УДК 519.863 DOI: 10.46960/1816-210X_2023_4_36

МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ВЫВЕРКИ И КОРРЕКЦИИ ПООПЕРАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ НОРМ ВРЕМЕНИ

Н.В. Старостин
ORCID: **0000-0003-1415-7511** e-mail: **nvstar@iani.unn.ru**
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Нижний Новгород, Россия

Д.В. Седаков
Российский Федеральный Ядерный Центр –
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики
Саров, Россия

А.Г. Свеженцев
ORCID: **0009-0000-3339-2715** e-mail: **asvezhentsev@yandex.ru**
Российский Федеральный Ядерный Центр –
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики
Саров, Россия

И.С. Вернигор
ORCID: **0009-0008-8682-0523** e-mail: **isvernigor@yandex.ru**
Российский Федеральный Ядерный Центр –
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики
Саров, Россия

Проблема выверки и коррекции пооперационных технологических норм рассмотрена в контексте внедрения средств автоматизации планирования и оперативного управления производством. Сформулирована концепция, основанная на анализе исторических данных работы производства за некоторый период. Описана математическая модель и поставлена оптимизационная задача расчета пооперационных технологических норм. Предложены методы работы с ошибочными и избыточными исходными данными, а также методы работы с большими данными, основанные на декомпозиционном подходе.

Ключевые слова: оперативно-производственное планирование, автоматизация производственных процессов, нормирование операций, технологическая норма времени, линейная оптимизация, избыточные данные, декомпозиция, минимизация информационных потерь.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Старостин, Н.В. Модели и алгоритмы поиска оптимальных процессов выверки и коррекции пооперационных технологических норм времени / Н.В. Старостин, Д.В. Седаков, А.Г. Свеженцев, И.С. Вернигор // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2023. № 4. С. 36-50. DOI: 10.46960/1816-210X_2023_4_36

MODELS AND ALGORITHMS FOR SEARCHING OPTIMAL RECONCILIATION PROCESS AND CORRECTION OF OPERATIONAL TECHNOLOGICAL TIME STANDARDS

N.V. Starostin
ORCID: **0000-0003-1415-7511** e-mail: **nvstar@iani.unn.ru**
Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod
Nizhny Novgorod, Russia

D.V. Sedakov
Russian Federal Nuclear Center – The All-Russian Research Institute of Experimental Physics
Sarov, Russia

A.G. Svezhentsev
ORCID: **0009-0000-3339-2715** e-mail: **asvezhentsev@yandex.ru**
Russian Federal Nuclear Center – The All-Russian Research Institute of Experimental Physics
Sarov, Russia

I.S. Vernigor
ORCID: **0009-0008-8682-0523** e-mail: **isvernigor@yandex.ru**
Russian Federal Nuclear Center – The All-Russian Research Institute of Experimental Physics
Sarov, Russia

Abstract. One of the problems in the implementation of automation tools for planning and operational production management is reconciliation and correction of operational technological standards. A concept based on the historical data analysis for the production for a certain period is formulated. A mathematical model is described and an optimization problem for calculating operational technological standards is posed. The paper proposed the methods for working with erroneous and redundant source data, as well as methods for working with big data based on the decomposition approach.

Key words: operative production planning, production processes automation, standardizing operations, technological time standard, linear optimization, redundant data, decomposition, minimization of information losses.

.

FOR CITATION: N.V. Starostin, D.V. Sedakov., A.G. Svezhentsev, I.S. Vernigor. Models and algorithms for searching optimal reconciliation process and correction of operational technological time standards. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2023. № 4. Pp. 36-50. DOI: 10.46960/1816-210X_2023_4_36

Введение

Эффективное управление производственной системой в значительной степени определяется качеством оперативно-производственного планирования, нацеленного на организацию слаженной работы всех подразделений предприятия для обеспечения ритмичного выпуска продукции в установленном объеме и номенклатуре при рациональном использовании производственных ресурсов. С практической точки зрения реализация указанной цели достигается решением целого комплекса взаимосвязанных задач, состав которых может меняться в зависимости от принятой системы планирования на конкретном предприятии. Совершенствование системы оперативно-производственного планирования под специфику конкретного производства связывают главным образом с разработкой и практической реализацией более точных экономико-математических моделей и алгоритмов планирования за счет учета большего числа аспектов функционирования производственной системы [1, 2]. В итоге растут требования, предъявляемые к структуре, объему и качеству исходных данных. Таким образом, развитие системы оперативно-производственного планирования невозможно без повышения уровня автоматизации процессов, сбора и обработки необходимой информации.

В сфере решения задач оперативно-производственного планирования значимая часть исходных данных поступает с технологической подготовки производства. В частности, на этапе технологического проектирования осуществляется разработка техпроцессов изготовления и контроля составных деталей и сборок изделий; на этапе выбора оборудования для операций техпроцесса происходит формирование обоснованного перечня оборудования; на этапе нормирования устанавливаются пооперационные технические нормы времени технологических процессов. Современные автоматизированные системы технологической подготовки производства позволяют существенно упростить подготовку необходимых данных для оперативно-производственного планирования [3]. В то же время существует проблема формирования части календарно-плановых нормативов и на базе экспертных оценок, что по факту не исключает ошибок в оценках длительности производственных циклов, особенно в тех случаях, когда производство функционирует в условиях значительного номенклатурного ряда и дефицита ресурсов. Главные негативные последствия выражаются здесь в падении точности формируемых показателей и планов и, как следствие, повышении неопределенности при управлении производством и необходимости частой корректировки планов производства. В целях повышения уровня доверия к результатам оперативно-производственного планирования на практике нередко используют поправочные коэффициенты [4], которые позволяют подогнать плановые показатели под показатели, полученные по факту их реализации. Однако данный метод не позволяет находить и корректировать ошибки в исходных данных и формировать надежные планы в условиях изменяющихся производственной системы и номенклатуры изделий. С этой точки зрения проблема выверки и коррекции пооперационных технологических норм времени является актуальной. Создание и интеграция в процессы подготовки технологических данных производства специализированного программного обеспечения выверки и коррекции пооперационных технологических норм позволит повысить качество данных, тем самым обеспечивая благоприятные условия для внедрения средств планирования и оперативного управления производством.

