УДК 51-74 ***EDN:* GXBYWO**

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМ В НАХОЖДЕНИИ РАСШИРЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕЗУЛЬТАТА КОСВЕННОГО ИЗМЕРЕНИЯ

А.А. Попов
ORCID: **0000-0002-0598-5203** e-mail: **popovanatol@inbox.ru**
Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Нижний Новгород, Россия

О.Н. Косырева
ORCID: **0000-0003-2126-3275** e-mail: **lelia7@list.ru**
Дзержинский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
Дзержинск, Россия

С.А. Добротин
ORCID: **0000-0001-6925-2693** e-mail: **zavkaf_sgpd@dzr.ranepa.ru**
Дзержинский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации
Дзержинск, Россия

Результат измерения должен сопровождаться указанием показателя точности, в качестве которой, как правило, выступает расширенная неопределенность. Для ее расчета необходима информация о числе степеней свободы суммарной стандартной неопределенности результата косвенного измерения. Известные в нормативных документах и других источниках методики имеют ряд пробелов. Для устранения этих пробелов предложено использовать интерполяционный фактор в установлении числа степеней свободы для общего случая количества элементов в группе корреляционно зависимых входных переменных, а также предложены три подхода для определения числа степеней свободы стандартной неопределенности типа B. Выполнены соответствующие примеры расчетов, сопоставлены полученные результаты. Сделан вывод о целесообразности нахождения числа степеней свободы стандартной неопределенности типа B путем сопоставления коэффициента охвата, определяемого по методике ГОСТ Р 8.736-2011, с коэффициентом Стьюдента.

Ключевые слова: косвенные измерения, результат измерения, расширенная неопределенность, стандартная неопределенность, коэффициент охвата, число степеней свободы.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Попов, А.А. Решение проблем в нахождении расширенной неопределенности результата косвенного измерения / А.А. Попов, О.Н. Косырева, С.А. Добротин // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2024. № 2. С. 32-42. EDN: GXBYWO

SOLVING PROBLEMS IN FINDING THE EXPANDED INDIRECT MEASUREMENT UNCERTAINTY

A.A. Popov
ORCID: **0000-0002-0598-5203** e-mail: **popovanatol@inbox.ru**
Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev
Nizhny Novgorod, Russia

O.N. Kosyreva
ORCID: **0000-0003-2126-3275** e-mail: l**elia7@list.ru**
The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
(The Presidential Academy, RANEPA), Dzerzhinsky branch
Dzerzhinsk, Russia

S.A. Dobrotin
ORCID: **0000-0001-6925-2693** e-mail: **zavkaf_sgpd@dzr.ranepa.ru**
The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
(The Presidential Academy, RANEPA), Dzerzhinsky branch
Dzerzhinsk, Russia

Abstract. The measurement result should be accompanied by an indication of accuracy, which is usually the expanded uncertainty. Its calculation requires information on the number of degrees of freedom of the combined standard uncertainty of the indirect measurement result. The methods presented in normative documents and other sources have a number of gaps. To eliminate these gaps, the paper proposes to use the interpolation factor in establishing the number of degrees of freedom for the general case of the number of elements in the group of correlation-dependent input variables. Three approaches for determining the number of degrees of freedom of the type B standard uncertainty are presented. The corresponding examples of calculations are performed and the results obtained are compared. It is reasonable to find the number of degrees of freedom of the type B standard uncertainty by comparing the coverage factor determined according to GOST R 8.736-2011 with the Student's t distribution quantile function.

Key words*:* indirect measurements, measurement result, expanded uncertainty, standard uncertainty, coverage factor, number of degrees of freedom.

