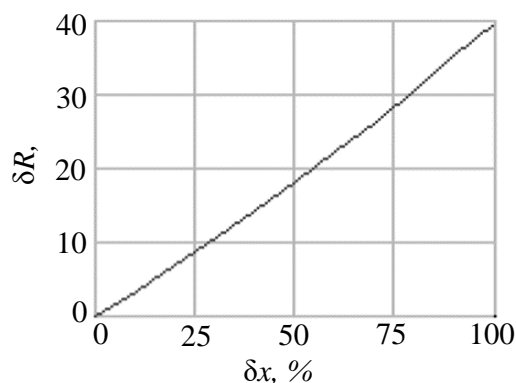


Рис. 6. Относительное изменение остаточного члена, обусловленное изменением точки нахождения производной

Fig. 6. Relative change in the remainder value dependent on change in location point of the derivative

Учитывая, что в большинстве технических измерений относительное стандартное отклонение входной величины не превышает 25 %, в данном случае ориентировочно можно оценить изменение значения остаточного члена, возникающее за счет смещения точки нахождения производной, не более 10 %. Его необходимо учитывать только в случае близости отношения $\frac{R}{u(y)}$ к указанным граничным значениям.

Поскольку в оценке неопределенности интересует верхняя грань множества значений R на интервале $x_0 \pm \Delta x$, то эту оценку можно записать как

$$\hat{R} = 0,5 \cdot e^{1+\lambda \cdot \Delta x} \cdot \Delta x^2 \quad (40)$$

Соотношение между оценкой сверху и изменением остаточного члена на интервале $x_0 \pm \Delta x$ показано на рис. 7. Видно, что оценка сверху остаточного члена соответствует его максимальному значению, что говорит о правильности данного подхода к методике расчета.

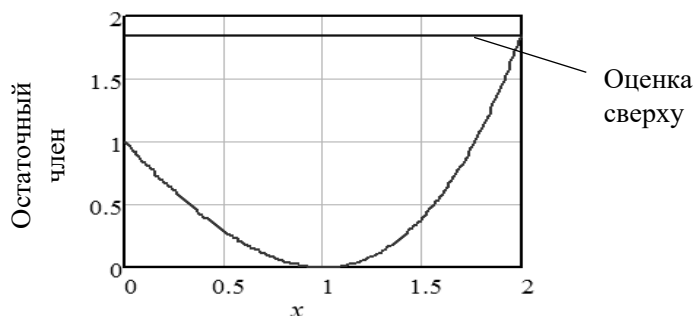


Рис. 7. Изменение остаточного члена в интервале $x_0 \pm \Delta x$ и его оценка сверху при $\lambda = 0,307$

Fig. 7. Change in the remainder value in $x_0 \pm \Delta x$ interval and its upper estimation at $\lambda = 0.307$

Особенностью косвенных измерений по сравнению с рассмотренным примером является многомерный характер уравнения измерения, в котором аргументом является вектор входных величин. В этом случае остаточный член определяется по формуле (16), а параметры λ_i должны обеспечивать минимум многомерной функции, описанной аналогично формуле (31), только для многомерного случая:

$$L(X, \Lambda) = (f(X) - \varphi(X) - \hat{R}(\Lambda))^2 \rightarrow \min, \quad (41)$$

где Λ – вектор параметров λ_i ; $\varphi(X)$ – линейризованное уравнение измерения, описываемое формулой (5); $\hat{R}(\Lambda)$ – оценка сверху остаточного члена на границе области, определяемой вектором расширенных неопределенностей входных переменных, описываемая формулой (16).

Значения параметров λ_i будут определяться из системы уравнений:

$$\left. \frac{\partial L(X, \Lambda)}{\partial \lambda_i} \right|_{X=M \pm U(X)} = 0; \quad i = \overline{1, m} \quad (42)$$

с последующим осреднением и получением единственного значения λ .