Содержательная постановка задачи

Концепция технологии выверки и коррекции пооперационных технологических норм основывается на анализе исторических данных работы производства за некоторый период. В контексте рассматриваемой проблемы под историческими данными будем понимать производственные (сменно-суточные) задания и отметками их выполнения. Отметим, что минимальный уровень автоматизации производства предполагает наличие подобных оцифрованных данных. Проблема состоит в том, что в производственных заданиях зачастую достоверной информацией является только факт назначения работ к исполнению и их завершения с точностью до периода производственного задания, которому, как правило, соответствует смена. Таким образом, в качестве исходных данных выступает множество производственных заданий, выполненных на одном производстве за некоторый заданный производственный период. Для каждого производственного задания определено оборудование (исполнитель) с выполненными на нем технологическими операциями за заданный рабочий период смены. Каждой операции соответствует определенный вид работ. Для каждого вида работ указаны технологические нормы исполнения. Определена методика расчета длительности выполнения производственного цикла технологической операции по соответствующей технологической норме по видам работ.

В задаче требуется подобрать такие значения технологических нормы исполнения, чтобы производственные циклы заданий по суммарной длительности не превышали длительность рабочих периодов смен.

Математическая модель

Обозначим через x_i технологическую норму штучного времени на выполнения операции i-го вида:

$$x_i \geq 0, \qquad i = \overline{1,n} \tag{1}$$

Обозначим через y_j технологическую норму подготовительно-заключительного времени для j-го оборудования, которые соответствуют затратам времени на подготовку и работы, связанные с ее завершением на соответствующем оборудовании:

$$y_i \geq 0, \qquad j = \overline{1,m} \tag{2}$$

В качестве примера методики оценки расчета длительности выполнения технологической операции i-го вида на j-ом оборудовании примем:

$$t_{ij} = y_j + p_j \cdot q_i \cdot x_i$$

где p_j – действительный коэффициент выполнения нормы j-м оборудованием; q_i – это количество единиц продукции, которое требуется получить в результате выполнения операцииi-го вида.

Обозначим через $l = \overline{1,k}$ номер производственного задания. Так как в рамках l-ого производственного задания суммарная длительность операций не может превышать длительность рабочей смены, получаем для каждого l-го производственного задания неравенство вида:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{lij} t_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{lij}\left(y_j + p_j \cdot q_{lij} \cdot x_i\right) \le w_l, \qquad l = \overline{1,k} \tag{3}$$

где c_{lij} – общее число технологических операций i-го типа в l-ом производственном задании, назначенных на j-е оборудование; q_{lij}– это суммарное число единиц продукции операции i-го вида в l-ом производственном задании, производимым на j-м оборудовании; w_l – длительность рабочего периода l-ого производственного задания.

Если на предприятии ведется статистика фактической загрузки по оборудованию (на месяц, квартал, год), систему неравенств (3) можно дополнить неравенствами по каждому оборудованию:

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} c_{lij}\left(y_j + p_j \cdot q_{lij} \cdot x_i\right) \ge s_j \cdot w_l, \qquad j = \overline{1,m} \tag{4}$$

где s_j – значение коэффициента загрузки оборудования по всем сменам всего производственного периода.

Задача оптимизации

Система линейных неравенств (1)-(4) определяет область допустимых значений технологических норм штучного времени $x = (x_1, \ldots, x_n)$ по видам операций и технологических норм $y = (y_1, \ldots, y_m)$ подготовительно-заключительного времени по оборудованию.

С точки зрения оперативно-производственного планирования важно получить верхние оценки искомых технологических норм x и y, что позволит заложить обоснованные резервы в длительности технологических операций. Это, с одной стороны, позволит нивелировать стохастические и неконтролируемые процессы реального производства, с другой – удержать плановые показатели в рамках, полученных на фактических данных работы предприятия.

В качестве планового показателя предлагается выбрать длительность производственного цикла всех производственных заданий $F(x)$ – он должен стремиться к фактическому значению W:

$$W - F(x) = \sum_{l=1}^{k} w_l - \sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{lij}\left(y_j + p_j \cdot q_{lij} \cdot x_i\right) \to min$$

Задача на минимизацию выбранного критерия соответствует задаче максимизации длительности производственного цикла (5):

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{lij}\left(y_j + p_j \cdot q_{lij} \cdot x_i\right) \to max \tag{5}$$

Оптимизационную задачу (1)-(5) будем называть задачей расчета технологических норм времени. Она принадлежит к классу задач линейного программирования, для решения которой существуют эффективные алгоритмы [5, 6].

