

УДК 532.5

EDN: ZXOAKG

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ВОЛН

Р.В. Шамин

ORCID: 0000-0001-9249-9272 e-mail: roman@shamin.ru

МИРЭА – Российский технологический университет

*Москва, Россия***И.В. Горохова**

ORCID: 0009-0007-8948-6447 e-mail: i_lisach@mail.ru

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

*Нижний Новгород, Россия***Е.В. Фролагина**

ORCID: 0009-0000-3484-8497 e-mail: froлагинаev@gmail.com

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

Нижний Новгород, Россия

Предложен новый подход к моделированию и анализу поверхностных волн идеальной жидкости, основанный на стохастическом моделировании поверхностных волн, позволяющем генерировать профили поверхности без решения динамических уравнений гидродинамики идеальной жидкости со свободной поверхностью. Стохастическое моделирование профилей поверхностных волн применено для исследования статистики возникновения экстремально больших волн (волн-убийц). Показано, что с помощью статистического моделирования поверхностных волн можно оценивать вероятность их возникновения. Полученные вероятности были сравнены с теми, которые были рассчитаны с использованием численного решения полных уравнений гидродинамики идеальной жидкости со свободной поверхностью. Обосновано, что предложенный подход может быть эффективно использован и для исследования экстремальных трехмерных поверхностных волн в океане.

Ключевые слова: аномально большие поверхностные волны, волны-убийцы, вычислительный эксперимент, гидродинамика идеальной жидкости.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Шамин, Р.В. Стохастический анализ и моделирование экстремальных волн / Р.В. Шамин, И.В. Горохова, Е.В. Фролагина // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2024. № 1. С. 24-31. EDN: ZXOAKG

STOCHASTIC ANALYSIS AND MODELING OF EXTREME WAVES

R.V. Shamin

ORCID: 0000-0001-9249-9272 e-mail: roman@shamin.ru

MIREA – Russian technological university

*Moscow, Russia***I.V. Gorokhova**

ORCID: 0009-0007-8948-6447 e-mail: i_lisach@mail.ru

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev

*Nizhny Novgorod, Russia***E.V. Frolagina**

ORCID: 0009-0000-3484-8497 e-mail: froлагинаev@gmail.com

Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev

Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. The article proposes a new approach to modeling and analyzing surface waves of an ideal fluid. This approach is based on stochastic surface wave modeling, which allows the generation of surface profiles without solving the dynamic equations of hydrodynamics of an ideal fluid with a free surface. Stochastic modeling of surface wave profiles is used to study the statistics of the occurrence of extremely large waves – rogue waves. Statistical modeling of surface waves allows to estimate the probability of rogue waves occurrence. The obtained probabilities were compared with results of numerical solution of the complete equations of hydrodynamics of an ideal fluid with a free surface. It is shown that the proposed approach can also be effectively used to study extreme three-dimensional surface waves in the ocean.

Key words: anomalously large surface waves, rogue waves, computational experiment, hydrodynamics of an ideal fluid.

FOR CITATION: R.V. Shamin, I.V. Gorokhova, E.V. Frolagina. Stochastic analysis and modeling of extreme waves. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2024. № 1. Pp. 24-31. EDN: ZXOAKG

Введение

Океанские волны-убийцы (внезапные поверхностные волны большой амплитуды – до 30 м [1]) представляют собой реальную угрозу для судоходства и морских сооружений [2]. В последнее время проблемы волн-убийц привлекают пристальное внимание не только океанологов, но также физиков и математиков. Некоторые аспекты математической теории волн-убийц изложены в монографии [3]. Основные направления исследований волн-убийц связаны с изучением физических процессов, приводящих к формированию этих волн, статистики их возникновения, а также условий, которые увеличивают вероятность возникновения волн-убийц в отдельных районах океана. В [4-6] и ряде других работ были получены оценки вероятности возникновения волн-убийц с помощью вычислительных экспериментов; они согласуются с оценками вероятностей возникновения волн-убийц в натуральных экспериментах. В работах [7-9] показано, что волны-убийцы представляют собой локальную концентрацию энергии в результате нелинейной динамики идеальной жидкости со свободной поверхностью.