После этого по формуле (16) можно получить значение остаточного члена и сделать вывод о возможности пренебрежения им по результатам его сравнения с расширенной неопределенностью $U(y)$. Затем получим окончательное значение расширенной неопределенности и записать результат измерения. Таким образом, при обработке конкретных результатов косвенных измерений необходима следующая последовательность действий:

1) определить стандартную неопределенность результата косвенных измерений по формуле (12);

2) определить остаточный член формулы Тейлора по формуле (16) в точке оценки математических ожиданий, т.е. при $\lambda = 0$;

3) в случае получения значения величин R и $u(y)$, отличающихся на порядок, т.е.:

$$\frac{R}{u(y)} < 0,1 \quad (43)$$

пренебречь остаточным членом;

4) при получении величин одного порядка уточнить значение остаточного члена, для чего составить функцию (41) и систему уравнений (42), после уточнения проверить условие (43) пренебрежения остаточным членом;

5) определить расширенную неопределенность результата косвенных измерений по формулам (14), (27).

Данный алгоритм изображен в виде блок-схемы на рис. 8 и 9.

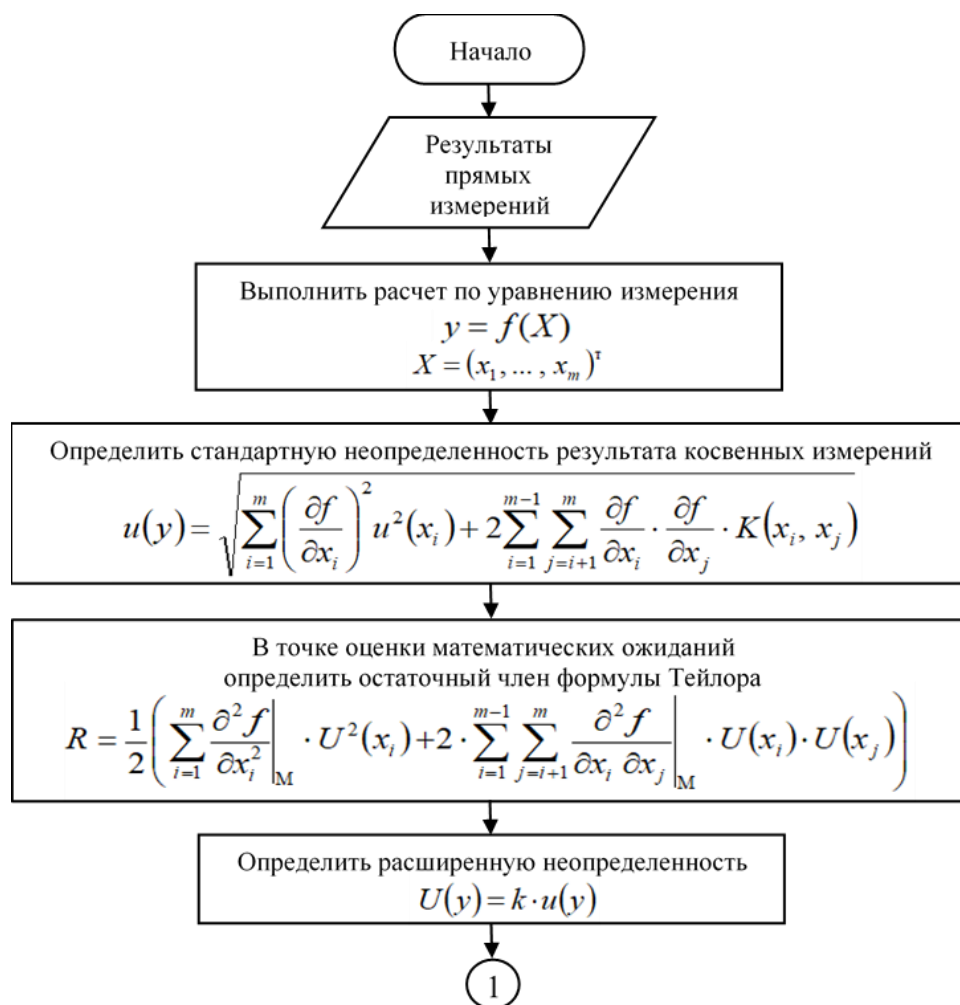


Рис. 8. Блок-схема алгоритма определения расширенной неопределенности результата косвенных измерений (первый фрагмент)

