

# ИНФОРМАТИКА И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

УДК 53.072

EDN: AQHPLU

## ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО УДАРА С ПОМОЩЬЮ СИМВОЛЬНОГО ПРОЦЕССОРА MATHCAD

Е.А. Никулин

ORCID: 0000-0002-2520-681X e-mail: nea2nea@ya.ru

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева  
*Нижний Новгород, Россия*

Представлено исследование физических аспектов столкновения двух тел, в результате которого впервые получены прямые зависимости скоростей отскока тел от коэффициента восстановления при нецентральной ударе и определены условия отсутствия отскока при абсолютно неупругом столкновении. Привлечение символьного процессора MathCAD 15 для вывода сложных формул позволило снизить трудоемкость процесса, избежать возможных ошибок ручного вывода и повысить достоверность полученных результатов.

**Ключевые слова:** удар, коэффициент восстановления, MathCAD, символьный процессор.

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Никулин, Е.А. Исследование механического удара с помощью символьного процессора MathCAD // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2024. № 1. С. 7-15. EDN: AQHPLU

## RESEARCH OF MECHANICAL IMPACT USING MATHCAD SYMBOLIC PROCESSOR

E.A. Nikulin

ORCID: 0000-0002-2520-681X e-mail: nea2nea@ya.ru

Nizhny Novgorod state technical university n.a. R.E. Alekseev  
*Nizhny Novgorod, Russia*

**Abstract.** The paper presents a study of the physical aspects of the collision of two bodies. The direct dependences of the rebound velocities on the coefficient of restitution for an off-center collision were obtained for the first time, and the conditions were determined under which there is no rebound in a perfectly inelastic collision. The MathCAD 15 symbolic processor for deriving complex formulas made it possible to simplify this time-consuming process, avoid possible manual derivation errors and increase the reliability of the results obtained.

**Key words:** collision, coefficient of restitution, MathCAD, symbolic processor.

**FOR CITATION:** Nikulin E.A. Research of mechanical impact using MathCAD symbolic processor. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2024. № 1. Pp. 7-15. EDN: AQHPLU

### Введение

Явление механического удара присутствует в любой компьютерной программе, моделирующей движение нескольких взаимодействующих объектов. В результате столкновений подвижные объекты изменяют свои скорости и траектории дальнейшего движения. Правильный расчет этих параметров, максимально близких к реалиям окружающего мира, является важнейшей задачей физического моделирования.

Изучение механического удара входит в программу курса физики для вузов [1-4], но редко доведено до полного исследования вопросов, связанных с понятием *коэффициента восстановления*, иногда ограничиваясь простейшими случаями центрального и абсолютно упругого удара [1]. Наиболее детальное исследование представлено в [5], где, однако, спутаны векторная и скалярная величины при вычислении проекции одного вектора на другой.

В настоящей работе выполнено полное исследование механического удара с помощью т.н. символьного процессора программы MathCAD, что позволило избежать ошибок ручного вывода. Программа MathCAD набирает популярность благодаря компактности записи формул, максимально близкой к естественному математическому языку, простоте построения всех видов графиков и способности к символьным вычислениям [6]. Результаты последних выводятся справа от знака символьного равенства « $\rightarrow$ ». При этом широко используются символьные операторы solve (решить), simplify (упростить), factor (разложить на множители) и блок решения системы уравнений, записанных между ключевым словом Given (дано) и встроенной функцией Find (найти).

### Центральный удар

В качестве объектов исследования примем простейшие объемные тела – шары с массами  $\{m_1, m_2\}$ , радиусами  $\{r_1, r_2\}$ , векторами центров  $\{c_1, c_2\}$  и скоростями в начале столкновения  $\{v_1, v_2\}$  (рис. 1, а). Сначала изучим *центральный* (прямой) удар, при котором все скорости направлены по линии  $c_1c_2$ , соединяющей центры шаров. Если одно из тел (допустим, второе) значительно массивнее другого, будем полагать его массу  $m_2 = \infty$  (в MathCAD это не символ бесконечности, а встроенная переменная  $\infty = 10^{307}$ ). Можно полагать это сверхмассивное тело как шаром, так и плоской стенкой (рис. 1, б) с вектором нормали  $N$ , параллельно которому направлены все скорости.