В настоящей статье рассматривается подход к моделированию поверхностных волн без решения динамических уравнений. Получаемые профили поверхности строятся по известным спектрам морской поверхности. Среди этих профилей выделяются те, которые удовлетворяют критерию волны-убийцы. Таким образом можно оценить меру множества в фазовом пространстве, которое соответствует волнам-убийцам. Данный подход использовался в различных работах и показал свою эффективность. В работе [10] методы Монте-Карло использовались при моделировании волн-убийц, возникающих при взаимодействии распространения волн с течениями. При этом использовалась лучевая картина в поле течения со случайными неоднородностями. В статье [11] методы Монте-Карло использовались для моделирования возвышение морской поверхности в фиксированной точке с помощью суперпозиции случайных фаз. Для этого используются варианты спектров *JONSWAP*. В результате получены оценки для возникновения волн-убийц. Методы статистического моделирования также были использованы в работе [12], где использовалась модель частотно-углового спектра для описания направленного распространения случайных волн. Авторами было показано, что из-за нелинейности, в частности, из-за рефракции и фокусировки волн, наблюдается отклонение от гауссовской статистики высот волн, что приводит к увеличению вероятности возникновения волн-убийц. В настоящей работе, в отличие от предшествующих исследований, рассматривается моделирование пространственной структуры профиля свободной поверхности. Такой подход позволяет рассматривать геометрическую природу волн-убийц и оценивать вероятность возникновения anomalously больших волн в заданной области океана.

Наиболее близкой к настоящей работе является статья [9], в которой также рассматриваются пространственные модели морской поверхности, оцениваются вероятности возникновения волн-убийц и применяются авторские методы для генерации пространственно-временных структур морской поверхности. Результаты представленного в статье исследова-

ния находятся в соответствии с [9], но в качестве верификации используются вычислительные эксперименты, основанные на решении динамических уравнений, описывающих поверхностные волны идеальной жидкости в плоском случае и некоторые результаты натуральных наблюдений.

Таким образом, в данной работе с помощью статистического моделирования воспроизводится большое количество пространственных профилей свободной поверхности жидкости, соответствующих задаваемому спектру. По этим показателям определяется частота возникновения профилей, которые можно отнести к волнам-убийцам. Эта частота, в свою очередь, сравнивается вероятностью обнаружения волны-убийцы, рассчитанной в вычислительных экспериментах по полным уравнениям гидродинамики в работах [4-5]. Результаты статистического моделирования трактуются в терминах динамических систем.

Полученные результаты исследования подтверждают, что вероятности возникновения волн-убийц, рассчитанные усреднением по времени, совпадают по порядку с вероятностью, получаемой усреднением по фазовому пространству. Эта гипотеза может быть полезной для оценки вероятности возникновения волн-убийц в трехмерном случае, где прямые эксперименты с решением динамических уравнений затруднены.

Динамические уравнения

Рассмотрим нелинейную динамику поверхностных волн идеальной жидкости. При этом идеальная несжимаемая жидкость занимает плоскую область:

$$\begin{aligned} -\infty < y < \eta(x, t), \\ 0 < x < 2\pi, \end{aligned}$$

где функция $\eta(x, t)$ описывает свободную поверхность в каждый момент времени. Граничные условия по переменной x являются 2π -периодическими. Будем предполагать, что течение идеальной жидкости является потенциальным. Это условие является стандартным при рассмотрении поверхностных волн в океане.