FOR CITATION: A.A. Popov, O.N. Kosyreva, S.A. Dobrotin. Solving problems in finding the expanded indirect measurement uncertainty. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2024. № 2. Pp. 32-42. EDN: GXBYWO

Согласно требованиям нормативных метрологических документов, результат измерения должен указываться вместе с показателем точности [1]. В качестве него широко применяются расширенная неопределенность результата измерения U [2, 3] или доверительные границы погрешности оценки измеряемой величины [4]; данные термины являются синонимичными [5]. Расширенная неопределенность определяется как величина, кратная стандартной неопределенности:

$$U = k \cdot u\left(y\right), \tag{1}$$

где k – коэффициент охвата; $u(y)$ – стандартная неопределенность результата измерения величины y.

В случае косвенных измерений результат получается с помощью уравнения измерения:

$$y = f\left(X\right), \tag{2}$$

где X – вектор входных величин:

$$X = \left(x_1, ,..., x_m\right)^{\mathrm{T}}. \tag{3}$$

Компоненты x_i данного вектора определяются, как правило, в результате прямых измерений. В этом случае точечной оценкой результата измерения является среднее арифметическое значение $\overline{x}_i$, получаемое осреднением результатов единичных определений:

$$\overline{x}_i = \frac{\sum\limits_{u=1}^{n} x_{ui}}{n}, \tag{4}$$

где n – число единичных определений; x_{ui} – результат u-го единичного определения входной величины x_i.

Стандартная неопределенность $u(x_i)$ результата прямого измерения величины x_i представляет собой стандартное отклонение среднего значения [6, 7]:

$$u(x_i) = s(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{\sum_{u=1}^{n}(x_{ui} - \bar{x}_i)^2}{n(n-1)}}. \tag{5}$$

После линеаризации функции $f(X)$ и нахождения математического ожидания квадрата отклонения [6] стандартная неопределенность результата измерения величины y находится по формуле:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot u(x_i)\cdot u(x_j)\cdot r(x_i, x_j)}, \tag{6}$$

где $r(x_i, x_j)$ – коэффициент линейной парной корреляции величин x_i и x_j.

По результатам единичных определений значений величин x_i, x_j значение коэффициента линейной парной корреляции этих величин определяется по формуле:

$$r(x_i, x_j) = \frac{\sum_{u=1}^{n}(x_{ui} - \bar{x}_i)\cdot(x_{uj} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{u=1}^{n}(x_{ui} - \bar{x}_i)^2\cdot\sum_{u=1}^{n}(x_{uj} - \bar{x}_j)^2}} \tag{7}$$

Условие возможности пренебрежения остаточным членом формулы Тейлора, возникающем при аппроксимации исходной функциональной зависимости по формуле (2) линейной функцией, что лежит в основе формулы (6), определяется соотношением между остаточным членом R и стандартным отклонением $u(y)$ [8]:

$$\frac{R}{u(y)} < 0{,}1. \tag{8}$$

Значение остаточного члена находится по формуле:

$$R = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\cdot U^2(x_i) + 2\cdot\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\cdot U(x_i)\cdot U(x_j)\right), \tag{9}$$

где $U(x_i)$ – расширенная неопределенность результата измерения величины x_i.

При этом значения производных ищутся в точке средних значений входных переменных.

Широко рекомендуемое в нормативных документах значение для коэффициента охвата $k = 2$ возможно только при достаточной близости значений выборочных стандартных неопределенностей $u(x_i)$, $u(x_j)$ к соответствующим генеральным стандартным отклонениям. В противном случае в качестве коэффициента охвата рекомендуется коэффициент Стьюдента $t_p(v)$ при доверительной вероятности p и числе степеней свободы v стандартной неопределенности $u(y)$ [6, табл. G.2]. Коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности p соответствует квантилю распределения Стьюдента уровня $1-\frac{\alpha}{2}$, где α – уровень значимости.

Для случая независимости входных переменных, входящих в формулу (6), число эффективных степеней свободы v стандартной неопределенности $u(y)$ определяется по формуле Уэлча-Саттеруэйта [6, 9]:

$$v = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^{N}\frac{\left[c_i\cdot u(x_i)\right]^4}{v_i}}, \tag{10}$$

где ν_i – число степеней свободы стандартной неопределенности $u(x_i)$; c_i – коэффициент чувствительности по входной переменной x_i.