Fig. 8. Algorithm chart for extended indirect observation uncertainty calculation (first fragment)

Предложенный подход был опробован при расчете примера, описанному в [5, пример Н.1]. Задача заключалась в измерении длины концевой меры методом сравнения с эталоном. Уравнение измерения имело вид:

$$I = \frac{I_s(1 + \alpha_s \theta_s) + d}{1 + \alpha \theta}, \quad (44)$$

где I – измеряемая величина, т.е. длина калибруемой концевой меры при 20 °С; I_s – длина эталона при 20 °С, приведенная в сертификате о калибровке; α и α_s – коэффициенты теплового расширения, соответственно, калибруемой концевой меры длины и эталона; θ и θ_s – отклонения температуры, соответственно, концевой меры и эталона от нормальной температуры 20 °С; d – разность длин концевой меры и эталона.

В описанном примере в результате расчета с учетом членов второго порядка получено значение стандартной неопределенности длины концевой меры $u(I) = 34$ нм. В соответствии с предложенной методикой были выполнены следующие действия. Поскольку нормируемая температура для концевой меры и эталона указана одинаковой (20 °С), отклонения температуры приняты равными:

$$\theta_s = \theta.$$

Величина этого отклонения:

$$\theta = t - 20,$$

где t – температура концевой меры при проведении измерений.