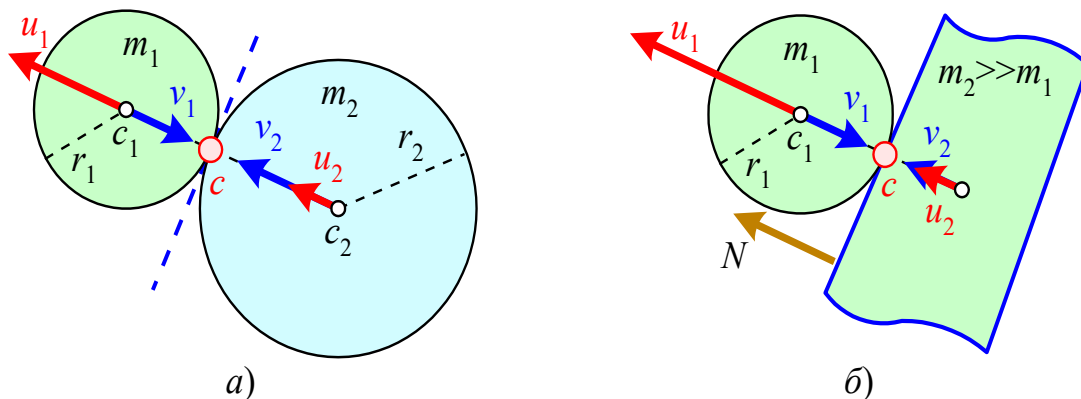


Рис. 1. Центральный удар

Fig. 1. Central collision

Требуется найти скорости  $\{u_1, u_2\}$  отскока тел в конце ударного взаимодействия. При центральном ударе эти скорости также направлены параллельно вектору нормали к поверхностям в точке касания  $c$ . Во всех исследованиях различных типов ударов будем полагать бесконечно малой длительность контакта тел и отсутствие остаточных деформаций их формы. При абсолютно упругом (идеальном) ударе отсутствуют потери суммарных импульса и кинетической энергии. На основе этих двух законов сохранения в MathCAD символьно выводятся формулы конечных скоростей тел:

$$\begin{aligned}
 p &:= m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 & K &:= (m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2) \div 2 \\
 \text{Given } p &= m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 & K &= (m_1 \cdot u_1^2 + m_2 \cdot u_2^2) \div 2 \\
 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &:= \text{Find}(u_1, u_2)^{\langle 1 \rangle} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_1 + 2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \\ \frac{2 \cdot m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_2 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \end{pmatrix} & (1)
 \end{aligned}$$

Здесь и далее переменные  $p$  и  $K$  обозначают суммарные начальные импульс и кинетическую энергию двух тел. Результат символьного расчета:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

формируется в 1-ом столбце составной  $2 \times 2$ -матрицы, возвращаемой функцией *Find* (неинтересный нам 0-ой столбец содержит скорости  $\{u_1=v_1, u_2=v_2\}$  в отсутствие столкновения).

Способность символьного процессора MathCAD вычислять пределы позволяет легко получить частные случаи решения (1):

$$\lim_{m_1 \rightarrow m_2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot v_2 - v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \lim_{v_2 \rightarrow 0} \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Все они очевидны из жизненного опыта и без вычислений пределов:

- тела с равными массами  $m_1=m_2$  при лобовом ударе обмениваются скоростями  $\{u_1=v_2, u_2=v_1\}$  (как в занимательной игрушке «Маятник Ньютона»);
- тело бесконечной массы  $m_2=\infty$  после удара сохраняет свою скорость  $u_2=v_2$  и отталкивает первое тело со скоростью  $-v_1$ , добавляя к ней удвоенную собственную скорость  $2v_2$ ;
- если к тому же второе массивное тело неподвижно ( $v_2=0$ ), то оно так и остается неподвижным, а первое тело отскакивает от него с противоположной скоростью  $-v_1$ .