Коэффициент чувствительности:

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}. \tag{11}$$

Нахождение числа степеней свободы (ЧСС) в общем случае наличия в уравнении измерения как независимых, так и функционально и корреляционно зависимых входных переменных, предложено [10] осуществлять аддитивно:

$$\nu = \nu_{\text{нез}}\Big|_{i=\overline{1,g}} + \nu_{\text{ф.з.}}\Big|_{i=\overline{g+1,g+h}} + \nu_{\text{кор}}\Big|_{i=\overline{g+h+1,m}}, \tag{12}$$

где g, h и m – число соответственно независимых, функционально зависимых и общее число входных переменных; $\nu_{\text{нез}}$, $\nu_{\text{ф.з.}}$, $\nu_{\text{кор}}$ – ЧСС групп слагаемых входных переменных соответственно независимых, функционально зависимых и корреляционно зависимых.

При этом для группы функционально зависимых переменных в соответствии с определением понятия ЧСС [11] предложено [10] определять ЧСС группы как ЧСС единичного элемента группы

$$\nu_{\text{ф.з.}} = \nu_i,\ i = \overline{g+h+1,m}, \tag{13}$$

а для группы корреляционно зависимых – методом линейной интерполяции между предельными случаями независимости и функциональной зависимости между элементами группы

$$\nu_{\text{кор}} = \nu_{\text{нез}}(1-r) + r\cdot\nu_{\text{ф.з.}}, \tag{14}$$

где r – коэффициент линейной парной корреляции.

Однако формула (14) применима только для случая двух корреляционно зависимых входных переменных.

Отнесение входных переменных к данной группе следует проводить путем проверки значимости полученного выборочного коэффициента корреляции. Это можно делать по процентным точкам выборочного коэффициента корреляции при значении генерального коэффициента $\rho=0$ [12], либо вычисляя наблюдаемое значение критерия Стьюдента

$$t = \frac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}, \tag{15}$$

При получении значения критерия Стьюдента t, меньшем критического $t_{\text{кр}}(\alpha, n-2)$ [6, Приложение G], принимается положение о независимости входных переменных, в противном случае – об их корреляционной зависимости.

В расчете суммарной стандартной неопределенности $u(x_i)$ результата прямого измерения величины x_i в общем случае участвуют стандартные неопределенности как типа А, так и типа В, что влечет за собой необходимость учета составляющей типа В в расчете ЧСС ν_i стандартной неопределенности $u(x_i)$. Это рекомендуется делать по формуле (10) с коэффициентами чувствительности равными единице. Для расчета ЧСС стандартной неопределенности типа В, предложено уравнение [6, уравнение (E.7)], которое легко преобразуется к следующему виду [6, уравнение (G.3)]:

$$\nu_{i,B} = \frac{1}{2}\left[\frac{u[u(x_i)]}{u(x_i)}\right]^{-2}, \tag{16}$$

где $\frac{u[u(x_i)]}{u(x_i)}$ – стандартная неопределенность в оценке стандартной неопределенности, представленная в относительном виде.

Рекомендации в документе [6] по обоснованному выбору в формуле (16) численного значения этой относительной величины отсутствуют.

Таким образом, в вопросе нахождения расширенной неопределенности результата косвенного измерения существуют две проблемы:

1) в группе корреляционно зависимых входных переменных в количестве более двух отсутствует интерполяционный фактор, который можно использовать для определения ЧСС указанной группы;

2) отсутствует методика определения ЧСС стандартной неопределенности типа В для расчета общего ЧСС отдельной входной переменной x_i.

После определения указанных величин они будут использоваться для нахождения эффективного ЧСС v стандартной неопределенности $u(y)$ и далее – для определения коэффициента охвата и расширенной неопределенности результата косвенного измерения величины y.