Вследствие потенциальности течения жидкости мы имеем потенциал скоростей $\Phi(x, y, t)$, с помощью которого определяется поле скоростей жидкости:

$$v(x, y, t) = \nabla\Phi(x, y, t),$$

где оператор градиента действует по пространственным переменным. Из условия несжимаемости жидкости

$$\operatorname{div}v(x, y, t) = 0$$

получаем уравнение Лапласа:

$$\Delta\Phi(x, y, t) = 0.$$

С этим уравнением связываются следующие граничные и начальные условия:

$$\begin{aligned} (\eta_t + \Phi_x\eta_x - \Phi_y)|_{y=\eta(x,t)} &= 0, \\ (\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy)|_{y=\eta(x,t)} &= 0, \\ \Phi_y|_{y=-\infty} &= 0, \\ \eta|_{t=0} &= \eta_0(x), \\ \Phi|_{t=0} &= \Phi_0(x, y). \end{aligned}$$

где g – ускорение свободного падения.

Непосредственное решение этих уравнений представляет собой очень сложную задачу как в теоретическом, так и в численном аспектах. Существует большое количество работ, посвященных различным методам численного решения уравнений гидродинамики идеальной жидкости со свободной поверхностью. В большинстве из них используются различные пре-

образования исходных уравнений; наиболее эффективным оказывается использование конформных переменных [13-16].

Идея использования конформных переменных состоит в том, что в каждый момент времени область, занимаемая жидкостью, конформно отображается в нижнюю полуплоскость, что гарантируется известной теоремой Римана о возможности конформного отображения на внутренность круга любой области, имеющей границу, состоящую из более чем одной точки. Таким образом, мы получаем уравнения на конформные отображения, зависящие от времени. Они, как правило, оказываются интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных. Наиболее эффективной формой уравнений в конформных переменных являются уравнения, полученные в работе [16]. Они оказались исключительно удобными для численных расчетов, а также для теоретического исследования. Было показано, что эти уравнения являются системами Коши-Ковалевской, что позволило получать конструктивные оценки времени существования решений этих уравнений. Заметим, что использование новых уравнений (в конформных переменных), дает решения, полностью эквивалентные решениям исходного уравнения.

Постановка вычислительных экспериментов

Опишем постановку вычислительных экспериментов, которые были проведены в работе [5], и результаты которых мы будем сравнивать с моделированием волновой поверхности. Поскольку мы рассматриваем периодические по пространственным переменным поверхностные волны, начальный профиль этих волн может быть представлен в виде частичной суммы ряда Фурье:

$$\eta(x, t = 0) = \sum_{k=-\frac{1}{2}K_{max}}^{\frac{1}{2}K_{max}} \phi(k - K_0) \cos(kx - \xi_k),$$

где K_0 – среднее значение волнового числа, K_{max} – максимальное количество спектральных мод, ξ_k суть независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[0, 2\pi)$. Функция $\phi(k)$ имела следующий вид:

$$\phi(k) = \begin{cases} \delta_k, & |k| > K_w; \\ \kappa \exp(-\alpha k^2) + \delta_k, & |k| \leq K_w. \end{cases}$$

Здесь δ_k – независимые случайные параметры. Число $1 \leq K_w \leq 10$ определяло спектральную ширину, κ , α – параметры спектра, определенные так, чтобы задаваемые значения: квадрат средней крутизны μ :

$$\mu^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta_x^2 dx$$

и дисперсия D :

$$D = \left(\int_{-K_w}^{K_w} k^2 e^{-\alpha k^2} dk \right) \left(\int_{-K_w}^{K_w} e^{-\alpha k^2} dk \right)^{-1}$$

принимали определенные значения. При этом вклад случайного шума δ_k не превышал трех процентов энергии. Аналогичные постановки вычислительных экспериментов использовались в работах [4-5].

Среди поверхностных волн выделяют волны, имеющие экстремально большую амплитуду (волны-убийцы). Для их точного критерия будем использовать стандартный амплитудный критерий: волна-убийца возникла в момент времени t^* , если выполняется следующее неравенство:

$$\nu(t^*) = \frac{H_{max}(t^*)}{H_s(t^*)} \geq \nu^* = 2.1,$$

где $H_{max}(t)$ – максимальная высота волны в момент времени t , а усредненная значительная высота волнения H_s равна:

$$H_s(t^*) = \frac{1}{\Delta T} \int_{t-\Delta T}^t H_s(\tau) d\tau,$$

где $H_s(t)$ есть значительная высота волнения (т.е. средняя высота трети самых больших волн) в момент t . Значение $\nu^*=2,1$ выбрано экспериментально и используется во многих работах, посвященных волнам-убийцам.

