

УДК 519.6

DOI 10.46960/1816-210X_2025_2_31

EDN NRUOPM

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Г. Коротченко

ORCID: 0000-0002-7150-8114 e-mail: koangr@yandex.ru

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
*Нижний Новгород, Россия***В.М. Сморякова**

ORCID: 0000-0003-0357-0976 e-mail: smorykov@mail.ru

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
Нижний Новгород, Россия

Рассматриваются стратегии численного интегрирования, ориентированные на решение жестких систем дифференциальных уравнений и основанные на использовании конечно-разностной формулы, реализующей неявный метод интегрирования. Приводится доказательство того, что задача о построении оптимального алгоритма удовлетворяет условиям многоэтапности, описывается реализуемая версия оптимального алгоритма, предложены возможные модификации алгоритма, позволяющие не решать вспомогательные задачи. При этом под оптимальным алгоритмом численного интегрирования понимается алгоритм, который минимизирует число вычислений правых частей системы дифференциальных уравнений при условии выполнения ограничений, определяемых точностью вычислений. Приводятся результаты вычислительных экспериментов по использованию улучшенных стратегий по сравнению с ранее существующими.

Ключевые слова: системный анализ, математические задачи системного анализа, жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений, конечно-разностная формула, оптимизация, оптимальный алгоритм.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Коротченко, А.Г. О численном решении задачи Коши для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений / А.Г. Коротченко, В.М. Сморякова // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2025. № 2. С. 31-40. DOI: 10.46960/1816-210X_2025_2_31 EDN: NRUOPM

ON NUMERICAL SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ONE TYPE OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.G. Korotchenko

ORCID: 0000-0002-7150-8114 e-mail: koangr@yandex.ru

Nizhny Novgorod State University n.a. N.I. Lobachevsky
*Nizhny Novgorod, Russia***V.M. Smoryakova**

ORCID: 0000-0003-0357-0976 e-mail: smorykov@mail.ru

Nizhny Novgorod State University n.a. N.I. Lobachevsky
Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. The article discusses numerical integration strategies designed for solving stiff equations. These strategies are based on the use of a finite-difference formula that implements an implicit integration method. It is proved that the problem of constructing an optimal algorithm is a multi-stage problem. The implemented version of the optimal algorithm is described. Possible modifications of the algorithm, which do not require solving auxiliary problems, are proposed. Here, the optimal numerical integration algorithm refers to an algorithm that minimizes the number of computations of the right-hand sides of differential equations system, subject to constraints determined by the tolerance of

computations. The results of computational experiments on the use of improved strategies compared to those previously described are presented.

Key words: system analysis, mathematical problems of system analysis, stiff equations, finite-difference formula, optimization, optimal algorithm.

FOR CITATION: A.G. Korotchenko, V.M. Smoryakova. On numerical solution of the Cauchy problem for one type of ordinary differential equations. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2025. № 2. Pp. 31-40.

DOI: 10.46960/1816-210X_2025_2_31 EDN: NRUOPM

Введение

Разработка специального математического и алгоритмического обеспечения, ориентированного на решение различных классов задач системного анализа, оптимизации принятия решений является важной проблемой и представляет значительный интерес [1]. Математический аппарат системного анализа состоит из достаточно большого набора инструментов, одним из которых являются обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие динамику изучаемых систем [2, 3]. При этом важна оценка эффективности решения задач системного анализа, основанных на использовании адекватных математических моделей. При их построении приходится учитывать многие параметры, что приводит к т.н. явлению жесткости. Его суть определяется тем, что для адекватного описания процессов в любой точке наблюдения приходится использовать функции, которые меняются достаточно быстро, и функции, которые меняются медленно, т.е. рассматриваемая физическая система характеризуется сильно различающимися характерными временами. Если не учитывать «малые» параметры при моделировании реальных процессов, данное обстоятельство может существенным образом повлиять на адекватность построенной модели [6]. Поэтому в системах уравнений, описывающих изучаемый процесс, необходимо учитывать большое число параметров, что приводит к явлению жесткости [5, 6]. Такие системы встречаются, например, при решении задач радиофизики, физики плазмы, биофизики, изучении нейронов [5, 6, 14]. Задачи, связанные с быстро затухающими переходными процессами, в которых жесткость проявляется естественным образом, охватывают самые разные области, включая изучение демпфирующих систем, анализ систем управления, задачи химической кинетики. При этом момент окончания процесса анализа системы (интегрирования системы дифференциальных уравнений) в таких задачах может определяться только в процессе решения системы, так как связан с ее асимптотическим поведением. Кроме того, при анализе реальных процессов на основе построенной модели в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений может происходить перестройка модели в связи с изменением параметров, от которых зависит изучаемый процесс. Это означает, что указанную систему приходится решать многократно; при этом трудоемкость вычисления правых частей системы может быть достаточно высокой.