Для решения первой проблемы можно предложить широко используемую в статистике агрегированную характеристику группы однородных величин – среднюю арифметическую. Тогда в случае наличия более, чем двух входных переменных в группе корреляционно зависимых величин, необходимо найти по формуле (7) коэффициенты линейной парной корреляции $r\left(x_i, x_j\right)$ для всех пар $\left(x_i, x_j\right)$, а затем перейти к частным коэффициентам [12] $r_{ij|1\ldots p}$, которые характеризуют корреляционную связь между входными переменными x_i, x_j при исключении влияния остальных p входных переменных

$$r_{ij|1\ldots p} = \frac{r_{ij} - \sum\limits_{\substack{k=1\\(k\neq i;k\neq j)}}^{m} r_{ik}\cdot r_{jk}}{\sqrt{\left(1-\sum\limits_{\substack{k=1\\(k\neq i;k\neq j)}}^{m} r_{ik}^2\right)\cdot\left(1-\sum\limits_{\substack{k=1\\(k\neq i;k\neq j)}}^{m} r_{jk}^2\right)}}. \qquad (17)$$

Отличие в статистических свойствах выборочного частного коэффициента от обычного парного коэффициента линейной корреляции заключается в том, что полученная статистика $r_{ij|1\ldots p}$ имеет число степеней свободы $n-p-2$. В остальном процедура проверки значимости ничем не отличается от описанной выше. В общем случае статистических расчетов [13] выходная переменная y также используется в формуле (17) для расчета частного коэффициента корреляции. Однако для данного случая косвенных измерений она является функционально зависимой величиной и в формуле (17) необходимо использовать только входные переменные, входящие в данную группу. Полученные значения частных коэффициентов корреляции следует усреднить по формуле (4). Полученный показатель уже можно использовать, как интерполяционный фактор в формуле (14).

Для решения второй проблемы можно предложить несколько способов.

Первый способ

Для случая прямых измерений предложен [4] простой способ нахождения коэффициента охвата k:

$$k = \frac{\varepsilon + \Theta_{\Sigma}}{S_{\bar{x}} + S_{\Theta}}, \qquad (18)$$

где ε – доверительные границы случайной погрешности; Θ_{Σ} – доверительные границы неисключенной систематической погрешности (НСП); $S_{\bar{x}}$ – стандартное отклонение оценки измеряемой величины; S_{Θ} – стандартное отклонение неисключенной систематической погрешности.

Сопоставляя найденное значение коэффициента охвата с табличными значениями коэффициента Стьюдента [4, 6] можно легко найти соответствующее ЧСС суммарной стандартной неопределенности результата прямого измерения.

Второй способ

Часто неопределенность типа В задается в виде границ НСП ±θ. Тогда погрешность в указании границ Δθ можно представить в виде значения половины разряда, следующего за разрядом последней значащей цифры. В случае использования широко рекомендуемого в нормативных документах [6] значения коэффициента охвата k=2, ЧСС в оценке стандартной неопределенности типа В можно представить в виде:

$$v_{i,B} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta\theta}{\theta}\right]^{-2}. \qquad (19)$$

Третий способ

В случае возможности пренебрежения остаточным членом формулы Тейлора, возникающем при линеаризации функции $f(X)$, расширенная неопределенность результата косвенного измерения $U(y)$ может быть определена из формулы (6) при замене стандартных неопределенностей на расширенные (рис. 1). В этом случае знание ЧСС стандартной неопределенности результата косвенного измерения вообще не требуется.