В результате проведенных масштабных экспериментов были вычислены интенсивности возникновения волн-убийц, которые приведены на рис. 1 [5]. Проведение этих экспериментов требовало больших вычислительных затрат, поэтому в следующем пункте мы будем использовать моделирование волновой поверхности без решения динамических уравнений.

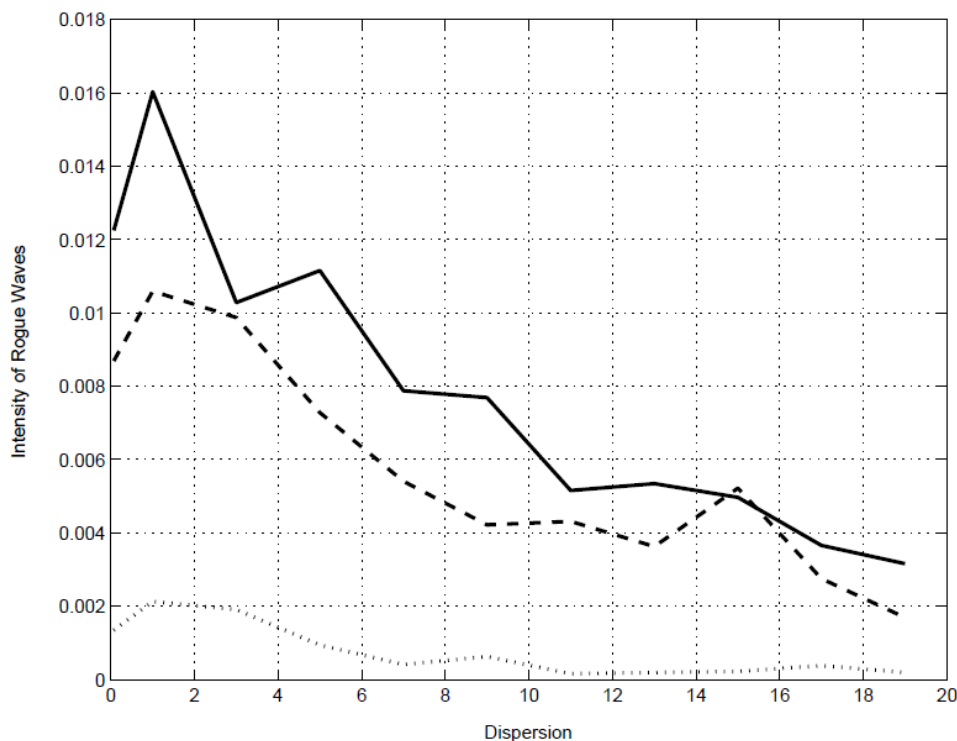


Рис. 1. Интенсивность возникновения волн-убийц:
точечная линия – $\mu^2=2,06 \cdot 10^{-3}$; тире – $\mu^2=3,08 \cdot 10^{-3}$; сплошная линия – $\mu^2=4,10 \cdot 10^{-3}$.

Fig. 1. Intensity of rogue waves occurrence:
dotted – $\mu^2=2,06 \cdot 10^{-3}$; dash – $\mu^2=3,08 \cdot 10^{-3}$; solid – $\mu^2=4,10 \cdot 10^{-3}$.

Моделирование поверхностного волнения

В результате проведенных вычислительных экспериментов, описанных в предыдущем разделе, были получены оценки вероятности возникновения волн-убийц при различных параметрах начального волнения. В частности, в работе [5] были вычислены интенсивности возникновения волн-убийц. Мы говорим об интенсивности возникновения волн-убийц, а не о вероятности их возникновения, поскольку факты возникновения волн-убийц описываются случайными процессами Пуассона (и его обобщениями – процессом Кокса).