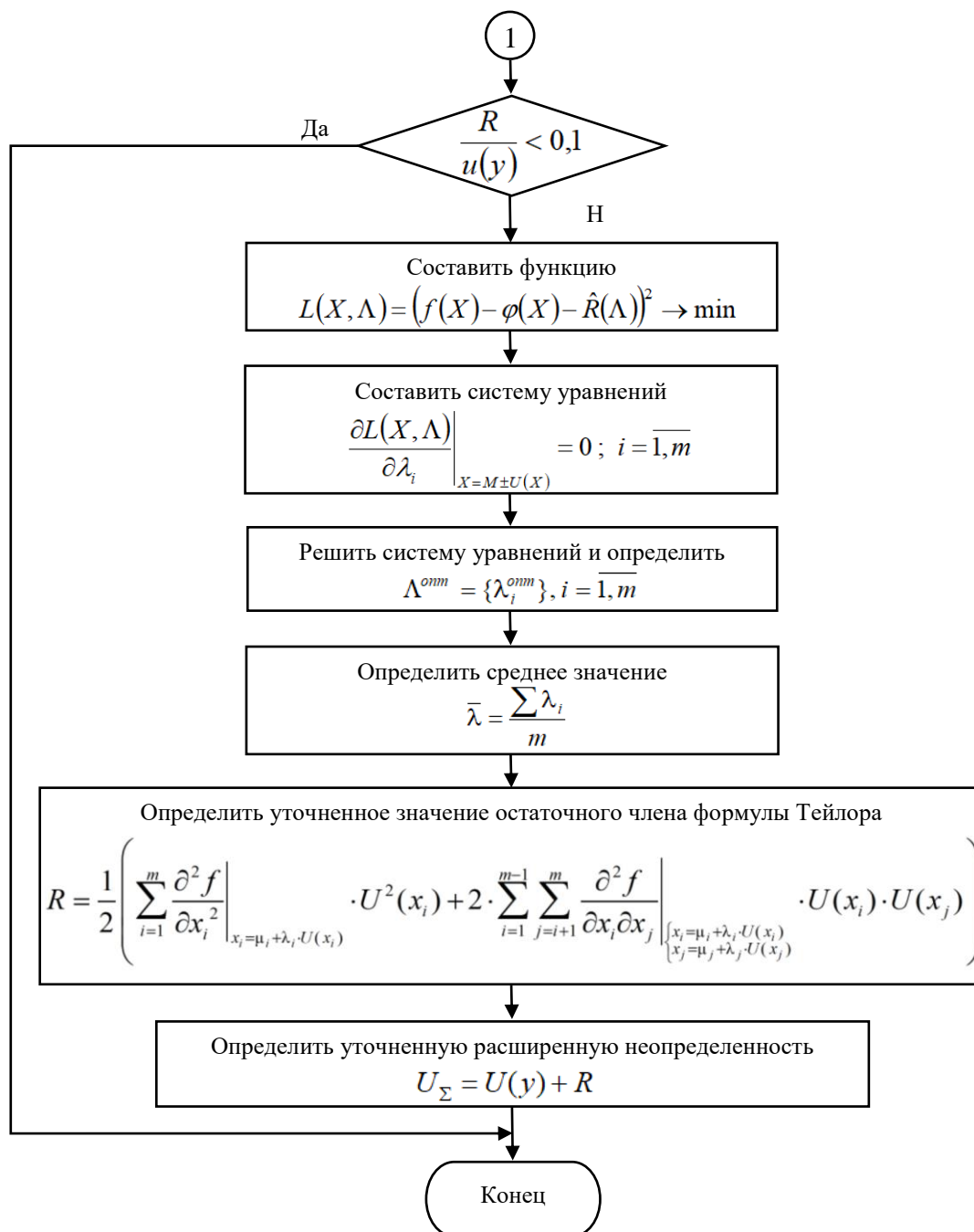


Рис. 9. Блок-схема алгоритма определения расширенной неопределенности результата косвенных измерений (второй фрагмент)

Fig. 9. Algorithm chart for extended indirect observation uncertainty calculation (second fragment)

Измерения проводились в помещении при обычных условиях, поэтому коэффициенты теплового расширения α и α_s можно считать константами. Для сталей различных марок их значения близки, поэтому было принято: $\alpha_s = \alpha$.

При этих допущениях уравнение измерения приняло вид:

$$I = I_s + \frac{d}{1 + \alpha(t - 20)}. \quad (45)$$

Численные значения величин d и t получаются в результате прямых измерений, значения их стандартных неопределенностей могут быть посчитаны в соответствии с [10]. Зна-

чение стандартной неопределенности величины I_S указано в сертификате о калибровке, а величины α могут быть взяты из справочных данных. Величины d и t являются независимыми.

В рассматриваемом в [5] примере приведены следующие значения:

1) точечные оценки математических ожиданий:

- $I_S = 50,000623$ мм;
- $d = 215$ нм;
- $\alpha = 11,5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$;
- $t = 19,9 \text{ } ^\circ\text{C}$;

2) стандартные неопределенности используемых в уравнении измерения величин:

- неопределенность длины эталона $u(I_S) = 25$ нм;
- неопределенность измеренной разности длин $u(d) = 9,7$ нм;
- неопределенность коэффициента теплового расширения $u(\alpha) = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$;
- неопределенность температуры в точке измерения $u(t) = 0,41 \text{ } ^\circ\text{C}$.

При этих числовых данных результат косвенного измерения будет иметь значение:

$$I = 50,000623 + \frac{215 \cdot 10^{-6}}{1 + 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot (19,9 - 20)} = 50,000838 \text{ мм,}$$

что совпадает с приведенным в [5] результатом.

Частные производные от функциональной зависимости (45), необходимые для вычисления стандартной неопределенности результата измерений по формуле (12), имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial I_S} &= 1; \\ \frac{\partial f}{\partial d} &= \frac{1}{1 + \alpha(t - 20)}; \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha} &= -\frac{d \cdot (t - 20)}{(1 + \alpha(t - 20))^2}; \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{d \cdot \alpha}{(1 + \alpha(t - 20))^2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Вторая группа слагаемых (12) равна нулю, поскольку входные переменные являются независимыми. Вычисленные по исходным данным величины, необходимые для расчета стандартной неопределенности, сведены в табл. 1. Коэффициенты чувствительности рассчитывались по формулам (46) в точке оценки математических ожиданий входных величин. Слагаемые табл. 1, дающие пренебрежимо малый вклад в сумму, показаны прочерками. В результате суммарная стандартная неопределенность результата измерения:

$$u(I) = \sqrt{719} = 27 \text{ нм}$$

Приведенное значение в примере [5] без учета членов второго порядка составляет 32 нм. Производные второго порядка, необходимые для вычисления остаточного члена по формуле (15), приведены в табл. 2. Полученные в результате дифференцирования уравнения измерения аналитические выражения для производных приведены в табл. 3, а их численные значения – в табл. 4.