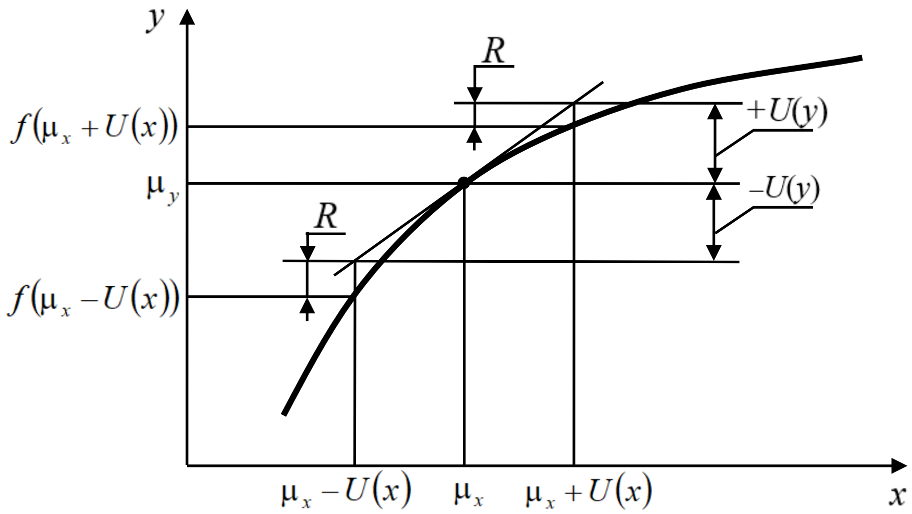

Рис. 1. Смещение границ доверительного интервала при линеаризации функциональной зависимости [7]

Fig. 1. Shifting the boundaries of the confidence interval when linearizing the functional dependence [7]

Для сопоставления значений, получаемых по предложенным способом расчета, в качестве примера были выполнены расчеты расширенной неопределенности результата косвенного измерения. Исходные данные аналогичны значениям, указанным в [14], кроме того, они дополнены сведениями о НСП средств измерений.

Пример. Выполняется измерение плотности твердого тела. Уравнение измерения имеет вид:

$$\rho = \frac{m}{V}, \qquad (20)$$

где m и V – соответственно масса и объем образца.

Результаты единичных определений приведены в табл. 1.

Таблица 1.
Результаты единичных определений

Table 1.
Results of single determinations

Масса тела, г	Объем тела, см^3
252,9	195,0
252,7	195,4
253,0	195,7
252,5	195,8
252,6	195,7

Для взвешивания используются весы с приписанной погрешностью ± 0,1 г, объем тела определяется методом вытеснения воды, для чего используется мерная колба с погрешностью отсчета ± 0,1 мл. Методы обработки результатов прямых измерений описаны в [4]. Точечные оценки результатов, посчитанные по формуле (4):

$$\bar{m} = 252,74 \text{ г}; \ \bar{V} = 195,52 \text{ см}^3.$$

Результат косвенного измерения по формуле (20):

$$\bar{\rho} = \frac{252,74}{195,52} = 1,29266 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Посчитанный по формуле (7) для приведенных значений выборочный коэффициент линейной парной корреляции составил $r = -0,457$. Наблюдаемое значение критерия Стьюдента, используемое для проверки его статистической значимости, по формуле (15):

$$t = \frac{|-0,457|\sqrt{5-2}}{\sqrt{1-(-0,457)^2}} = 0,878,$$

что меньше критического значения $t_{\text{кр}}(\alpha, n-2) = 3,18$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$ [6, Приложение G]. Следовательно, величины m и V можно считать независимыми.

Стандартные отклонения случайных погрешностей результатов прямых измерений

$$S_{\bar{m}} = \sqrt{\frac{\sum(m_i - \bar{m})^2}{n(n-1)}} = 0,093 \text{ г},$$

$$S_{\bar{V}} = \sqrt{\frac{\sum(V_i - \bar{V})^2}{n(n-1)}} = 0,146 \text{ см}^2.$$

Доверительные границы случайных погрешностей

$$\varepsilon_m = t_p(v) \cdot S_{\bar{m}} = 0,257 \text{ г},$$

$$\varepsilon_V = t_p(v) \cdot S_{\bar{V}} = 0,406 \text{ см}^3.$$

В соответствии с исходными данными доверительные границы неисключенных систематических погрешностей $\theta_m = 0,1$ г; $\theta_V = 0,1$ см^3. Соответствующие стандартные отклонения:

$$S_{\theta_m} = \frac{\theta_m}{\sqrt{3}} = 0,058 \text{ г},$$

$$S_{\theta_V} = \frac{\theta_V}{\sqrt{3}} = 0,058 \text{ см}^3.$$

Суммарные стандартные отклонения оценок измеряемых величин:

$$S_{m\Sigma} = \sqrt{\left(S_{\bar{m}}\right)^2 + \left(S_{\theta_m}\right)^2} = 0,109 \text{ г},$$

$$S_{V\Sigma} = \sqrt{\left(S_{\bar{V}}\right)^2 + \left(S_{\theta_V}\right)^2} = 0,157 \text{ см}^3.$$