Метод решения

В качестве метода решения задачи (1)-(5) можно использовать симплекс-метод [7], который предполагает приведение к канонической (стандартной) форме задачи линейного программирования. Система (3) из k ограничений преобразуется в систему из k равенств путем введения дополнительных переменных. Система (4) из mнеравенств преобразуется в систему m равенств введением дополнительной переменной. В результате система (3), (4) преобразуется в $k+m$ равенств с $(\mathrm{n}+m)+(k+m)$ переменными и с не отрицательными правыми частями. Изменения в целевой функции заключаются в техническом отбрасывании константы W.

Теоретически симплекс метод в худшем случае может перебрать все вершины симплекса, образованного системой равенств, однако на практике он демонстрирует в среднем полиномиальную сходимость при широком выборе распределения значений в случайных матрицах, при этом требуемое машинное время пропорционально кубу от числа ограничений [7] – в результате для алгоритма решения задачи (1)-(5) получаем оценку затрат по времени:

$$T(k,m) = P(k+m)^3 \tag{6}$$

где P – действительный положительный коэффициент, который определяется производительностью вычислительной системы и особенностью распределений значений в получаемых матрицах.

Данная оценка может служить основанием для ответа на важный вопрос об объеме выборки производственных заданий с реального производства. С одной стороны, чем больше данных с различного оборудования, тем теоретически точнее могут быть вычислены искомые технологические нормы штучного времени, однако при этом в кубической зависимости от объема входных данных растут вычислительные издержки на поиск решения задачи. При этом, в случае малого объема выборки появляется риск получения некорректных норм, которые в итоге не позволят формировать надежные планы в условиях реально работающего производства. Сформулируем проблему выбора представительной выборки производственных заданий с реального производства.

Проблема отсутствия решения по причине ошибок в исторических данных

Сфокусируем внимание на представленной модели (1)-(4) расчета технологических норм времени. Система линейных неравенств сформулирована из предположения о том, что на производстве строго соблюдается график работы и ведется учет производственных заданий. Однако в условиях реального производства нельзя исключать ситуации, при которых будет иметь место неучтенная переработка или банальная техническая ошибка, связанная с некорректным вводом информации. Легко придумать пример ошибочных исторических данных, который приведет к несовместности системы (1)-(4) и, как следствие, невозможности решения задачи расчета технологических норм времени.

С точки зрения практической применимости для любой технологии анализа производственных данных исключительно важно заложить в саму технологию возможность работы с ошибочными данными. Рассмотрим примеры некоторых процессов, которые могут привести к ошибкам в производственных заданиях. Необходимо отметить, что в качестве исходных данных модели (1)-(4) выступают производственные задания, которые могут дополняться коэффициентами загрузки оборудования (4). Таким образом, согласно (3) и (4), информационная модель обобщенного производственного задания включает набор данных:

$$(c_{lij})_{l\times n\times m}, (q_{lij})_{l\times n\times m}, (p_j)_m, (s_j)_m, (w_l)_k$$

В качестве первой системной проблемы получения неполных или неточных данных о производстве рассмотрим случай переработки, когда исполнитель получает сменно-суточное задание, не успевает его выполнить в рамках смены, доделывает работу уже после рабочего периода смены. Если этот факт никак не будет отражен в исторических данных, соответствующая переработка в виде увеличенного значения w_l не будет учтена в модели. В результате в системе ограничений (3) появится более жесткое ограничение на нормы времени, которое может войти в противоречие с корректными неравенствами (4) по загрузке оборудования. Симметричный случай связан с некорректными коэффициентами загрузки оборудования в неравенствах (4), которые могут войти в противоречие с системой ограничений (3). Особый случай связан с неверным определением p_j коэффициентов выполнения нормы j-м оборудованием, которые характеризуют производительность оборудования в среднем по разным видам работ. Если на производстве нет данных о производительности оборудования, то установка всех соответствующих коэффициентов в единичное значение также может приводить к отсутствую совместности всей системы (1)-(4). Отдельный случай связан со эпизодическими случайными ошибками в данных, которые являются следствием человеческого фактора или сбоями в системе сбора и обработки исторических данных. Отсутствие допустимых решений задачи (1)-(4) также может косвенно свидетельствовать об наличии подобных ошибок.

Таким образом, анализ исторических данных на наличие ошибок может быть построен на процедуре проверки совместности системы (1)-(4). Рассмотренный выше симплекс-метод формально позволяет дать ответ на вопрос об отсутствии совместности, однако не позволяет точно локализовать ограничения, которые привели к особому случаю. В качестве алгоритма проверки на совместность предлагается использовать итерационный метод ортогональных проекций Агмона-Моцкина [8]. Данный алгоритм выбирает некоторое решение, последовательно подставляет его в неравенства системы и, если находится нарушаемое ограничение, то за текущее решение системы принимается новый вектор, на котором достигается наименьшее отклонение от границ проверенных неравенств. Такая схема вычисления совместности позволяет идентифицировать и исключить из системы (3), (4) противоречия – ограничения, на которых происходит потеря совместности всей системы. Результатом работы метода ортогональных проекций являются: неравенства и соответствующие им производственные задания, в которых с высокой вероятностью находятся неточности или ошибки; скорректированная совместная система неравенств (3), (4); допустимое решение скорректированной системы, которое можно использовать в качестве стартового в симплекс-методе для решения задачи (1)-(5) расчета технологических норм времени.