В качестве примера расчета ниже приведен расчет значения производной $\frac{\partial^2 f}{\partial d \partial t}$.

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial d \partial t} \right|_M = -\frac{11,5 \cdot 10^{-6}}{(1 + 11,5 \cdot 10^{-6} \cdot (19,9 - 20))^2} = -1,150 \cdot 10^{-5}$$

Таблица 1.
Бюджет неопределенности

Table 1.
Uncertainty budget

Входная величина x_i , являющаяся источником неопределенности	Составляющая стандартной неопределенности $u(x_i)$	Значение стандартной неопределенности	Коэффициент чувствительности $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$	$ c_i u(x_i)$ нм	$(c_i u(x_i))^2$ нм ²
Длина эталона	$u(I_s)$	25 нм	1	25	625
Измеренная разность длин	$u(d)$	9,7 нм	1,00	9,7	94,09
Коэффициент теплового расширения	$u(\alpha)$	$1,2 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	21,50	$2,58 \cdot 10^{-5}$	–
Температура в точке измерения	$u(t)$	0,41 ^o C	$-2,47 \cdot 10^{-3}$	$1,01 \cdot 10^{-3}$	–
				$u^2(I)$	719

Таблица 2.
Производные, необходимые для расчета остаточного члена

Table 2.
Derivatives required for remainder calculation

Входные переменные	I_s	d	α	t
I_s	$\frac{\partial^2 f}{\partial I_s^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial I_s \partial d}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial I_s \partial \alpha}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial I_s \partial t}$
d	–	$\frac{\partial^2 f}{\partial d^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial d \partial \alpha}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial d \partial t}$
α	–	–	$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial t}$
t	–	–	–	$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

Таблица 3.
Аналитические выражения для производных второго порядка

Table 3.
Analytical expressions for second-order derivatives

Входные переменные	I_s	d	α	t
I_s	0	0	0	0
d	–	0	$-\frac{t-20}{(1+\alpha(t-20))^2}$	$-\frac{\alpha}{(1+\alpha(t-20))^2}$
α	–	–	$\frac{2d \cdot (t-20)^2}{(1+\alpha(t-20))^3}$	$\frac{1-\alpha(t-20)}{(1+\alpha(t-20))^3}$
t	–	–	–	$\frac{2d \cdot \alpha^2}{(1+\alpha(t-20))^3}$

Таблица 4.

Численные значения производных в точке оценки математических ожиданий

Table 4.

Numerical values of derivatives at estimation point of expectations

Входные переменные	I_S	d	α	t
I_S	0	0	0	0
d	–	0	0,100	$-1,150 \cdot 10^{-5}$
α	–	–	4,300	1,000
t	–	–	–	$5,687 \cdot 10^{-8}$

Принимая в формуле (14) коэффициент охвата, равный двум, что считается часто встречающимся на практике случаем [5, раздел 6], с учетом данных табл. 3-4 получаем следующее выражение для расчета остаточного члена:

$$R = 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \cdot u^2(\alpha) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \cdot u^2(t) \right) + 4 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial d \partial \alpha} \cdot u(d) \cdot u(\alpha) + \frac{\partial^2 f}{\partial d \partial t} \cdot u(d) \cdot u(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial t} \cdot u(\alpha) \cdot u(t) \right)$$

и его численное значение:

$$R = 2 \cdot \left(4,300 \cdot (1,2 \cdot 10^{-6})^2 + 5,687 \cdot 10^{-8} \cdot 0,41^2 \right) + 4 \cdot \left(0,100 \cdot 9,7 \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} + (-1,150 \cdot 10^{-5}) \cdot 9,7 \cdot 0,41 + 1,000 \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} \cdot 0,41 \right) = -4,41 \cdot 10^{-5} \text{ нм}$$

В полученном результате 96 % численного значения приходится на слагаемое со смешанной производной $\frac{\partial^2 f}{\partial d \partial t}$, что говорит о важности учета ковариационного слагаемого в формуле остаточного члена.