Коэффициенты охвата в соответствии с формулой (18)

$$k_m = 2,38;\ k_V = 2,48.$$

Из сопоставления полученных значений коэффициентов охвата со значениями коэффициентов Стьюдента [4, Приложение Д] получаем ЧСС:

$$v_m = 6,84;\ v_V = 5,68.$$

Доверительные границы погрешностей оценок измеряемых величин:

$$\Delta_m = k_m \cdot S_{m\Sigma} = 0,260 \text{ г},$$

$$\Delta_V = k_V \cdot S_{V\Sigma} = 0,390 \text{ см}^3.$$

Частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = \frac{1}{V};\ \frac{\partial f}{\partial V} = -\frac{m}{V^2}. \qquad (21)$$

После подстановки средних значений:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 5,12 \cdot 10^{-3};\ \frac{\partial f}{\partial V} = -6,61 \cdot 10^{-3}.$$

Стандартная неопределенность результата косвенного измерения $u(\rho)$ по формуле (6) с учетом независимости входных переменных:

$$u(\rho) = \sqrt{\left(5,12 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot 0,109^2 + \left(-6,61 \cdot 10^{-3}\right)^2 \cdot 0,157^2} = 1,18 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Выполним проверку условия (8) возможности пренебрежения остаточным членом формулы Тейлора. Применительно к уравнению измерения (20) выражение для остаточного члена по формуле (9) примет следующий вид:

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial m^2} \cdot U^2(m) + \frac{\partial f}{\partial V^2} \cdot U^2(V) + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial m \cdot \partial V} \cdot U(m) \cdot U(V)\right). \qquad (22)$$

С учетом формулы (21) выражения для частных производных второго порядка имеют вид:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m^2} = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\partial f}{\partial m}\right) = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{1}{V}\right) = 0, \qquad (23)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial V^2} = \frac{\partial}{\partial V}\left(-\frac{m}{V^2}\right) = \frac{2m}{V^3}, \qquad (24)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m \cdot \partial V} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial f}{\partial m}\right) = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{V}\right) = -\frac{1}{V^2}, \qquad (25)$$

а их численные значения:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial V^2} = 6,763 \times 10^{-5};\ \frac{\partial^2 f}{\partial m \cdot \partial V} = -2,616 \times 10^{-5}.$$

Поскольку отклонения в результатах измерения, определяемые расширенной неопределенностью, возможны в любую сторону от точечной оценки, то будем использовать знак (плюс или минус), приводящий к оценке остаточного члена сверху, т.е. со стороны бóльших значений. Тогда значение остаточного члена:

$$R=\frac{1}{2}\left(0+6,763\cdot 10^{-5}\cdot 0,390^2+2\cdot 2,616\cdot 10^{-5}\cdot 0,260\cdot 0,390\right)=7,80\cdot 10^{-6}\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

Отношение:

$$\frac{R}{u(\rho)}=\frac{7,80\cdot 10^{-6}}{1,18\cdot 10^{-3}}=6,6\cdot 10^{-3}.$$

Таким образом, условие (8) выполняется и остаточным членом формулы Тейлора можно пренебречь.