Соответственно, для эффективного решения задач системного анализа путем решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений необходимы эффективные методы численного интегрирования жестких систем дифференциальных уравнений. Необходимо отметить, что явление жесткости также характерно из-за большого различия собственных значений матрицы системы дифференциальных уравнений. Отличительной особенностью жестких систем является то, что на одних временных отрезках решение оказывается существенно нелинейным, а на других – близко к константе. Для решения такого рода систем используются неявные методы интегрирования [5, 6]. При этом, в силу существенно различного поведения решения на разных участках, требуется управлять выбором шагов интегрирования так, чтобы, с одной стороны, обеспечить приемлемую точность решения, а с другой стороны, когда трудоемкость вычисления правых частей системы высока, минимизировать число узлов интегрирования, используемой конечно-разностной формулы на всем отрезке интегрирования. Проблеме построения численных методов решения задачи Коши посвящено достаточно много работ [4-7].

В данной статье рассматриваются стратегии численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на использовании конечно-разностной формулы [8]; приводится доказательство того, что задача о построении оптимального алгоритма удовлетворяет условиям многоэтапности, приведенным в [13], и описывается реализуемая версия оптимального алгоритма. При этом под оптимальным алгоритмом численного интегрирования понимается алгоритм, который минимизирует число вычислений правых частей системы дифференциальных уравнений при условии выполнения ограничений, определяемых точностью вычислений. Для реализации оптимального алгоритма требуется решение вспомогательных задач. В работе приведено исследование свойств оптимальной стратегии интегрирования, на основе которого предлагается модификация рассматриваемых стратегий. Она позволяет исследователю упростить реализацию, отказавшись от решения вспомогательных задач. При этом эксперименты показывают, что качество решения существенно не меняется, более того, в ряде случаев наблюдается уменьшение количества вычислений правых частей.

Статья является продолжением работ авторов [8-12].

Постановка задачи

Решается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, при этом ее решение предполагается единственным и четырежды непрерывно дифференцируемым на отрезке $[x_0, t]$. Отметим, что значение параметра t не является известным, а находится в процессе интегрирования системы. Для отыскания значений $Y_i = (y_1^i, \dots, y_n^i)$, $i = 1, 2, \dots$, решения системы будем использовать конечно-разностную формулу [8].

Пусть $X(0, m) = (h_1, h_2, \dots, h_{2m-1}, h_{2m})$ стратегия интегрирования по конечно-разностной формуле на отрезке $[x_0, x_0 + z]$, z – заданная положительная константа. При этом шаги интегрирования выбираются таким образом, что $h_{2i-1} = \tau_i$, $h_{2i} = \tau_i$, $i = 1, \dots, m$, где τ_0 – заданная константа.

Задача заключается в построении стратегии интегрирования таким образом, чтобы для любого момента окончания процесса интегрирования число узлов интегрирования было минимальным. Выбор значения величины шага интегрирования задается ограничением, обусловленным точностью вычислений по указанной конечно-разностной формуле, и связаны с локальной ошибкой, получаемой для каждой компоненты решения из-за конечно-разностной аппроксимации. С учетом поставленных требований указанная задача может быть представлена задачей математического программирования:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \tau_i &\Rightarrow \max, \\ f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) &\leq 0, \\ \tau_i &\geq 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\tau_0 = \bar{\tau}_0$ – положительная вещественная константа,

$$f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = 14\tau_i^5 + 12\tau_{i-1}\tau_i^4 + 3\tau_{i-1}^2\tau_i^3 - 8\Delta_i\tau_i - 3\Delta_i\tau_{i-1}, \quad (2)$$

где $\Delta_i = 2\varepsilon_i K^{-1}$, $\varepsilon_i > 0$, $K > 0$, $i = 1, \dots, m$. Вещественная константа $K > 0$ ограничивает абсолютное значение четвертой производной от компонент вектора решения $Y(x)$:

$$\max_{1 \leq j \leq n} |y^{IV}(x)^j| \leq K,$$

ε_i – заданная точность вычислений на i -ом шаге интегрирования.

Последовательность τ_i будем называть оптимальной τ – последовательностью. Стратегию интегрирования $X(0, m)$, полученную с помощью оптимальной τ – последовательности, будем называть оптимальной стратегией интегрирования.