Проблема представительной выборки производственных заданий

Как уже отмечалось выше, размер исторических данных опосредованно влияет на качество найденных норм времени – чем больше выборка различных производственных заданий, тем выше ожидаемое качество получаемых норм времени. Однако использование всего набора исторических данных в симплекс-методе может оказаться невозможным по причине ограниченности вычислительного ресурса. В соответствии с приведенными выше оценками (6) и исходя из лимитов времени на работу симплекс-метода можно оценить приемлемые размеры k выборки для заданного числа оборудования m и при известной константе K, которую можно определить экспериментально.

Таким образом, содержательно постановку задачи можно сформулировать так: для заданного L требуется из множества исторических данных требуется выбрать k различных производственных заданий, соответствующих m единицам оборудования, чтобы выполнялось условие:

$$k + m \leq L \tag{7}$$

Сформулируем требования к качеству выборки. Рассмотрим систему (3) из линейных неравенств. Вся система соответствует выпуклому многограннику в $(\mathrm{n} + m)$-мерном пространстве, при этом каждая грань многогранника порождена некоторым линейным ограничением, которому соответствует определенное производственное задание. При этом в общем случае не любое линейное ограничение порождает свою собственную грань в многомерном симплексе – подобные ограничения и соответствующие им производственные задания являются избыточными. Их присутствие в общей системе не влияет на область допустимых значений, но при этом их учет в процессе решения задачи отнимает вычислительные ресурсы. В общем случае идентифицировать подобные избыточными производственные задания является нетривиальной проблемой, но можно предложить типовые требования к данным с простыми алгоритмами распознавания избыточности.

Очевидное требование связано с попарной линейной независимостью ограничений в системе. Для формализации этого требования удобно представить систему неравенств (3) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_{11} & \dots b_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_{21} & \dots b_{2m} \\ & & \dots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} & b_{k1} & \dots b_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \\ y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_k \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $a_{li} = c_{li} p_{j(l)} \cdot q_{li} \cdot x_i,\ l = \overline{1,k},\ i = \overline{1,n}$;

$b_{lj} = \begin{cases} c_l, \text{ если } j = j(l) \\ 0, \text{ если } j \neq j(l), \end{cases}$ где $c_l = \sum_{i=1}^{n} c_{li}$, $l = \overline{1,k},\ j = \overline{1,m}$.

Из (7) следует, что любое l-е неравенство задается вектором вида

$$v_l = (a_{l1}, \ \dots \ , a_{ln}, b_{l1}, \dots , b_m, w_l),\ l = \overline{1,k}.$$

Тогда требование отсутствия попарной линейной зависимости неравенств (8) можно выразить через свойства: 1) два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны; 2) модуль скалярного произведения коллинеарных векторов равен произведению их длин.

$$|v_l v_q| \neq |v_l||v_r|, \text{ для } \forall\ l \neq r,\ l = \overline{1,k},\ r = \overline{1,k}. \tag{9}$$

Сформулируем еще одно условие идентификации избыточного неравенства. Рассмотрим пару векторов v_l и v_r, соответствующих l-у и r-у производственным заданиям. Пусть для компонент векторов v_l и v_q выполняются условия

$$\begin{gathered} a_{li} \leq a_{ri},\ i = \overline{1,n} \\ b_{lj} \leq b_{rj},\ j = \overline{1,m} \\ w_l = w_r \end{gathered} \tag{10}$$

С точки зрения ограничений системы (8) это означает, что если некоторые значения технологических норм x и y являются удовлетворяют r-у неравенству, то тогда следует, что они будут удовлетворять l-у. С точки зрения производства это означает, что r-е производственное задание характеризуется более высокой загрузкой в сравнении с l-м производственным заданием. Таким образом, l-е производственное заданием является более «мягким» условием, и соответственно является избыточным при наличии в системе ограничения r.

Сформулируем условие (10) для общего случая, когда отсутствует условие на равенство рабочих периодов w_l и w_r производственных заданий. Для этого нормируем ограничения по соответствующим значениям рабочих периодов, получаем

$$\begin{aligned} \frac{a_{li}}{w_l} \le \frac{a_{ri}}{w_r},\ i = \overline{1,n} \\ \frac{b_{lj}}{w_l} \le \frac{b_{rj}}{w_r},\ j = \overline{1,m} \end{aligned} \quad (11)$$

Очевидно, когда для всех коэффициентов (11) имеет место равенство, тогда соответствующие ограничения l и rнаходится в линейной зависимости. Следовательно, условие (11) является также условием проверки требования (9).

Алгоритм удаления избыточных производственных заданий

Рассмотрим алгоритм удаления избыточных производственных заданий из исторических данных. Технически алгоритм должен перебрать всевозможные пары производственных заданий, для каждой выполнить проверку условий (11) и в случае определения избыточного производственного задания не помещать его в результирующую выборку. Проблема такого подхода в высоких издержках по времени работы, которые оцениваются как произведение затрат на проверку (11) и квадрата от размера исторических данных:

$$O\big((n+m)l^2\big). \quad (12)$$

Частично вычислительные издержки можно сократить за счет приведения системы (8) к виду:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} & b'_{11} & \dots & b'_{1m} \\ a'_{21} & \dots & a'_{2n} & b'_{21} & \dots & b'_{2m} \\ & & \dots & & & \\ a'_{k1} & \dots & a'_{kn} & b'_{k1} & \dots & b'_{km} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \\ y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $a'_{li} = \frac{a_{li}}{w_l},\ i = \overline{1,n}; b'_{lj} = \frac{b_{lj}}{w_l},\ j = \overline{1,m};\ l = \overline{1,k}$.