Число эффективных степеней свободы ν стандартной неопределенности $u(\rho)$ по формулам (10) и (11):

$$\nu=\frac{\left(1,18\cdot 10^{-3}\right)^4}{\left(\frac{\left(5,12\cdot 10^{-3}\cdot 0,109\right)^4}{6,84}+\frac{\left(-6,61\cdot 10^{-3}\cdot 0,157\right)^4}{5,68}\right)}=8,82.$$

Коэффициент Стьюдента, соответствующий данному числу степеней свободы:

$$t_p(\nu)=2,27.$$

Расширенная неопределенность:

$$U(\rho)=2,27\cdot 1,18\cdot 10^{-3}=2,68\cdot 10^{-3}\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

По второму способу нахождения ЧСС стандартной неопределенности типа В в соответствии с исходными данными $\theta_m=0,1$ г; $\theta_V=0,1$ см^3. Тогда $\Delta\theta_m=0,05$ г; $\Delta\theta_V=0,05$ см^3. ЧСС в соответствии с формулой (19)

$$\nu_{m,B}=\frac{1}{2}\left[\frac{0,05}{0,1}\right]^{-2}=2;$$

$$\nu_{V,B}=\frac{1}{2}\left[\frac{0,05}{0,1}\right]^{-2}=2.$$

Суммарные ЧСС:

$$\nu_i=\frac{u^4(x_i)}{\frac{u_A(x_i)^4}{\nu_{i,A}}+\frac{u_B(x_i)^4}{\nu_{i,B}}}. \qquad (26)$$

Тогда:

$$\nu_m=\frac{0,109^4}{\frac{0,093^4}{4}+\frac{0,053^4}{2}}=5,92;$$

$$\nu_V=\frac{0,157^4}{\frac{0,146^4}{4}+\frac{0,053^4}{2}}=5,10.$$

Соответствующие коэффициенты охвата:

$$k_m=2,46;\ k_V=2,56$$

и расширенные неопределенности результатов прямых измерений:

$$U_m=k_m\cdot S_{m\Sigma}=0,268\ \text{г},$$

$$U_V=k_V\cdot S_{V\Sigma}=0,402\ \text{см}^3.$$

Значение ЧСС результата косвенного измерения по формулам (10) и (11) $\nu = 7,90$, что аналогичным образом приводит к значению коэффициента Стьюдента $t_2(\nu) = 2,31$ и расширенной неопределенности $U(\rho) = 2,73 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

При расчете по третьему способу в формулу (6) вместо стандартных неопределенностей подставляются значения расширенных неопределенностей результатов измерений величин *m* и *V*. В этом случае значение расширенной неопределенности получается равным $2,90 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Полученные результаты сведены в табл. 2.

Таблица 2.
Полученные значения параметров в зависимости от способа расчета

Table 2.
Parameter values depending on the calculation method

Входные и выходная величины	**ЧСС**		**Коэффициент охвата**		**Расширенная неопределенность**		
	1	2	1	2	1	2	3
Масса	6,84	5,92	2,38	2,46	0,260	0,268	0,260
Объем	5,68	5,10	2,48	2,56	0,390	0,402	0,390
Плотность	8,82	7,90	2,27	2,31	$2,68 \cdot 10^{-3}$	$2,73 \cdot 10^{-3}$	$2,90 \cdot 10^{-3}$

С учетом имеющихся требований [4] по округлению значения границ погрешности результата измерения, расширенную неопределенность в данном случае необходимо округлить до двух значащих цифр. В этом случае первые два способа расчета расширенной неопределенности результата косвенного измерения дают одинаковые значения. При расчете по третьему способу значение расширенной неопределенности получается несколько большим. Причиной этого является то, что в первых двух способах использование информации о НСП ведет к увеличению ЧСС и, соответственно, к уменьшению коэффициента охвата. Однако разница между полученными значениями составляет 7 %, что говорит о возможности применения и такого способа оценки расширенной неопределенности. Преимуществом последнего способа является то, что нахождения ЧСС и коэффициента охвата при расчете расширенной неопределенности не требуется.