Другая идеализация – *абсолютно неупругий удар*, при котором тела не отскакивают друг от друга, а как бы «слипаются» в общую массу  $m_1+m_2$ , которая по закону сохранения суммарного импульса продолжает двигаться с общей скоростью  $u$ :

$$u := p = (m_1 + m_2) \cdot u \text{ solve, } u \rightarrow \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

При равных массах тел скорость движения «слипшегося» тела двойной массы равна среднему значению скоростей столкнувшихся тел  $(v_1+v_2)/2$ , а при ударе тела с массой  $m_1$  о тяжелое тело с массой  $m_2 \gg m_1$  последнее не изменяет скорости движения  $u=v_2$ , в том числе, остается неподвижным при  $v_2=0$ :

$$\lim_{m_1 \rightarrow m_2} u \text{ factor} \rightarrow \frac{v_1 + v_2}{2} \quad \lim_{m_2 \rightarrow \infty} u \rightarrow v_2 \quad \lim_{v_2 \rightarrow 0} \lim_{m_2 \rightarrow \infty} u \rightarrow 0$$

И если, в отличие от (1), скорость  $u$  в (2) выводится только из закона сохранения импульса, вполне логично ожидать невыполнения закона сохранения кинетической энергии, вычислив ее потерю от начала до конца центрального абсолютно неупругого удара:

$$K - (m_1 + m_2) \cdot u^2 \div 2 \text{ factor} \rightarrow \frac{m_1 \cdot m_2 \cdot (v_1 - v_2)^2}{2 \cdot (m_1 + m_2)}$$

Эта разность пошла на увеличение внутренней энергии, деформацию и нагрев обоих

тел. В действительности при ударе часть внутренней энергии сжатия возвращается телам при отскоке, увеличивая разницу между конечными скоростями  $u_1$  и  $u_2$ . Количественно это частичное восстановление кинетической энергии тел после удара характеризуется *коэффициентом восстановления* (КВ) конечной разности скоростей  $u_2 - u_1$  относительно начальной разности  $v_2 - v_1$ :

$$u_2 - u_1 = k_B (v_1 - v_2). \quad (3)$$

Отметим ошибочность предлагаемой в [4, 5] формулы  $k_B = (u_2 - u_1) / (v_1 - v_2)$  из-за неопределенности операции деления векторов. В частном случае неподвижной стенки ( $v_2 = u_2 = 0$ ) КВ связывает длины противоположно направленных векторов скоростей падения  $v_1$  и отражения  $u_1$  соотношением  $u_1 = -k_B v_1$ .

Экспериментально численное значение  $k_B = \sqrt{h_{k+1} / h_k}$  определяется по отношению максимальных высот соседних отскоков упругого шара от горизонтального пола, измеряемых по нижнему краю шара. Для ваты  $k_B = 0$ , дерева  $-1/2$ , стали  $-5/9$ , слоновой кости  $-8/9$ , стекла  $-15/16$ . При столкновении тел из разных материалов логично брать минимальный из двух КВ. Ручной вывод зависимостей векторов скоростей  $u_1(k_B)$  и  $u_2(k_B)$  от КВ достаточно трудоемок, а символьный процессор MathCAD, исходя из закона сохранения суммарного импульса и уравнения (3), справляется с этим без затруднения:

$$\begin{aligned} \text{Given } p &= m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \quad u_2 - u_1 = k_B \cdot (v_1 - v_2) \quad U := \text{Find}(u_1, u_2) \\ u_1(k_B) &:= U_0 \rightarrow \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 - k_B \cdot m_2 \cdot v_1 + k_B \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \\ u_2(k_B) &:= U_1 \rightarrow \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 + k_B \cdot m_1 \cdot v_1 - k_B \cdot m_1 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (4)$$