Профили поверхностных волн в океане описываются своим спектром, под которым мы будем понимать набор модулей коэффициентов ряда Фурье при разложении периодиче-

ской функции, представляющей профиль поверхностной волны. Разумеется, фиксированный спектр могут иметь бесконечное число волн. При фиксированном спектре для построения индивидуальной волны мы будем использовать метод Монте-Карло (статистическое моделирование), где случайными будут фазы. В каждом элементарном эксперименте в серии профиль свободной поверхности задавался следующей формулой:

$$y(x) = \sum_{k=-2048}^{20148} \phi(k - 50) \cos(kx - \xi_k),$$

где ξ_k суть независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[0, 2\pi)$, которые моделируются методом Монте-Карло. Функция $\phi(k)$ определялась по формуле выше, с использованием параметров, которые обеспечивают заданный квадрат средней крутизны и дисперсию. На рис. 2 мы приводим пример типичного профиля поверхности, представляющий волну-убийцу, который был получен с помощью моделирования свободной поверхности. Эти профили похожи на профили волн-убийц, которые наблюдаются в вычислительных экспериментах и в натуральных наблюдениях [1,3]. Для каждого такого элементарного эксперимента мы анализировали высоты волн в полученном профиле и рассчитывали значительную высоту волн. Если отношение максимальной высоты к значительной высоте превышало пороговое значение $\nu^* = 2.1$, отмечалось возникновение волны-убийцы в полученном профиле свободной поверхности.

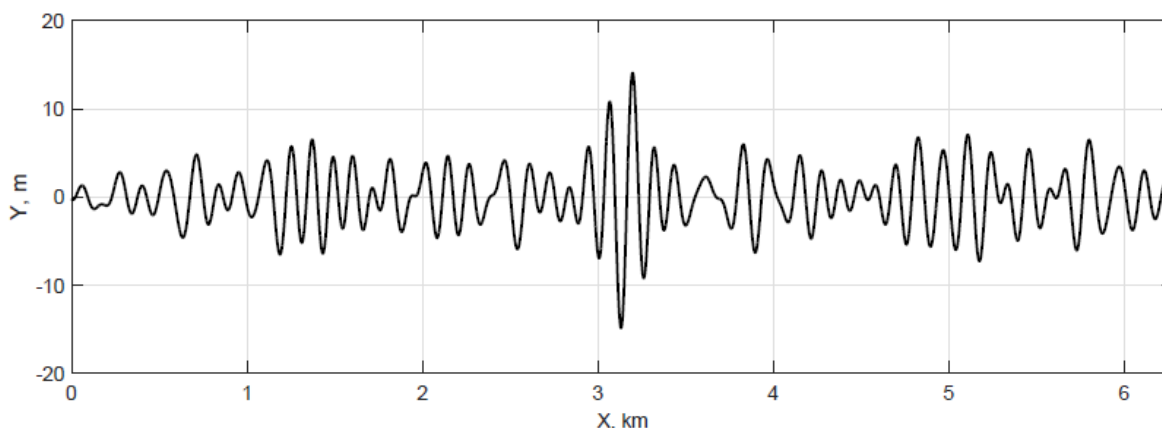


Рис. 2. Типичный профиль волны-убийцы, полученный с помощью статистического моделирования

Fig. 2. Typical rogue wave profile obtained from statistical modeling

Описанный элементарный эксперимент повторялся 10 000 раз, чтобы получить частоту возникновения волн-убийц. Рассматривались типичные параметры спектра, соответствующие волнам зыби. Заметим, что в океане волны-убийцы наиболее часто возникают именно в развитии волн зыби. В частности, приведем результаты одной из серий экспериментов, в которой мы использовали следующие типичные параметры:

- 1) квадрат средней крутизны $\mu^2 = 4,1 \cdot 10^{-3}$;
- 2) дисперсия $D=5$.