Построение оптимальной стратегии, основанной на использовании конечно-разностной формулы

Обозначим через

$$u_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = 70\tau_i^4 + 48\tau_{i-1}\tau_i^3 + 9\tau_{i-1}^2\tau_i^2 - 8\Delta_i \quad (3)$$

производную функции $f_i(\tau_{i-1}, \tau_i)$ по τ_i , а через

$$v_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = 12\tau_i^4 + 6\tau_{i-1}\tau_i^3 - 3\Delta_i \quad (4)$$

производную функции $f_i(\tau_{i-1}, \tau_i)$ по τ_{i-1} , $i = 1, \dots, m$.

Лемма 1.

При выполнении условия

$$f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = 14\tau_i^5 + 12\tau_{i-1}\tau_i^4 + 3\tau_{i-1}^2\tau_i^3 - 8\Delta_i\tau_i - 3\Delta_i\tau_{i-1} = 0, \quad (5)$$

где $\tau_{i-1} \geq 0$, $\tau_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, имеют место следующие оценки:

$$u_i(\tau_{i-1}, \tau_i) > 0, \quad (6)$$

$$v_i(\tau_{i-1}, \tau_i) > 0, \quad (7)$$

$$0 < 1 - \frac{v_i(\tau_{i-1}, \tau_i)}{u_i(\tau_{i-1}, \tau_i)} < 1. \quad (8)$$

Доказательство.

Покажем справедливость неравенства (6), где $\tau_{i-1} \geq 0$, $\tau_i > 0$. Учитывая соотношения (3) и (5) получаем, что:

$$\tau_i u_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = 70\tau_i^5 + 48\tau_{i-1}\tau_i^4 + 9\tau_{i-1}^2\tau_i^3 - 8\Delta_i\tau_i = f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) + 58\tau_i^5 + 36\tau_{i-1}\tau_i^4 + 6\tau_{i-1}^2\tau_i^3 + 3\Delta_i\tau_{i-1} = 58\tau_i^5 + 36\tau_{i-1}\tau_i^4 + 6\tau_{i-1}^2\tau_i^3 + 3\Delta_i\tau_{i-1} > 0$$

В силу того, что $\tau_i > 0$, имеем $u_i(\tau_{i-1}, \tau_i) > 0$.

Аналогично доказывается справедливость неравенства (7) путем рассмотрения выражения $\left(\frac{8}{3}\tau_i + \tau_{i-1}\right)v_i(\tau_{i-1}, \tau_i)$.

Учитывая (4) и (5), получаем, что:

$$\left(\frac{8}{3}\tau_i + \tau_{i-1}\right)v_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = 32\tau_i^5 + 28\tau_{i-1}\tau_i^4 + 6\tau_{i-1}^2\tau_i^3 - 8\Delta_i\tau_i - 3\Delta_i\tau_{i-1} = f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) + 18\tau_i^5 + 16\tau_{i-1}\tau_i^4 + 3\tau_{i-1}^2\tau_i^3 = 18\tau_i^5 + 16\tau_{i-1}\tau_i^4 + 3\tau_{i-1}^2\tau_i^3 > 0$$

, откуда следует, что $v_i(\tau_{i-1}, \tau_i) > 0$ при $\tau_{i-1} \geq 0$, $\tau_i > 0$ и $f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Из (6) и (7) следует, что $1 - \frac{v_i(\tau_{i-1}, \tau_i)}{u_i(\tau_{i-1}, \tau_i)} < 1$.

Покажем теперь, что:

$$1 - \frac{v_i(\tau_{i-1}, \tau_i)}{u_i(\tau_{i-1}, \tau_i)} > 0. \quad (9)$$

Так как $u_i(\tau_{i-1}, \tau_i) > 0$, при $\tau_{i-1} \geq 0$, $\tau_i > 0$ и $f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = 0$, $i = 1, \dots, m$, то (9) равносильно неравенству:

$$w_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = u_i(\tau_{i-1}, \tau_i) - v_i(\tau_{i-1}, \tau_i) > 0. \quad (10)$$

Подставляя в (10) выражение для $u_i(\tau_{i-1}, \tau_i)$ и $v_i(\tau_{i-1}, \tau_i)$ из (3) и (4), получаем, что нужно убедиться в справедливости неравенства:

$$w_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = 58\tau_i^4 + 42\tau_{i-1}\tau_i^3 + 9\tau_{i-1}^2\tau_i^2 - 5\Delta_i > 0$$

при выполнении равенства (5), где $\tau_{i-1} \geq 0$, $\tau_i > 0$.