Правильность вывода (4) подтверждается совпадением предельных случаев с приведенными выше свойствами абсолютно упругого ( $k_B = 1$ ) и абсолютно неупругого ( $k_B = 0$ ) ударов:

$$\begin{aligned} \lim_{m_1 \rightarrow m_2} \begin{pmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{pmatrix} \text{ simplify} &\rightarrow \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} & \lim_{m_1 \rightarrow m_2} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} \text{ factor} &\rightarrow \begin{pmatrix} \frac{v_1 + v_2}{2} \\ \frac{v_1 + v_2}{2} \end{pmatrix} \\ \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot v_2 - v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \lim_{v_2 \rightarrow 0} \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -v_1 \\ 0 \end{pmatrix} & \lim_{v_2 \rightarrow 0} \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

### Нецентральный удар

Большинство столкновений тел происходит в произвольных направлениях скоростей  $\{v_1, v_2\}$ , и при их непараллельности с вектором нормали  $N$  в точке касания с удар является *нецентральным* (косым) (рис. 2).

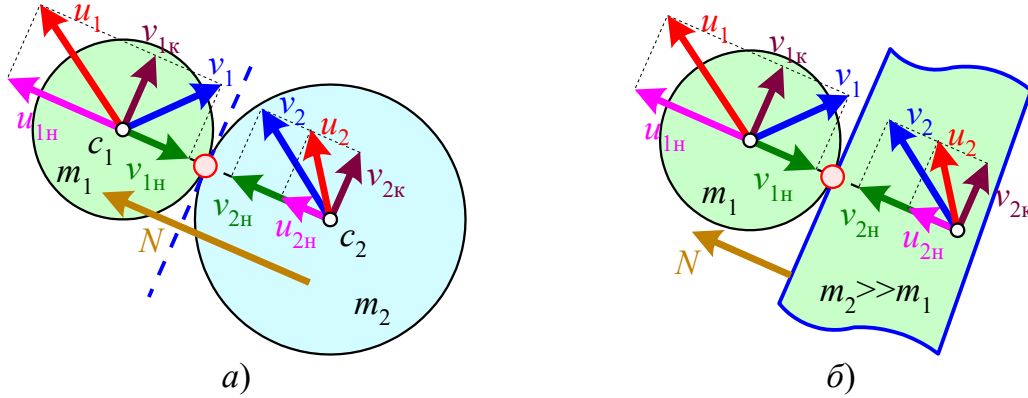


Рис. 2. Нецентральный удар

Fig. 2. Off-center collision

Поскольку в (3) коэффициент восстановления определен для векторов скоростей, параллельных вектору нормали  $N$ , то необходимо разложить векторы  $\{v_1, v_2\}$  на суммы нормальных и тангенциальных (касательных) составляющих  $\{v_{1n}, v_{2n}\}$  и  $\{v_{1k}, v_{2k}\}$ . Для этого определим в MathCAD векторные функции  $pr(v, N)$  проекции вектора  $v$  на вектор  $N$  и  $od(v, N)$  ортогонального дополнения (перпендикуляра) вектора  $v$  к вектору  $N$  [7]:

$$pr(v, N) := \frac{v \cdot N}{N \cdot N} N \quad od(v, N) := v - pr(v, N)$$

Здесь знак умножения « $\cdot$ » векторов означает их скалярное произведение. Еще раз отметим, что в [5] проекция вектора  $v$  на вектор  $N$  ошибочно вычисляется как скаляр  $(v \cdot N)/(N \cdot N)$ . Теперь можно записать следующие разложения для начальных  $\{v_1, v_2\}$  и подлежащих нахождению конечных  $\{u_1, u_2\}$  векторов скоростей:

$$v_{1n} = pr(v_1, N), \quad v_{1k} = od(v_1, N) = v_1 - v_{1n}, \quad v_{2n} = pr(v_2, N), \quad v_{2k} = od(v_2, N) = v_2 - v_{2n}. \quad (5)$$