В нашем эксперименте волны-убийцы были зарегистрированы 140 раз в результате 10^4 экспериментов, т.е. с частотой $q = 0,014$. Это значение хорошо согласуется с интенсивностью возникновения волн-убийц в вычислительных экспериментах из работы [5]. Согласно данным результатам (рис. 1), вероятность возникновения волны-убийцы с такими же параметрами равна $p = 0,015$. Следовательно, погрешность метода статистического моделирования относительно статистики, полученной при решении динамических уравнений равна:

$$\Delta = \frac{|0.014 - 0.015|}{0.015} \times 100\% = 6.67\%.$$

Сравнение результатов статистического моделирования с результатами вычислительных экспериментов на основе решения динамических уравнений для других параметров (квадрат средней крутизны и дисперсия) также показывает погрешность в районе 5-10 %. Кроме того, получаемая статистика возникновения экстремальных волн, согласуется с натурными наблюдениями в районе о. Сахалин [17]. В этой работе рассматривались результаты длительных измерений с помощью датчиков донного давления. Эти датчики получают статистику возникновения аномальных волн в фиксированной точке. Методика получения оценок возникновения волн-убийц в пространстве по данным натурных наблюдений в отдельных точках описана в работе [18].

Построим плотность функции распределения вероятности для параметра v (отношение максимальной высоты волны к значительной высоте волнения) (рис. 3). Приведем статистические характеристики этой случайной величины:

- 1) математическое ожидание $E=1,531$;
- 2) дисперсия $\sigma^2=0,399$;
- 3) симметрия $\gamma_1=1,067$;
- 4) эксцесс $\gamma_2=1,770$.

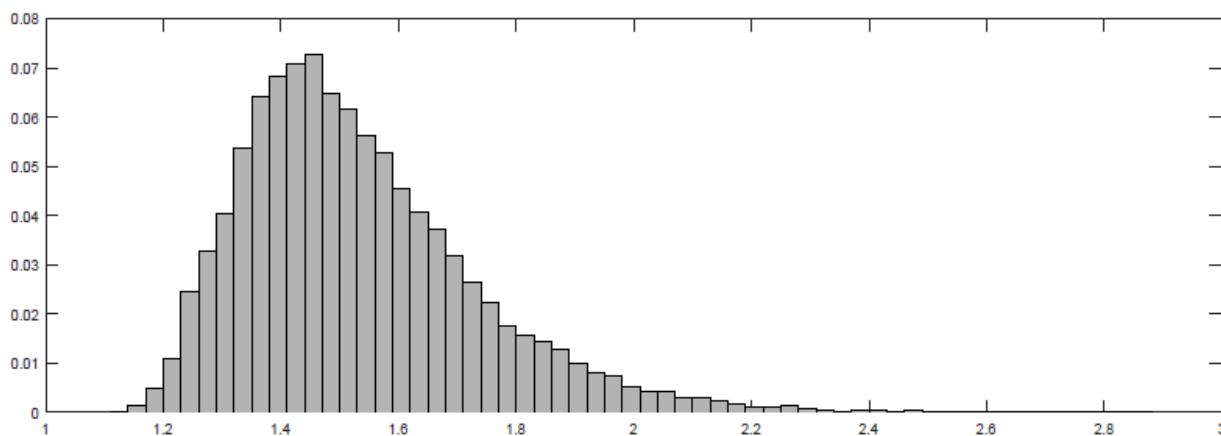


Рис. 3. Плотность распределения функции v

Fig. 3. Distribution density of v function

Заключение

При изучении экстремальных поверхностных волн (волн-убийц) на основе математического моделирования необходимо численно решать динамические уравнения, описывающие гидродинамику идеальной жидкости со свободной поверхностью с очень высокой точностью. Поскольку процесс формирования волн-убийц из типичных волн зыби является продолжительным и может потребовать сотни и тысячи периодов, для моделирования волн-убийц необходимо не только выдерживать высокую точность расчетов, но и производить эти расчеты на больших временных интервалах; требуются большие расчетные мощности.