Для этого рассмотрим выражение $\left(\frac{8}{5}\tau_i + \frac{3}{5}\tau_{i-1}\right)w_i(\tau_{i-1}, \tau_i)$ и получим, что

$$\left(\frac{8}{5}\tau_i + \frac{3}{5}\tau_{i-1}\right)w_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) + \frac{394}{5}\tau_i^5 + \frac{276}{5}\tau_{i-1}\tau_i^4 + \frac{183}{5}\tau_{i-1}^2\tau_i^3 + \frac{27}{5}\tau_{i-1}^3\tau_i^2 = \frac{394}{5}\tau_i^5 + \frac{276}{5}\tau_{i-1}\tau_i^4 + \frac{183}{5}\tau_{i-1}^2\tau_i^3 + \frac{27}{5}\tau_{i-1}^3\tau_i^2 > 0.$$

Следовательно, $w_i(\tau_{i-1}, \tau_i) > 0$ и неравенство (9) доказано при $\tau_{i-1} \geq 0$, $\tau_i > 0$ и $f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = 0$, $i = 1, \dots, m$. Таким образом, лемма 1 доказана.

Пусть $\tau_0 \in [0, \tilde{\tau}_i]$, где $\tilde{\tau}_i = \left(\frac{4}{7}\Delta_i\right)^{\frac{1}{4}}$, $i = 1, \dots, m$.

Лемма 2.

Уравнение $f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) = 0$ задает однозначную положительную функцию $g_i(\tau_{i-1})$ такую, что выполнение соотношения $f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) \leq 0$ равносильно выполнению неравенства $\tau_i \leq g_i(\tau_{i-1})$, $\tau_{i-1} \in [0, \tilde{\tau}_{i-1}]$, $i = 1, \dots, m$.

Доказательство.

При $\tau_{i-1} = 0$ имеем $g_i(0) = \left(\frac{4}{7}\Delta_i\right)^{\frac{1}{4}} > 0$.

Пусть при фиксированном значении $\tau_{i-1} \in [0, \tilde{\tau}_{i-1}]$ $\tilde{f}_i(\tau_i) = f_i(\tau_{i-1}, \tau_i)$, где функция $f_i(\tau_{i-1}, \tau_i)$ определена в (2). Используя (2), непосредственно находим, что функция $\tilde{f}_i(\tau_i)$ является непрерывной и выпуклой функцией при $\tau_i \geq 0$. При этом $\tilde{f}_i(0) = -3\Delta_i\tau_{i-1} < 0$, а $\tilde{f}_i(\tilde{\tau}_i) = \frac{27}{7}\Delta_i\tau_{i-1} + 3\tau_{i-1}^2\tilde{\tau}_i^3 > 0$, так как $\Delta_i > 0$, $\tau_{i-1} > 0$, $\tilde{\tau}_i > 0$, $i = 1, \dots, m$. Следовательно, при каждом фиксированном значении $\tau_{i-1} \in [0, \tilde{\tau}_{i-1}]$ существует единственное значение $\tau_i = g_i(\tau_{i-1}) \in (0, \tilde{\tau}_i)$ такое, что $\tilde{f}_i(g_i(\tau_{i-1})) = f_i(\tau_{i-1}, g_i(\tau_{i-1}))$, причем $\tilde{f}_i(\tau_i) = f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) \leq 0$, для каждого $\tau_{i-1} \in [0, \tilde{\tau}_{i-1}]$, $\tau_i \in [0, g_i(\tau_{i-1})]$, $i = 1, \dots, m$, откуда следует равносильность соотношений $f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) \leq 0$ и $\tau_i \leq g_i(\tau_{i-1})$.

Лемма 2 доказана.

Теорема 1.

Решение задачи (1) существует.

Доказательство.

Приведем задачу (1) к задаче на минимум:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^m \tau_i &\Rightarrow \min \\ f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) &\leq 0, i = 1, \dots, m, \\ \tau_i &\geq 0, i = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (11)$$

$\tau_0 = \bar{\tau}_0 > 0$ - заданная величина.

Пусть D_m - допустимое множество задачи (11). Множество D_m является ограниченным. Действительно, при заданном значении $\tau_0 \in (0, \tilde{\tau}_0)$, с учетом доказательства леммы 2, имеем, что если выполнено соотношение $f_1(\tau_0, \tau_1) \leq 0$, то $0 \leq \tau_1 \leq g_1(\tau_0)$. В силу того, что функция $g_i(\tau_{i-1})$ строго монотонно убывает при $f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) \leq 0$ из леммы 2 следует, что $0 \leq \tau_i \leq g_i(0) = \left(\frac{4}{7}\Delta_i\right)^{\frac{1}{4}}$, $i = 2, \dots, m$. Поскольку функции $f_i(\tau_{i-1}, \tau_i)$, $i = 1, \dots, m$ непрерывны, то множество D_m замкнуто. Тогда, по теореме Вейерштрасса, задача (1) имеет решение. Теорема 1 доказана.