Сопоставление полученного значения с суммарной стандартной неопределенностью результата измерения $u(I)$ показывает, что остаточным членом можно пренебречь. В ГОСТе [5] высказывается противоположное суждение, однако какого-либо обоснования не приводится, в связи с чем можно утверждать, что оно ошибочно.

Выводы

1. Выявлен ряд неточностей в нормативных документах по оценке неопределенности результатов косвенных измерений.
2. При оценке стандартной неопределенности результатов косвенных измерений предложено рассматривать остаточный член формулы Тейлора как неисключенную систематическую погрешность, в результате чего на основании анализа ряда нормативных документов по метрологии уточнено условие пренебрежения им при расчетах.
3. Получена формула для расчета расширенной неопределенности результата измерения, учитывающая наличие остаточного члена формулы Тейлора.
4. Предложен алгоритм расчета расширенной неопределенности результата косвенных измерений.

Библиографический список

1. Федеральный закон № 102-ФЗ от 26.06.2008 «Об обеспечении единства измерений». [Электронный ресурс] // Режим доступа: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_77904/ (дата обращения 19.10.2022).
2. Приказ Минэкономразвития № 707 от 26 октября 2020 года «Об утверждении критериев аккредитации и перечня документов, подтверждающих соответствие заявителя, аккредитованного лица критериям аккредитации» [Электронный ресурс] // Режим доступа:

- <https://docs.cntd.ru/document/566305944> (дата обращения 19.10.2022).
3. ГОСТ ISO/IEC 17025-2019. Общие требования к компетентности испытательных и калибровочных лабораторий. [Электронный ресурс] // Режим доступа: <https://docs.cntd.ru/document/1200166732> (дата обращения 19.10.2022).
 4. ГОСТ Р ИСО 5725-1-2002. Точность (правильность и прецизионность) методов и результатов измерений. Часть 1. Основные положения и определения. [Электронный ресурс] // Режим доступа: <https://docs.cntd.ru/document/1200029975> (дата обращения 19.10.2022).
 5. ГОСТ 34100.3-2017/ISO/IEC Guide 98-3:2008. Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения [Электронный ресурс] // Режим доступа: <https://docs.cntd.ru/document/1200146871> (дата обращения 19.10.2022).
 6. ГОСТ Р ИСО 21748-2021. Статистические методы. Руководство по использованию оценок повторяемости, воспроизводимости и правильности при оценке неопределенности измерений. [Электронный ресурс] // Режим доступа: <https://docs.cntd.ru/document/1200180977> (дата обращения 19.10.2022).
 7. РМГ 61-2010. Показатели точности, правильности, прецизионности методик количественного химического анализа. Методы оценки. [Электронный ресурс] // Режим доступа: <https://docs.cntd.ru/document/1200094703> (дата обращения 19.10.2022).
 8. МИ 2083-90. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей. [Электронный ресурс] // Режим доступа: <https://ohranatruda.ru/upload/iblock/36b/4293818556.pdf> (дата обращения 19.10.2022).
 9. Р 50.2.038-2004. Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей и неопределенности результата измерений. [Электронный ресурс] // Режим доступа: <https://docs.cntd.ru/document/1200037562> (дата обращения 19.10.2022).
 10. ГОСТ Р 8.736-2011. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения [Электронный ресурс] // Режим доступа: <https://docs.cntd.ru/document/1200089016> (дата обращения 19.10.2022).

**Дата поступления
в редакцию: 31.01.2023**

**Дата принятия
к публикации: 02.05.2023**