При этом время работы алгоритма удается уменьшить за счет применения иной вычислительной схемы, при которой происходит не удаление избыточных производственных заданий, а наоборот – осуществляется формирование подмножества без избыточных элементов. Однако в общем случае квадратичная зависимость времени фильтрации исторических данных (12) сохраняется.

Проблема разбиения исторических данных на независимые выборки производственных заданий

Как уже отмечалось, использование всего набора исторических данных даже с учетом отбрасывания избыточных производственных заданий не дает гарантий получения выборки, удовлетворяющего ограничению по объему (7). В результате возникает вопрос по каким принципам можно было бы осуществлять выбор ограниченного числа производственных заданий, которое бы обеспечило максимальное качество получаемых норм времени. Ответ к обозначенному вопросу можно найти в структуре матрицы коэффициентов системы (13), состоящей из двух подматриц:

$$A' = (a'_{li})_{l\times n} \text{и } B' = (b'_{lj})_{l\times m}$$

Данные матрицы на практике оказываются существенно разреженные. Матрица B' по построению в каждой строке содержит ненулевые значения только в столбцах, соответствующих исполнителям производственных заданий – сменно-суточные задания, как правило, определяются для единственного исполнителя. Разреженность матрицы A'объясняется тем, что оборудование (исполнитель) редко получает работы различных видов. В основном исполнители работ, включая персонал, оборудование, участки или цеха, специализируются только на отдельных видах работ. Перемножив транспонированную матрицу B' на матрицуA', получим матрицу $E = (e_{ji})_{m\times n}$, в которой каждый элемент e_{ji} показывает интенсивность загрузки j-о оборудовании i-м видом работ:

$$E = B'^{T} A'$$

Отметим, что по построению каждая строка матрицы E соответствует набору производственных заданий, завязанных на соответствующем оборудовании. Таким образом, каждой j-й строке матрицы E можно ассоциировать число u_j, которое показывает размер соответствующего набора (общее число производственных заданий, связанных с оборудованием j)

$$u_j = \sum_{l=1}^{k} \begin{cases} 1, \text{ если } b'_{lj} \neq 0; \\ 0, \text{ если } b'_{lj} = 0; \end{cases}, \quad j = \overline{1,m} \tag{14}$$

Если матрицу E перестановкой строк и столбцов можно привести к блочному виду:

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

где «0» – это подматрицы соответствующих размеров, состоящие из только нулевых значений, то можно утверждать, что исходная задача (1)-(5) размером (k,m)распадается на две независимые подзадачи(k_1,m_1) и (k_2,m_2).

Это происходит по той причине, что имеют место группы исполнителей (оборудования), которые не пересекаются с точки зрения видов исполняемых операций. Поэтому данные задачи можно решать независимо. На основании (6) выигрыш в затратах по времени на решение общей задачи можно обосновать так:

$$((k_1 + k_2) + 2(m_1 + m_2))^3 < (k_1 + 2m_1)^3 + (k_2 + 2m_2)^3 \Rightarrow$$
$$T(k_1,m_1) + T(k_2,m_2) < T((k_1 + k_2, m_1 + m_2)$$

Рассмотрим алгоритм разбиения исторических данных на независимые выборки.

Алгоритм разбиения исторических данных на независимые выборки производственных заданий

Технически проблему разбиения исторических данных на независимые выборки можно сформулировать в терминах разбиения графов на связные компоненты. Дело в том, что от матрицы $E = (e_{ji})_{m\times n}$ просто перейти к гиперграфу (V, H), где V – множество из n вершин соответствует столбцам, а H – множество гиперребер, где каждое гиперребро $h_j \in H$ соответствует строки j матрицы E

$$h_j = \{v_i \in V | e_{ji} \neq 0, i = \overline{1,n}\}$$

В результате задача выделения в матрице E блочной структуры свелась к разбиению гиперграфа на две (или более) связных компонент. Данная задача имеет эффективный алгоритм решения, основный на построении корневой структуры смежности [9]. Алгоритм на вход получает представление гиперграфа (V, H) в виде списков смежности вершин двудольного графа Кёнига [10]. Алгоритм стартует с произвольной вершины (корня), помечает эту вершину и помещает ее в очередь. Пока очередь не пуста, алгоритм извлекает очередную вершину из очереди, перебирает не помеченные смежные к ней вершин, помечает их и помещает в очередь. Результатом работы алгоритма является разбиение графа на множество помеченных и непомеченных вершин. Если в результате работы алгоритма оказывается помеченным все множество вершин, то граф представлен единственной связной компонентой.

Легко увидеть, что вычислительная сложность данного алгоритма оценивается как число ребер двудольного графа Кёнига, что соответствует числу ненулевых коэффициентов разреженной матрицы E. Степень разреженности зависит от специфики производства. Если оно построено на базе специализированного оборудования, для которого перечень исполняемых видов работ существенно ограничен и не зависит от масштабов производства, имеем право ожидать линейную оценку времени работы алгоритма от вершин в двудольном графа Кёнига $O(n+m)$.