В силу леммы 1, леммы 2 и теоремы 1 задача (1) является многоэтапной задачей математического программирования [14]. Это означает, что задача (1) может быть решена последовательным решением m локальных задач:

$$\begin{aligned} \tau_i &\Rightarrow \max, \\ f_i(\tau_{i-1}, \tau_i) &\leq 0, i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, чтобы построить оптимальную стратегию интегрирования, необходимо решить уравнение (5) для нахождения значения τ_i , $i = 1, \dots, m$.

Исследование оптимальной стратегии

В [16] рассматривалась упрощенная стратегия интегрирования, основанная на том свойстве, что оптимальная τ -последовательности сходится к неподвижной точке при фиксированном значении $\Delta_i = \Delta$ на отрезке длины z . Приведем доказательство данного факта.

Напомним, что уравнение (5) на отрезке $[0, \tilde{\tau}]$, $\tilde{\tau} = \left(\frac{4}{7}\Delta\right)^{\frac{1}{4}}$, $\tilde{\tau} < z$, при фиксированном $\tilde{\tau}_{i-1}$ имеет единственный положительный корень. Пусть g - отображение отрезка $[0, \tilde{\tau}]$ в се-

бя, определяемое уравнением (5), тогда $g(\bar{\tau})$ будет единственным положительным корнем уравнения (5), где $\bar{\tau} \in [0, \tilde{\tau}]$.

Производная $g'(\bar{\tau})$ функции $g(\bar{\tau})$, $\bar{\tau} \in [0, \tilde{\tau}]$, имеет вид:

$$g'(\bar{\tau}) = -\frac{v(\bar{\tau}, g(\bar{\tau}))}{u(\bar{\tau}, g(\bar{\tau}))},$$

где $u(\bar{\tau}, g(\bar{\tau})) = 70g^4(\bar{\tau}) + 48\bar{\tau}g^3(\bar{\tau}) + 9\bar{\tau}^2g^2(\bar{\tau}) - 8$,

$v(\bar{\tau}, g(\bar{\tau})) = 12g^4(\bar{\tau}) + 6\bar{\tau}g^2(\bar{\tau}) - 3$. При выполнении равенства (5)

$$u(\bar{\tau}, g(\bar{\tau})) > 0,$$

$$v(\bar{\tau}, g(\bar{\tau})) > 0,$$

т.е. функция $g(\bar{\tau})$ дифференцируема при $\bar{\tau} \in [0, \tilde{\tau}]$ и строго монотонно убывает на этом отрезке. Кроме того

$$|g'(\bar{\tau})| \leq \frac{3}{16}$$

в силу (5), т.е. отображение g на отрезке $[0, \tilde{\tau}]$ является сжимающим отображением и имеет единственную неподвижную точку

$$\bar{\tau}^* = \left(\frac{11}{29}\Delta\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Исследуем зависимость числа итераций $\bar{m}$, необходимых для достижения неподвижной точки $\bar{\tau}^*$, от значения Δ и τ_0 . Для этого будем разрешать уравнение (5) методом дихотомии с заданной точностью $\delta = 0,000001$. В результате вычислительных экспериментов на тестируемых системах дифференциальных уравнений выявлены характерные интервалы изменения значений для Δ и τ_0 : $[10^{-15}, 10^5]$ и $[10^{-6}, 10^1]$ соответственно. Вычислительный эксперимент показал, число итераций $\bar{m}$ при варьировании значения τ_0 для фиксированного значения Δ слабо изменяется. Для примера приведем в табл. 1 результаты эксперимента при $\Delta = 0,0001$, $\bar{\tau}^* = 0,078478$.

Таблица 1.

Сходимость оптимальной τ -последовательности при фиксированном $\Delta = 0,0001$

Table 1.

The convergence of optimal τ -sequence for fixed $\Delta = 0.0001$

τ_0	$\bar{m}$
10	6
5	6
3	6
1	6
0,1	5
0,01	5
0,001	5
0,0001	5
0,00001	5
0,000001	5

При этом при уменьшении значения Δ число итераций $\bar{m}$ уменьшается. В табл. 2 приведены результаты эксперимента для фиксированного значения шага $\tau_0 = 0,0001$. Данный факт позволяет предложить использовать для вычисления шагов интегрирования значения неподвижной точки на подынтервалах с быстрым изменением решения (например, при $\Delta \leq 10^{-7}$), т.е. не использовать вспомогательные методы для решения уравнения (5) для указанных подынтервалов.

Таблица 2.

Сходимость оптимальной τ -последовательности при фиксированном $\tau_0 = 0,0001$

Table 2.