Далее из выдвинутого выше допущения, что время контакта тел равно нулю, из-за чего равна нулю и работа направленных по касательной сил трения, примем важную идеализацию ударного процесса, заключающуюся в равенстве касательных составляющих скоростей:

$$v_{1k} = u_{1k}, \quad v_{2k} = u_{2k}. \quad (6)$$

Решая символично систему аналогичных (4) уравнений совместно с (6), получим сложные зависимости скоростей  $\{u_1, u_2\}$  от коэффициента восстановления  $k_b$  и векторов  $v_{1n}$  и  $v_{2n}$ :

$$\begin{aligned} \text{Given} \quad & p = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \quad u_{2N} - u_{1N} = k_b \cdot (v_{1N} - v_{2N}) \\ & v_1 - v_{1N} = u_1 - u_{1N} \quad v_2 - v_{2N} = u_2 - u_{2N} \quad U := \text{Find}(u_1, u_2, u_{1N}, u_{2N}) \\ & u_1(k_b) := U_0 \text{ simplify} \rightarrow v_1 - \frac{m_2 \cdot v_{1N} - m_2 \cdot v_{2N} + k_b \cdot m_2 \cdot v_{1N} - k_b \cdot m_2 \cdot v_{2N}}{m_1 + m_2} \\ & u_2(k_b) := U_1 \text{ simplify} \rightarrow v_2 + \frac{m_1 \cdot v_{1N} - m_1 \cdot v_{2N} + k_b \cdot m_1 \cdot v_{1N} - k_b \cdot m_1 \cdot v_{2N}}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь доступны решения и для нормальных составляющих скоростей  $\{v_{1n}, v_{2n}\}$ :

$$\begin{aligned} u_{1N}(k_b) &:= U_2 \rightarrow \frac{m_1 \cdot v_{1N} + m_2 \cdot v_{2N} - k_b \cdot m_2 \cdot v_{1N} + k_b \cdot m_2 \cdot v_{2N}}{m_1 + m_2} \\ u_{2N}(k_b) &:= U_3 \rightarrow \frac{m_1 \cdot v_{1N} + m_2 \cdot v_{2N} + k_b \cdot m_1 \cdot v_{1N} - k_b \cdot m_1 \cdot v_{2N}}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$



Для получения аналогичных (1) формул прямых зависимостей конечных скоростей  $\{u_1, u_2\}$  от начальных скоростей  $\{v_1, v_2\}$  и исключения двойного расчета в (8) одинаковых фрагментов  $(1+k_b)(pr(v_1, N) - pr(v_2, N))/(m_1 + m_2)$ , сформируем окончательную функцию, вычисляющую скорости двух тел после их столкновения по двухшаговому алгоритму и возвращающую составной вектор  $[u_1 \ u_2]$ :

$$\text{удар}(m_1, m_2, v_1, v_2, N, k_b) := \begin{cases} w \leftarrow \frac{(1+k_b) \cdot (v_1 - v_2) \cdot N}{(m_1 + m_2) \cdot N \cdot N} \cdot N \\ (v_1 - m_2 \cdot w \quad v_2 + m_1 \cdot w) \end{cases} \quad (10)$$

Испытаем эту функцию на примерах расчета ударов с разными исходными данными.

### Программа и примеры

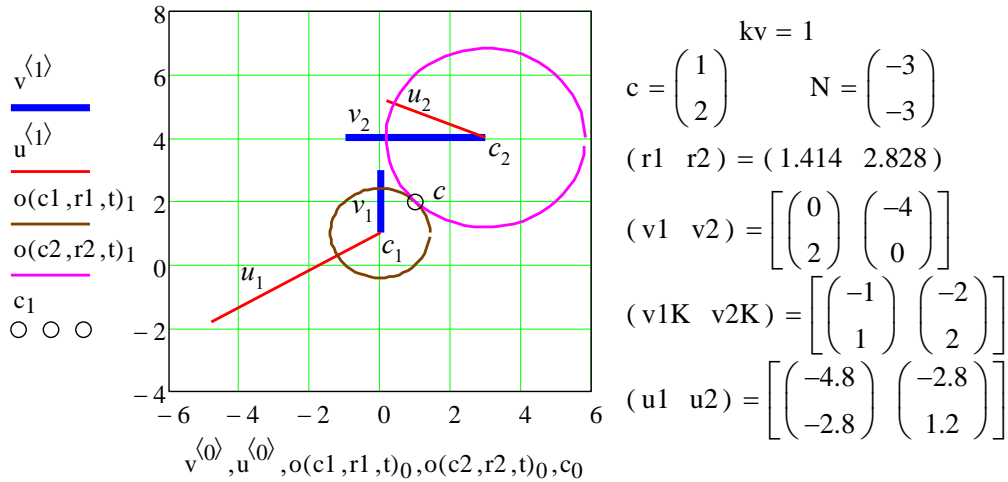
В приведенной ниже MathCAD-программе, работающей для наглядности в 2D-пространстве, вначале задаются исходные параметры двух окружностей (на желтом фоне):