Проблема разбиения исторических данных на минимально зависимые выборки производственных заданий

Как было показано выше, отбрасыванием избыточных и разбиением исторических данных на независимые выборки производственных заданий удается сократить размеры решаемых задач без потери в качестве. Однако описанные решения не гарантируют получения выборки, удовлетворяющей требование по объему (7). Для учета этого требования очевидно придется жертвовать качеством выборки. Сформулирует метрику, которая позволит количественно определять качество выборки. В предыдущем параграфе от матрицы коэффициентов производственных заданий перешли к матрице $E=(e_{ji})_{m\times n}$, в которой каждая строка j соответствует группе производственных заданий, в которых было использовано оборудование j. Коэффициенты e_{ji} фактически определяют интенсивность загрузки оборудования по видам работ. Чем больше величина e_{ji}, тем интенсивнее оборудование j используется для исполнения операций вида i. И наоборот: чем меньше величина e_{ji}, тем реже оборудование j назначается на исполнение операций i-о вида в силу разных производственных аспектов. В пределе нулевое значение e_{ji}=0 указывает, на то, что оборудование j не выполняло или не предназначено для выполнения i-о вида операций. Таким образом, величину e_{ji} можно трактовать как значимость связи между j-м оборудованием и операцией i-о вида. Допустим, что для матрицы E не существует разбиения на независимые блоки вида (15). Очевидно, последовательным отбрасыванием ненулевых коэффициентов матрицы E можно получить такую матрицы E', которую можно разбить на независимые задачи. Каждое такое отбрасывание ненулевого коэффициента – это квант информации, который может опосредовано повлиять на расчет норм времени. Чем больше значение отбрасываемого коэффициента, тем выше его влияние на соответствующие нормы времени.

Таким образом, мерой для оценки произвольной выборки производственных заданий может служить сумма всех коэффициентов в соответствующей матрице интенсивности загрузки оборудования по видам работ:

$$I(E)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}e_{ji}. \tag{16}$$

Максимальное значение данная мера достигает на всем наборе исторических данных. В этом случае содержательно проблема заключается в поиске суммарно минимального набора отбрасываемых коэффициентов матрицы E, при котором получаемая матрица приводима к блочному виду (15).

Поставим задачу формально. В качестве исходных данных в задаче выступают: матрица интенсивности использования оборудования по видам работ $E=(e_{ji})_{m\times n}$; вектор

$u = (u_1, \dots, u_m)$, где u_j показывает число (14) производственных заданий в исторических данных для оборудования j; натуральное число $L \in N$ – характеризует предельный размер задачи для симплекс-метода (7). В качестве решения принимается бинарный вектор $z = (z_1^a, \dots, z_n^a, z_1^b, \dots, z_m^b)$, где каждый компонент z_i^a соответствует столбцу с номером i матрицы E, каждый компонент z_j^b соответствует строке с номером j матрицы E, а значение указывает на блок, в который распределяется соответствующая строка или столбец матрицы E:

$$z = (z_1^a, \dots, z_n^a, z_1^b, \dots, z_m^b),\ \ z_i^a, z_j^b \in \{0,1\},\ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}. \tag{17}$$

Так как подграфы разбиения не должны быть пусты, имеем:

$$0 < \sum_{i=1}^{n} z_i^a + \sum_{j=1}^{m} z_j^b < n + m. \tag{18}$$

Примем в качестве первого блока разбиения примем искомую выборку. Тогда ограничение (7) на предельный размер выборки можно сформулировать в следующем виде

$$K(z) + 2M(z) \le L, \tag{19}$$

где $K(z) = \sum_{j=1}^{m} u_j z_j^b$; $M(z) = \sum_{j=1}^{m} z_j^b$

Система ограничений (17)-(19) задает множество допустимых решений Z. Для оценки качества решений определим коэффициенты, которые попадают в формируемые блоки (15) матрицы, согласно некоторому допустимому разбиению $z \in Z$. Сумма коэффициентов блока «1» (соответствует «1» в решении z) можно определить по выражению:

$$I_1(E, z) = z_j^b \sum_{i=1}^{n} e_{ji} z_i^a$$

Соответствующую сумму коэффициентов блока «0» (соответствует «0» в решении z) можно определить так:

$$I_0(E, z) = (1 - z_j^b) \sum_{i=1}^{n} e_{ji} (1 - z_i^a)$$

Зная сумму всех коэффициентов (16) исходной матрицы, легко вычислить сумму отбрасываемых значений, которую требуется минимизировать:

$$\begin{gathered} F(E, z) = I(E) - I_1(E, z) - I_2(E, z) = \\ = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} e_{ji} - z_j^b \sum_{i=1}^{n} e_{ji} z_i^a - (1 - z_j^b) \sum_{i=1}^{n} e_{ji} (1 - z_i^a) = \\ = z_j^b \sum_{i=1}^{n} e_{ji} (1 - z_i^a) + (1 - z_j^b) \sum_{i=1}^{n} e_{ji} z_i^a \underset{z \in Z}{\longrightarrow} min \end{gathered} \tag{20}$$

В итоге формализацию (17)-(20) будем называть проблемой разбиения исторических данных на минимально зависимые выборки производственных заданий. Данная задача технически формулируется в терминах разбиения взвешенного графа G=(V, Q, u, e), где V – множество вершин, состоящее из двух подмножеств $V = V^a \cup V^b$; $V^a = \{v_1^a, \dots v_n^a\}$ – подмножество вершин первой доли двудольного графа соответствует столбцам матрицы E, которые в свою очередь соответствуют видам работ; $V^b = \{v_1^b, \dots v_m^b\}$ – подмножество вершин второй доли двудольного графа соответствует столбцам матрицы E, которые в свою очередь соответствуют оборудованию; $Q = \left\{ \{v_i^a, v_i^b\} \middle| e_{ji} \neq 0, v_i^a \in V^a, v_j^b \in V^b \right\}$ – ребра связывают вершины из разных долей графа и соответствуют ненулевым коэффициентам матрицы E;отображение u определяет веса $u(v_j^b) = u_j$ для вершин $v_j^b \in V^b$и нулевые веса $u(v_i^a) = 0$ вершин $v_i^a \in V^a$ принимаются равным 0;симметричное отображение e определяет веса для ребер$e(v_i^a, v_j^b) = e(v_i^b, v_i^a) = e_{ji}$.В задаче требуется распределить все вершины двудольного графа по двум подмножествам (V_0, V_1) – они соответствуют блокам матрицы.