The convergence of optimal τ -sequence for fixed $\tau_0 = 0.0001$

Δ	$\overline{m}$
10000	8
1000	8
100	7
10	6
1	6
0,1	6
0,01	6
0,001	6
0,0001	5
10^{-5}	5
10^{-6}	6
10^{-7}	4
10^{-8}	4
10^{-9}	4
10^{-10}	4
10^{-11}	4
10^{-12}	4
10^{-13}	3
10^{-14}	3
10^{-15}	2

Реализуемая версия оптимального алгоритма

Общую схему алгоритма интегрирования, основанного на оптимальной стратегии, можно описать следующим образом.

1. Определим начальный шаг интегрирования $h_0 = \tau_0$, где τ_0 – заданное положительное число.

2. Определим величину $z > 0, z \in R$, определяющая размер подотрезка $[x_0, x_0 + z]$, на котором строится решение системы.

3. Построим оценку K четвертой производной от компонент решения системы дифференциальных уравнений для подотрезка $[x_0, x_0 + z]$. По трем узлам из истории вычислений, если у нас есть информация о предыдущих узлах, и узлу сделанного с шагом $h = z$ построим полином Лагранжа четвертого порядка. Далее вычислим четвертую производную для данного полинома и в качестве оценки K возьмем ее абсолютное значение. Если информации о предыдущих вычислениях нет (в начале работы метода), необходимо трижды проинтегрировать систему с шагом $h = -\tau_0$.

4. Определим шаги интегрирования $h_{2i-1} = \tau_i$, $h_{2i} = \tau_i$, а $h_{2i-2} = \tau_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$. Значение τ_i находим, применяя одну из возможных модификаций: разрешая уравнение (5) при фиксированном τ_{i-1} , если Δ превышает пороговое значения $\overline{\Delta}$, и используя в качестве величины шага значение $\overline{\tau}^*$ в противном случае.

5. Если $x_m > x_0 + z$, переходим к следующему подотрезку, принимая $x_0 = x_m$, и переходим к шагу 2.

6. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие останова.

Вычислительный эксперимент

Продemonстрируем работоспособность предложенной модификации для стратегии интегрирования, описанной в [10, 11] и основанной на оптимальной стратегии. Эксперименты проводились для обыкновенных систем уравнений, описывающих модель Ходкина-Хаксли [14]. Данная модель используется в нейродинамике в качестве фундаментальной модели описания динамики нейрона и расширяется, например, добавлением в модель дополнительных ионных каналов и учетом пространственной структуры нейрона.

Приведем здесь результаты экспериментов, где в качестве функции $I(t)$, определяющей силу тока, подающуюся на мембрану нейрона, выбирались константная $I(t) = 0,5$ и синусоидальная функции $I(t) = \sin t + 1$, отрезок интегрирования выбирался равным $[0, 200]$. В табл. 3 представлены результаты, отражающие сравнение запусков с применением предложенной модификации и оптимальной стратегии выбора шагов интегрирования. В качестве основных параметров сравнения используется количество шагов N , минимальная и максимальная величины шагов h_{min} и h_{max} при варьировании параметра ε_i , определяющего точность вычисления размера шага. Оптимальная стратегия обозначена через α , предложенная модификация – через $\bar{\alpha}$ соответственно. Для $\bar{\alpha}$ пороговое значение $\bar{\Delta} = 10^{-7}$.

Таблица 3.

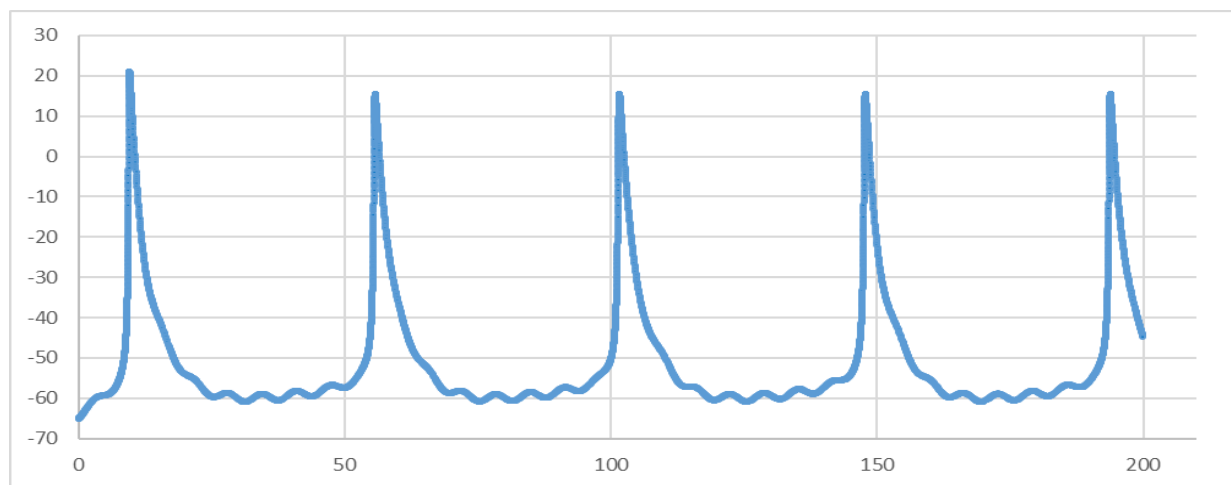
Сравнение результатов запуска α и $\bar{\alpha}$.