- векторы положений центров  $\{c_1, c_2\}$  и скоростей в начале удара  $\{v_1, v_2\}$ ;
- массы  $\{m_1, m_2\}$  и коэффициент восстановления  $k_b$ .

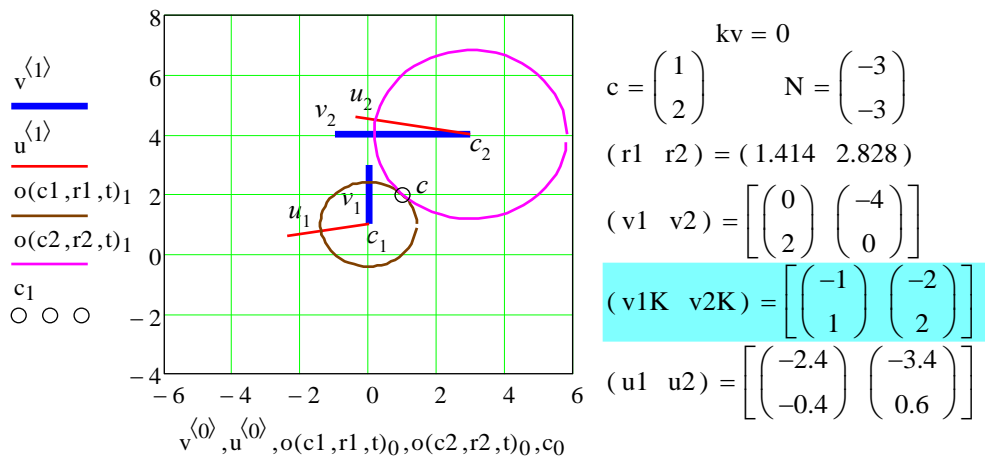
Далее вычисляются: вектор нормали к окружностям  $N=c_1-c_2$  в точке их касания, радиусы окружностей из условий  $m_1/m_2=r_1^2/r_2^2$  пропорциональности массы 2D-круга квадрату (при моделировании столкновений шаров в 3D-пространстве – кубу) его радиуса и  $r_1+r_2=|N|$  равенства суммы радиусов расстоянию между центрами, после чего становится возможным найти координаты точки касания  $c$  из пропорции  $|c-c_1|/|c_2-c|=r_1/r_2$  как корень векторного уравнения  $(c-c_1)r_2=(c_2-c)r_1$ . Теперь все готово для обращения к функции  $\text{удар}(m_1, m_2, v_1, v_2, N, k_b)$ , возвращающей строчный составной вектор  $[u_1 \ u_2]$  скоростей окружностей в конце удара. Для графической иллюстрации расположения обеих окружностей и направлений начальных и конечных векторов в момент удара определим векторную функцию  $o(c, r, t) = c + r[\cos(t) \ \sin(t)]^T$  и две составные матрицы точек  $v = [c_1 \ c_1 + v_1 \ \text{im} \ c_2 \ c_2 + v_2]$  и  $u = [c_1 \ c_1 + u_1 \ \text{im} \ c_2 \ c_2 + u_2]$ , где точка  $\text{im} = [i \ i]^T$  с мнимыми координатами ( $i$  – мнимая единица) используется для запрета вывода на XY-графике соединительных отрезков между окружающими ее точками.