В результате постановку задачи (17)-(20) можно записать в следующем виде:

$$V_0 \cup V_1 = V,\ V_0 \cap V_1 = \emptyset, V_0 \neq \emptyset, V_1 \neq \emptyset, \tag{21}$$

$$\sum_{v \in V_1} u(v) + \|V_1 \cap V^b\| \leq L, \tag{22}$$

$$\sum_{\substack{\{v_i, v_j\} \in Q \\ v_i \in V_0, v_j \in V_1}} e(v_i, v_j) \xrightarrow[(V_0, V_1)]{} min \tag{23}$$

Задача (21)-(23) является известной NP-трудной задачей 2-разбиения графа [11,12]. Соответственно ее аналог – задача (17)-(20) также является NP-трудной.

Многоуровневые эвристики для разбиения исторических данных на минимально зависимые выборки производственных заданий

Обратим внимание на полученный парадокс – в попытке упростить или снизить сложность решения полиноминально разрешимой задачи расчета технологических норм времени (1)-(5) мы пришли к необходимости разбиения исторических данных, при этом эффективного алгоритма поиска минимально зависимых выборок из предположения что NP≠P не существует (пока не доказано обратное утверждение). Однако из этого не следует, что задача (1)-(5) не может быть решена в принципе, это только означает, что нужно подобрать компромиссный вариант приближенного или эвристического алгоритма поиска решения задачи (17)-(20), который в рамках выделенного времени обеспечит нахождение выборок из исторических данных приемлемого качества.

В качестве метода решения задачи (17)-(20) предлагается многоуровневый метод. Для задач 2-разбиения графа разработано большое разнообразие алгоритмов, основанных на многоуровневой оптимизации [13, 14]. Их главным преимуществом является относительно невысокая вычислительная сложность, что обеспечивает возможность решать задачи больших порядков. В основе любого многоуровневого графового алгоритма заложена идея последовательной редукции графа, которая позволяет поэтапно перейти от большеразмерной задачи к задаче приемлемого порядка. Такой подход открывает перспективы для интеграции в общую схему решения задачи разнообразных алгоритмов. Например, на этапах поиска разбиения редуцированной задачи можно использовать качественные приближенные или даже точные методы [15], а найденные решения можно последовательно переносить на исходный граф, активно применяя при этом методы локальной оптимизации.

Общая схема расчета технологических норм времени

Из приведенных рассуждений следует, что практическая реализация технологии анализа производственных заданий с целью расчета пооперационных технологических норм возможна и предполагает решение целого комплекса задач. Рассмотрим общую схему расчета технологических норм времени (рис. 1).

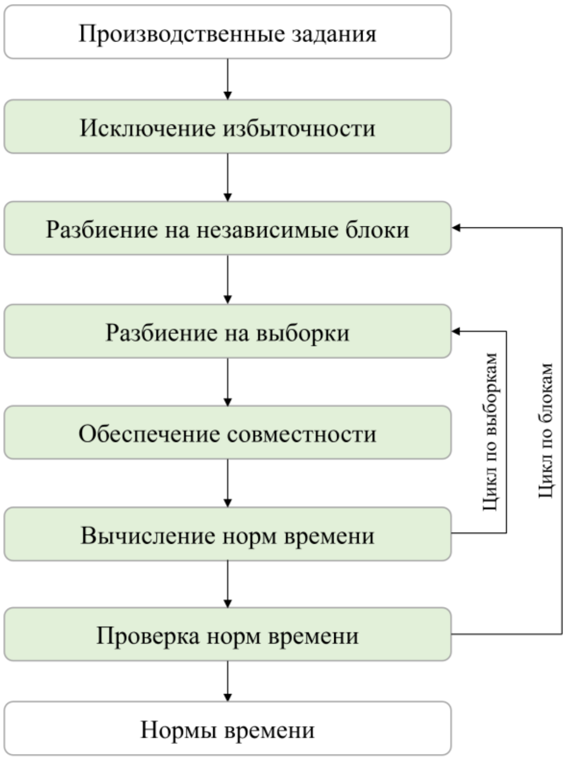

Рис. 1. Общая схема расчета технологических норм времени

Fig.1. General scheme for calculating technological time norms

В качестве входных данных выступают оцифрованные производственные задания, накопленные в течении определенного периода времени. Дополнительно может быть предоставляться информация о графиках работы и статистика фактической загрузки производственных подразделений, рабочих центров, оборудования, персонала. На этапе «Производственные задания» вся исходная информация преобразуется в исходные неравенства вида (3) и (4). Далее, на следующем этапе «Исключение избыточности» исходные неравенства преобразуются к виду (13), и при помощи алгоритма удаления избыточных производственных заданий осуществляется формирование новой системы без избыточных элементов.