Разработанный метод статистического моделирования поверхностных волн без необходимости решения полных динамических уравнений позволяет существенно снизить количество вычислений. При этом ранее полученные данные об интенсивностях возникновения волн-убийц, основанные на полных динамических уравнениях, описывающих гидродинамику идеальной жидкости со свободной поверхности, качественно и количественно совпадают с результатами статистического моделирования.

Предложенный подход позволяет распространить метод статистического моделирования на случай трехмерного волнового поля.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №23-17-00189).

Библиографический список

1. **Kharif S., Pelinovsky E., Slunyaev A.** Rogue Waves in the Ocean. Springer, 2009. – 216 p.
2. **Nikolkina I. and Didenkulova I.** Rogue waves in 2006-2010. Nat. Hazards Earth Syst. Sci., 2011, v. 11, pp. 2913-2924.
3. **Шамин, Р.В.** Математические вопросы волн-убийц / Р.В. Шамин.– М.: URSS, 2016.
4. **Захаров, В.Е.** О вероятности возникновения волн-убийц / В.Е. Захаров, Р.В. Шамин // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т. 91. Вып. 2. С. 68-71.
5. **Захаров, В.Е.** Статистика волн-убийц в вычислительных экспериментах / В.Е. Захаров, Р.В. Шамин // Письма в ЖЭТФ. 2012. Т. 96. Вып. 1. С. 68-71.
6. **Chalikov D.** Freak waves: Their occurrence and probability. Phys. Fluids, 2009, v. 21, issue 7, pp. 076602-1-076602-18.
7. **Захаров, В.Е.** Энергетический портрет волн-убийц / В.Е. Захаров, Р.В. Шамин, А.В. Юдин // Письма в ЖЭТФ. 2014. Том 99. Вып. 9. С. 597-600.
8. **Шамин, Р.В.** Процессы концентрации энергии при образовании волн-убийц / Р.В. Шамин, А.В. Юдин // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10. № 1. С. 49-58.
9. **Литвенко, К.В.** Численные стохастические модели поверхности морского волнения и гигантских океанических волн / К.В. Литвенко, С.М. Пригарин // Сибирский журнал вычислительной математики. 2014. Т. 17. № 4. С. 349–361.
10. **White B.S., Fornberg B.** On the chance of freak waves at sea. Journal of fluid mechanics. 1998. Т. 355. С. 113-138.
11. **Gemmrich J., Garrett C.** Unexpected waves. Journal of Physical Oceanography. 2008. Т. 38. №. 10. Pp. 2330-2336.
12. **Janssen T.T., Herbers T.H.C.** Nonlinear wave statistics in a focal zone. Journal of Physical Oceanography. 2009. Т. 39. №. 8. Pp. 1948-1964.
13. **Овсянников, Л.В.** К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды: сборник научных трудов. – Новосибирск: АН СССР, 1973. Вып. 15. С. 104-125.
14. **Chalikov D., Sheinin D.** Modeling of extreme waves based on equations of potential flow with a free surface. J. Comput. Phys., 2005, vol. 210, no. 1, pp. 247-273. EDN: MDTMRV
15. **Дьяченко, А.И.** Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости / А.И. Дьяченко, В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов // Физика плазмы. 1999. № 10. С. 916-928.
16. **Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A.** New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface. Eur. J. Mech. B Fluids, 2002, vol. 21, no. 3, pp. 283-291.
17. **Зайцев, А.И.** Аномально большие волны вблизи южного побережья о. Сахалин / А.И. Зайцев, А.Е. Малашенко, Е.Н. Пелиновский // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2011. Т. 4. № 4. С. 35-42.
18. **Шамин, Р.В.** Статистические характеристики аномально больших поверхностных волн на основе вычислительных экспериментов / Р.В. Шамин, А.В. Юдин // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 9. С. 31-42.

*Дата поступления
в редакцию: 19.12.2023*

*Дата принятия
к публикации: 12.02.2024*