$$\begin{aligned} (c_1 \ c_2) &:= \begin{bmatrix} (0) & (3) \\ (1) & (4) \end{bmatrix} & (v_1 \ v_2) &:= \begin{bmatrix} (0) & (-4) \\ (2) & (0) \end{bmatrix} & o(c, r, t) &:= c + r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\ (m_1 \ m_2 \ k_b) &:= (1 \ 4 \ 0) & N &:= c_1 - c_2 & t &:= 0, 0.1 .. 2\pi \\ \text{Given} & \sqrt{m_1} \cdot r_2 = \sqrt{m_2} \cdot r_1 \quad r_1 + r_2 = |N| \\ \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} &:= \text{Find}(r_1, r_2) \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} & c &:= \frac{c_1 \cdot r_2 + c_2 \cdot r_1}{r_1 + r_2} & \text{im} &:= \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \\ (u_1 \ u_2) &:= \text{удар}(m_1, m_2, v_1, v_2, N, k_b) & v1K &:= \text{od}(v_1, N) & v2K &:= \text{od}(v_2, N) \\ v &:= \text{augment}(c_1, c_1 + v_1, \text{im}, c_2, c_2 + v_2)^T & u &:= \text{augment}(c_1, c_1 + u_1, \text{im}, c_2, c_2 + u_2)^T \end{aligned}$$

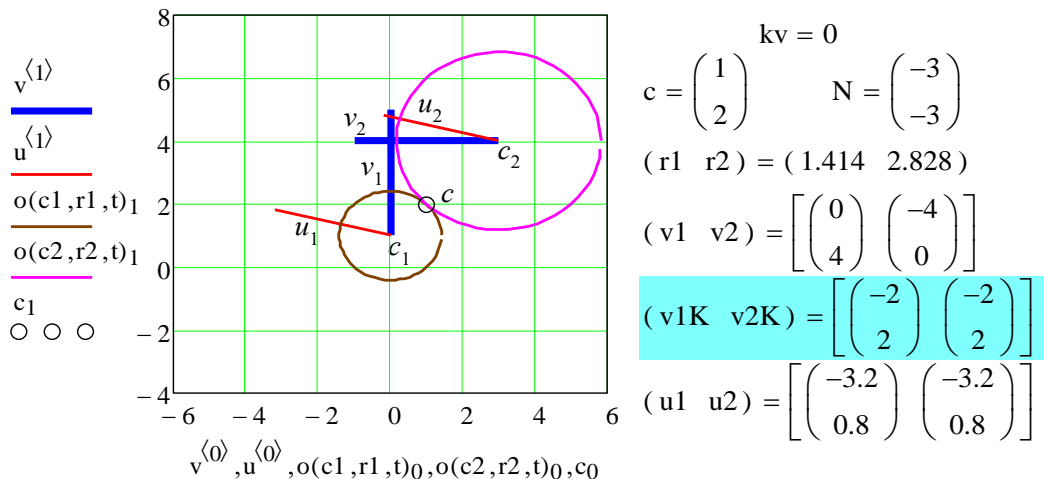
Первый пример, иллюстрирующий абсолютно упругий удар с исходными данными  $c_1(0,1)$ ,  $c_2(3,4)$ ,  $v_1(0,2)$ ,  $v_2(-4,0)$ ,  $m_1=1$ ,  $m_2=4$  и  $k_b=1$ , дал вектор нормали  $N(-3,-3)$  длиной  $3\sqrt{2}$ , радиусы окружностей  $r_1=\sqrt{2}$ ,  $r_2=2\sqrt{2}$ , точку их касания  $c(1,2)$  и конечные векторы отскока  $u_1(-4.8, -2.8)$ ,  $u_2(-2.8, 1.2)$ . Вот как это выглядит на MathCAD-графике, дополненном вручную необходимыми обозначениями точек и векторов:



Во втором примере значение коэффициента восстановления изменено на  $k_B=0$ , а остальные исходные данные оставлены прежними. Расчет показал: несмотря на моделирование абсолютно неупругого удара, получены разные скорости отскоков окружностей  $u_1 \neq u_2$ , т.е. в дальнейшем окружности не будут двигаться параллельно, а сразу разойдутся друг от друга в разные стороны. Причиной такого поведения являются не равные касательные составляющие начальных скоростей  $v_{1K} \neq v_{2K}$  (выделено голубым фоном).