Отфильтрованная система неравенств вида (13) поступает на следующий этап «Разбиения на независимые блоки», где алгоритмом разбиения исторических данных осуществляется выделение независимых выборок, для каждой формируется собственная система неравенств вида (13). Каждая выборка в виде системы неравенств (13) проходит через этап «Обеспечение совместности», где итерационным методом ортогональных проекций Агмона-Моцкина осуществляется проверка на совместность системы, идентифицируются и отбрасываются противоречивые ограничения. Затем каждая выборка в виде совместной системы неравенств (13) отправляется на этап «Вычисления норм времени», где формируется и при помощи симплекс-метода решается задача вида (1)-(5), вычисляются оценки технологических норм времени.

Поскольку на этапах «Разбиения на независимые блоки» и «Обеспечение совместности» была отброшена часть информации, на этапе «Проверка норм времени» осуществляется подстановка полученных оценок технологических норм времени во все исходные неравенства. В качестве результатов анализа на этапе «Нормы времени» Пользователю будет доступна не только информация в виде рассчитанных оценок технологических норм времени, но и также перечень «подозрительных на наличие ошибок» производственных заданий, соответствующих противоречивым неравенствам.

Заключение

Сформулирована и рассмотрена проблема выверки и коррекции пооперационных технологических норм времени. На концептуальном уровне описана технология практического преодоления обозначенной проблемы за счет анализа исторических данных работы производства за некоторый период. Построена математическая модель и поставлена задача линейной оптимизации, решение которой обеспечивает нахождение оценок пооперационных технологических норм времени. Выполнен анализ потенциальных проблем, связанных с извлечением минимального возможного набора исходных данных реального производства, главная из них связана с большим объемом исходных данных. Предложены эффективные методы исключения избыточных данных и декомпозиции данных на независимые выборки. Описаны методы разбиения данных на выборки требуемых размеров по критерию минимизации информационных потерь. Предложены алгоритмы работы с данными, содержащие ошибки. Описана общая схема расчета технологических норм времени. Таким образом, реализация и внедрение предложенного решения позволит обеспечить инженеров-технологов дополнительным инструментом для анализа, верификации, выверки и коррекции пооперационных технологических норм времени. В итоге упростится внедрение средств автоматизации планирования и оперативного управления производством и повысится качество работ.

Библиографический список

1. **Афраймович, Л.Г.** Задачи планирования и оперативного управления процессом изготовления интегральных схем с микронными и субмикронными топологическими нормами / Л.Г. Афраймович, В.С. Власов, М.С. Куликов, М.Х. Прилуцкий, Д.В. Седаков, Н.В. Старостин, А.В. Филимонов // Автоматизация в промышленности. 2014. № 8. С. 17-21.
2. **Афраймович, Л.Г.** Планирование и оперативное управление процессом изготовления сложных изделий / Л.Г. Афраймович, В.С. Власов, М.С. Куликов, М.Х. Прилуцкий, Н.В. Старостин, А.В. Филимонов // XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. 2014. С. 5138-5149.
3. **Прилуцкий, М.Х.** Распределение производственных ресурсов в задачах объемного планирования в условиях неполноты данных / М.Х. Прилуцкий, О.В. Кривошеев // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2022. № 2 (137). С. 36-43.
4. **Малюк, В. И.** Производственный менеджмент: учебное пособие / В.И. Малюк, А.М. Немчин. – СПб.: Питер, 2008. – 288 с.
5. **Хачиян, Л. Г.** Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. Т. 20. № 1. С. 51-68.
6. **Karmarkar, N.** A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming. STOC '84: Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing. 1984. P. 302-311
7. **Игумнов, Л.А.** Проблема существования решения у большеразмерных задач линейного программирования / Л.А. Игумнов, М.Х. Прилуцкий // Информационные системы и технологии ИСТ-2020. Сборник материалов XXVI Международной научно-технической конференции. – Н. Новгород: НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2020. С. 825-829.
8. **Borgwardt, K.** The Simplex Method: A Probabilistic Analysis. Algorithms and Combinatorics. Vol 1. Springer Berlin Heidelberg, 1987. – 220 p.
9. **Джордж, А.** Численное решение больших разреженных систем уравнений / А. Джордж, Дж. Лю. – М.: Мир, 1984. – 333 с.
10. **Меликов, А.М.** Применение графов для проектирования дискретных устройств / А.М. Меликов, Л.С. Бернштейн, В.М. Курейчик. – М.: Наука, 1974. – 304 с.
11. **Батищев, Д.И.** K-разбиение графов / Д.И. Батищев, Н.В. Старостин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление. 2000. № 1. С. 27-35.
12. **Батищев, Д.И.** Гибридный подход к решению экстремальных задач на графовых структурах. Д.И. Батищев, Н.В. Старостин // Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ. 2002. № 3. С. 10-17.

13. **Batischev, D.L.** Multilevel hypergraph partitioning / D.L. Batischev, N.V. Starostin, A.V. Filimonov // Information Technologies. 2008. № S5. С. 1-32.
14. **Старостин, Н.В.** Многоуровневый итерационный алгоритм декомпозиции графа // Системы управления и информационные технологии. 2015. № 3 (61). С. 27-30.
15. **Старостин, Н.В.** Разработка и реализация точного алгоритма сбалансированного разбиения графа / Н.В. Старостин, Е.С. Сударский // Информационные системы и технологии ИСТ-2020. Сборник материалов XXVI Международной научно-технической конференции. – Н. Новгород: НГТУ им. Р.Е. Алексеева, 2020. С. 870-874.

Дата поступления
в редакцию: 08.08.2023

Дата принятия
к публикации: 01.11.2023