Table 3.

The comparison of obtained results for α and $\bar{\alpha}$

$I(t)$	ε_i	$N(\alpha)$	$N(\bar{\alpha})$	$h_{min}(\alpha)$	$h_{min}(\bar{\alpha})$	$h_{max}(\alpha)$	$h_{max}(\bar{\alpha})$
$\sin t + 1$	0,0001	2598	2510	0,00327	0,003481	0,33434	0,54808
$\sin t + 1$	0,00001	5507	5234	0,00169	0,001957	0,23534	0,20654
0,5	0,0001	1016	987	0,00479	0,006064	0,67421	1,01793
0,5	0,00001	2945	2596	0,00196	0,002052	0,80173	0,67902

Отметим, что для более низкой точности ε_i предложенная модификация не запускается, так как значение параметра Δ , которая зависит от ε_i , не попадает в определенный выше диапазон. На рис. 1 и 2 изображены графики компонент решений $V(t)$, $m(t)$, $n(t)$, $h(t)$, полученные для синусоидальной функции для случая $\varepsilon_i = 0,00001$.

Рис. 1. График функции $V(t)$ для случая $\varepsilon_i = 0,00001$ Fig. 1. $V(t)$ function graph for $\varepsilon_i = 0.00001$

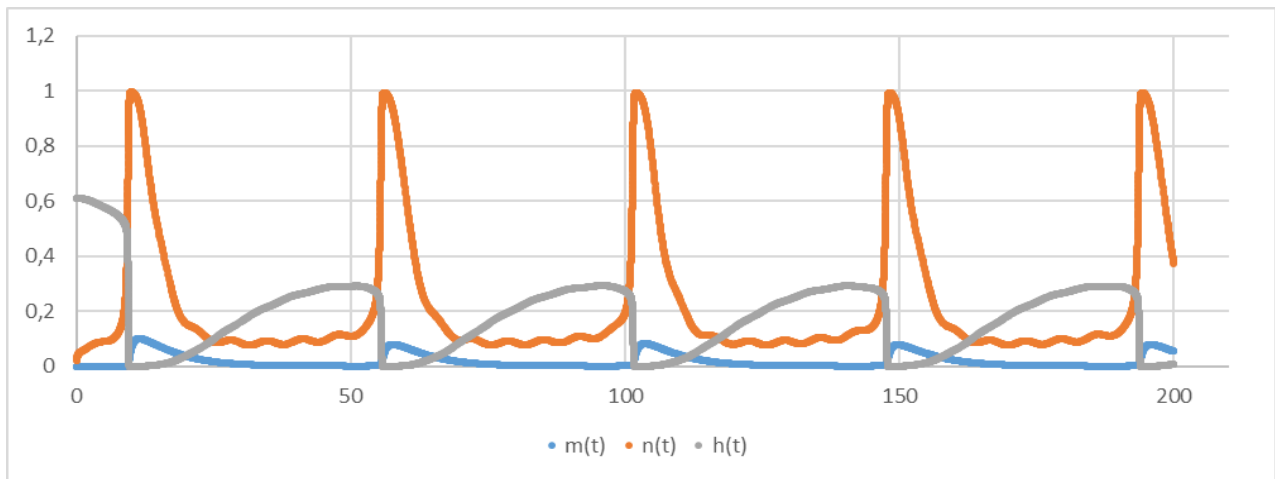


Рис. 2. Графики функций $m(t)$, $n(t)$, $h(t)$ для случая $\varepsilon_i = 0,00001$

Fig. 2. $m(t)$, $n(t)$, $h(t)$ functions graphs for $\varepsilon_i = 0.00001$

В табл. 4 представим результаты запусков алгоритма для задачи Коши, приведенной в [8]. Она имеет аналитическое решение, поэтому в качестве основных параметров сравнения будем использовать максимальную разность между аналитическим и численным решением σ , полученную по всем компонентам решения, и число шагов интегрирования N . Оптимальная стратегия обозначена через α , предложенная модификация – через $\bar{\alpha}$ соответственно. Здесь в модификации $\bar{\alpha}$ будем использовать для подотрезков длиной $z = 0,1$ величину шага, равную $\bar{\tau}^*$.