В третьем примере уравняем разные касательные скорости  $2v_{1K}=v_{2K}$  путем удвоения первого начального вектора до  $v_1(0,4)$ . Как и ожидалось, в результате получились равные конечные скорости  $u_1=u_2$ :



Это означает, что после такого «мягкого» столкновения обе окружности в отсутствие внешних сил начнут двигаться как единое целое (рис. 4, а). Но так как физически они друг с другом не склеены, то при  $m_1 \neq m_2$  под действием неравных сил тяжести и сопротивления внешней среды их пути разойдутся (рис. 4, б).

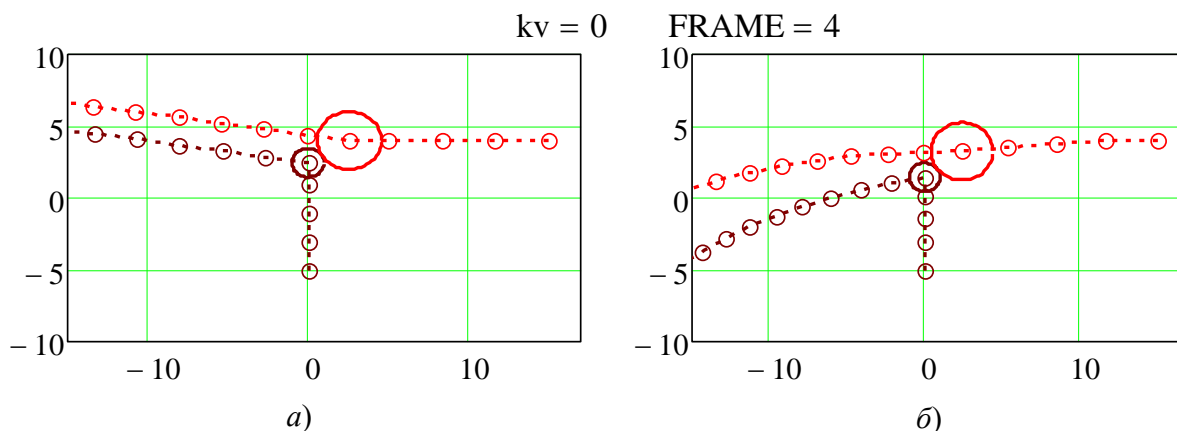


Рис. 4. Движение с абсолютно неупругим столкновением  
Fig. 4. Motion with a perfectly inelastic collision

### Выводы

Привлечение символьного процессора MathCAD к решению задачи полного исследования физических аспектов столкновения двух тел показало высокую эффективность за счет, во-первых, упрощения этого трудоемкого процесса, исключения возможных ошибок ручного вывода формул и, во-вторых, повышения достоверности результатов исследования. В работе впервые получены зависимости скоростей отскока тел от коэффициента восстановления при нецентральной ударе, а также определены условия отсутствия отскока при абсолютно неупругом столкновении.

### Библиографический список

1. Савельев, И.В. Курс общей физики, том I. Механика, колебания и волны, молекулярная физика / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1970. – 511 с.
2. Сивухин, Д.В. Общий курс физики: Учеб. пособие для вузов. В 5 т. Т.1. Механика / Д.В. Сивухин. – М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005. – 560 с.
3. Матвеев, А.Н. Механика и теория относительности: учебник для студентов вузов / А.Н. Матвеев. – М.: ИД «ОНИКС 21 век», 2003. – 432 с.
4. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 1986. – 416 с.
5. Конгер, Д. Физика для разработчиков компьютерных игр / Д. Конгер. – М.: БИНОМ Лаборатория знаний, 2007. – 520 с.
6. Кирьянов, Д.В. Mathcad 15 / Mathcad Prime 1/0 / Д.В. Кирьянов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
7. Никулин, Е.А. Компьютерная графика. Модели и алгоритмы: учеб. пособие для вузов / Е.А. Никулин. – СПб.: Лань, 2017. – 708 с.

Дата поступления  
в редакцию: 06.09.2023

Дата принятия  
к публикации: 26.01.2024