Выводы

1. Исследованы проблемы получения оценки расширенной неопределенности результата косвенного измерения, связанные с оценкой ЧСС суммарной стандартной неопределенности.
2. Расширено понятие интерполяционного фактора для общего случая количества элементов в группе корреляционно зависимых входных переменных.
3. Предложено три способа нахождения расширенной неопределенности результата косвенного измерения, приведен пример расчета по этим способам и сопоставлены полученные результаты.
4. Расчет по первому способу дает наименьшее значение расширенной неопределенности. Отличительной особенностью предложенного способа является нахождение ЧСС суммарной стандартной неопределенности результата прямого измерения путем сопоставления коэффициента охвата, находимого в соответствии с ГОСТ Р 8.736-2011, с коэффициентом распределения Стьюдента. ЧСС, соответствующее равенству этих коэффициентов, принимается в качестве ЧСС суммарной стандартной неопределенности результата прямого измерения.

Библиографический список

1. Федеральный закон № 102-ФЗ от 26.06.2008 «Об обеспечении единства измерений». [Электронный ресурс]: https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_77904/ (дата обращения 10.02.2024).
2. ПМГ 96-2009. Результаты и характеристики качества измерений. Формы представления. [Электронный ресурс] // Режим доступа: https://docs.cntd.ru/document/1200079072 (дата обращения 10.02.2024).
3. РМГ 61-2010. Показатели точности, правильности, прецизионности методик количественного химического анализа. Методы оценки. [Электронный ресурс] // Режим доступа: https://docs.cntd.ru/document/1200094703 (дата обращения 10.02.2024).
4. ГОСТ Р 8.736-2011. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения. [Электронный ресурс] // Режим доступа: https://docs.cntd.ru/document/1200089016 (дата обращения 10.02.2024).
5. **Добротин, С.А.** Общая характеристика неопределенности измерений и ее сопоставление с погрешностью измерений / С.А. Добротин, О.Н. Косырева // Актуальные вопросы современных научных исследований: сборник статей VIII Международной научно-практической конференции. В 2 частях, Пенза, 05 декабря 2023 года. – Пенза: Наука и Просвещение, 2023. С. 62-69.
6. ГОСТ 34100.3-2017/ISO/IECGuide 98-3:2008. Неопределенность измерения. Часть 3. Руководство по выражению неопределенности измерения. [Электронный ресурс] // Режим доступа: https://docs.cntd.ru/document/1200146871 (дата обращения 10.02.2024).
7. РМГ 29-2013. Метрология. Основные термины и определения. [Электронный ресурс] // Режим доступа: https://docs.cntd.ru/document/1200115154 (дата обращения 10.02.2024).
8. **Попов, А.А.** Оценка неопределенности результатов косвенных измерений по результатам системного анализа остаточного члена формулы Тейлора / А.А. Попов, О.Н. Косырева, С.А. Добротин // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2023. № 2. С. 14-29. DOI: 10.46960/1816-210X_2023_2_14
9. Р 50.1.100-2014. Статистические методы. Три подхода к интерпретации и оценке неопределенности измерений. [Электронный ресурс] // Режим доступа: https://docs.cntd.ru/document/1200120832 (дата обращения 10.02.2024).
10. **Абдрахманов, В.И.** Оценка неопределенности измерений линейных индексов удерживания при повышении температуры капиллярной хроматографической колонки / В.И. Абдрахманов, С.А. Добротин, О.Н. Косырева, В.И. Логутов // Измерительная техника. 2023. № 1. С. 54-63. DOI: 10.32446/0368-1025it.2023-1-54-63
11. **Ферстер, Э.** Методы корреляционного и регрессионного анализа / Э. Ферстер, Б. Ренц. – Москва: Финансы и статистика, 1983. – .304 с.
12. **Большев, Л.Н.** Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1983. – 416 с.
13. **Айвазян, С.А.** Прикладная статистика: Исследование зависимостей: Справ. изд. / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 457 с.
14. МИ 2083-90. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей. [Электронный ресурс] // Режим доступа: https://docs.cntd.ru/document/1200007609 (дата обращения 10.02.2024).

Дата поступления
в редакцию: 15.03.2024

Дата принятия
к публикации: 25.04.2024