Таблица 4.

Сравнение результатов запуска α и $\bar{\alpha}$.

Table 4.

The comparison of obtained results for α and $\bar{\alpha}$

ε_i	$N(\alpha)$	$N(\bar{\alpha})$	$\sigma(\alpha)$	$\sigma(\bar{\alpha})$
0,00001	199	196	0,000012	0,0000364
0,0001	187	184	0,00011	0,000265
0,001	100	95	0,00631	0,00708
0,01	55	53	0,011	0,013
0,1	20	18	0,011	0,0129

Заключение

Построена стратегия (алгоритм) решения задачи Коши для класса жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведено доказательство того, что задача о построении оптимальной стратегии удовлетворяет условиям многоэтапности [9], что позволяет при ее реализации выбирать шаги интегрирования путем решения возникающих локальных задач, гарантирующих минимизацию узлов интегрирования на всем отрезке интегрирования. Предложена модификация оптимальной стратегии, позволяющая не решать многократно возникающие при ее реализации вспомогательные задачи.

Результаты вычислительного эксперимента показывают, что использование стратегии выбора шагов интегрирования с описанной модификацией, является допустимой эвристикой, позволяющей сохранить качество получаемого решения и получить приемлемый результат.

Исследования проведены с использованием системы тестирования разрабатываемых алгоритмов [15].

Работа выполнена в рамках реализации программы «Передовая инженерная школа» Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Библиографический список

1. **Afraimovich, L.G.** Scientific and Pedagogical School of Dmitry Ivanovich Batishchev / Basalin P.D., Korotchenko A.G., Prilutskii M.Kh., Starostin N.V. // Pattern Recognition and Image Analysis. V. 33. № 4. 2023. P. 1473-1478
2. **Моисеев, Н.Н.** Математические задачи системного анализа / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1981. – 488с.
3. **Моисеев, Н.Н.** Математические задачи системного анализа. // Изд. стереотип. 2023. 532 с.
4. **Бахвалов, Н.С.** Численные методы / Жидков Н.П., Кобельков Г.М. // Лаборатория знаний. 2023. 636 с.
5. **Хайпер Э.,** Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Ваннер Г. / Издательство: Мир. 1999. 688 с.
6. **Ракитский Ю.В.,** Численные методы решения жестких систем / Устинов С.М., Черноуцкий И.Г. / М.: Наука. 1979. 208 с.
7. **Shampine L.F.,** The MATLAB ODE Suite / Reichelt M. W. // SIAM Journal on Scientific Computing. 1997. Vol. 18. P. 1-22.
8. **Korotchenko, A.G.** On a method of construction of numerical integration formulas / Smoryakova V.M. // AIP Conf. Proc., Numerical Computations: Theory and Algorithms (NUMTA-2016). 2016. T. 1776. C. 090012.
9. **Korotchenko, A.G.** On a comparison of several numerical integration methods for ordinary systems of differential equations / Smoryakova V.M. // Lecture Notes in Computer Science. 2020. T. 2. C. 406-412.
10. **Коротченко, А.Г.** О стратегиях численного интегрирования, основанных на использовании одной конечно-разностной формулы / Сморякова, В.М. // Интеллектуальные информационные системы: труды Международной научно-практической конференции: в 2 ч. Воронеж: Изд-во ВГТУ. 2021. Т. 1. С. 91-96.
11. **Коротченко, А.Г.** Об одной стратегии численного интегрирования, основанной на использовании конечно-разностной формулы / Сморякова, В.М. // В сборнике: Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XXI Международной конференции. Нижний Новгород. 2021. Т. 1. С. 174-179.
12. **Коротченко, А.Г.** О некоторых стратегиях численного интегрирования, основанных на использовании конечно-разностной формулы / В.М. Сморякова, А.Г. Коротченко // В сборнике: Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии. Труды XXII Международной конференции. Нижний Новгород. 2022. Т. 1. С. 46-51.
13. **Коротченко, А.Г.** О задачах математического программирования, имеющих многоэтапный характер // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. Т. 1. С. 183-187.
14. **Wulfram Gerstner,** Neuronal Dynamics. From single neurons to networks and models of cognition / Werner M. Kistler, Richard Naud, Liam Paninski // <https://neurondynamics.epfl.ch/online/index.html>.
15. **Сморякова, В.М.** О программной реализации системы, предназначенной для исследования алгоритмов с требуемыми свойствами // Интеллектуальные Информационные Системы: труды Международной научно-практической конференции, посвященной 40-летию кафедры САПРИС. Воронеж. 2024. С. 234-238.

*Дата поступления
в редакцию: 27.02.2025*

*Дата принятия
к публикации: 02.05.2025*