УДК **517.938.5** DOI **10.46960/1816210X_2025_3_59**
EDN **IEREQK**

МЕТОДИКА ПРОБЛЕМНО-ОРИЕНТИРОВАННОЙ ГРУППИРОВКИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВАНИИ СИММЕТРИЧНОСТИ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ

А.В. Тарасов
ORCID: **0009-0008-5052-5987** e-mail: **tarasov_av@mirea.ru**
МИРЭА – Российский технологический университет
Москва, Россия

Е.В. Никульчев
ORCID: **0000-0003-1254-9132** e-mail: **nikulchev@mirea.ru**
МИРЭА – Российский технологический университет
Москва, Россия

А.А. Червяков
ORCID: **0000-0002-5638-8361** e-mail: **achervyakov@roskazna.ru**
Федеральное казначейство Министерства финансов Российской Федерации
Москва, Россия

Рассматривается задача группировки, актуальная для большого количества финансовых временных рядов, имеющих схожую динамику, для каждого из которых построение индивидуальной модели трудоемко, или точные модели не требуются управляющей системой. В качестве принципа схожести предложено использовать поиск преобразований симметрий реконструированных фазовых траекторий. Разработана методика поиска симметрий на основе Прокрустова алгоритма. Если удается построить преобразование одной траектории в другую из комбинации симметрий переноса, растяжения или сжатия и поворота, такие временные ряды могут быть объединены в группу, с которой можно оперировать как с одним рядом. Приведены результаты вычислений для финансовых временных рядов, представляющие собой пронормированные обезличенные данные о ежедневных остатках на счетах в течение одного года. Полученные результаты могут быть применены для построения прогнозных моделей группы рядов, синхронизации в случае неполной информации, анализа качества данных и других приложениях, оперирующих с однотипными временными рядами.

Ключевые слова: фазовый анализ, финансовых временных рядов, преобразования симметрий, прокрустов алгоритм, аттракторы.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Тарасов А.В. Методика проблемно-ориентированной группировки финансовых временных рядов на основании симметричности фазовых портретов / А.В. Тарасов, Е.В. Никульчев, А.А. Червяков // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2025. № 3. С. 59-66. DOI: 10.46960/1816210X_2025_3_59 EDN: IEREQK

METHOD OF PROBLEM-ORIENTED GROUPING OF TIME SERIES BASED ON SYMMETRY OF PHASE PORTRAIT

A.V. Tarasov
ORCID: **0009-0008-5052-5987** e-mail: **tarasov_av@mirea.ru**
MIREA – Russian Technological University
Moscow, Russia

E.V. Nikulchev
ORCID: **0000-0003-1254-9132** e-mail: **nikulchev@mirea.ru**
MIREA – Russian Technological University
Moscow, Russia

© Тарасов А.В., Никульчев Е.В., Червяков А.А., 2025

A.A. Chervyakov
ORCID: **0000-0002-5638-8361** e-mail: **achervyakov@roskazna.ru**
Federal Treasury of the Ministry of Finance of the Russian Federation
Moscow, Russia

Abstract. Phase analysis is currently becoming one of the established approaches to time series analysis, since dynamic, evolutionary dynamic models are one of the main tools for modeling systems by time series. The problem of grouping time series is considered, which is relevant for a large number of financial time series with similar dynamics, for each of which the construction of an individual model is labor-intensive or accurate models are not required by the control system. As a principle of similarity, it is proposed to use the search for symmetry transformations of reconstructed phase trajectories. A technique for searching for symmetries based on the Procrustes algorithm has been developed. If it is possible to construct a transformation of one trajectory into another from a combination of translation, extension or compression and rotation symmetries, then such time series can be combined into a group, which can be operated with as a single series. The results of calculations for financial time series are presented, which are normalized anonymized data on daily account balances for one year. The obtained results can be used to construct forecast models for a group of series, synchronization in case of incomplete information, data quality analysis and other applications operating with similar time series.

Keywords: phase analysis, financial time series, symmetry transformations, Procrust algorithm, attractors.

FOR CITATION: A.V. Tarasov, E.V. Nikulchev, A.A. Chervyakov. Method of problem-oriented grouping of time series based on symmetry of phase portrait. Transactions of NNSTU n. a. R.E. Alekseev. 2025. № 3. Pp. 59-66. DOI: 10.46960/1816210X_2025_3_59 EDN: IEREQK

1. Введение

Анализ реконструированных по временным рядам фазовых портретов в настоящее время стал одним из устоявшихся инструментов исследования, применяемых, в том числе, и к экономическим процессам [1]. Например, сезонные циклы хорошо видны в фазовом пространстве. Реконструкция аттракторов диссипативных систем определила целую область в системах с хаотической динамикой, развив методы оценки характеристик по экспериментальным данным [2, 3]. Открытие и общее признание скрытых аттракторов как контрпримеры к гипотезе Калмана [4, 5] дают потенциал для моделирования, поскольку показано, что в аффинных динамических системах с аддитивной нелинейной частью могут возникать невынужденные колебания, приводящие к нестационарным хаотическим режимам [6, 7]. Скрытые невынужденные колебания в системе уравнений, используемой в формулировке гипотезы Калмана (аффинные системы с линейной и нелинейной частью, которые, кстати, имеют форму уравненный, редуцированных на центральное инвариантное многообразие [2]), необязательно имеют странные аттракторы, могут быть и предельные циклы [8]. Это позволяет строить единую модель для режимов с устойчивым и неустойчивым поведением, в зависимости от исходных значений. Вместе с тем, использование в качестве нелинейной части уравнений динамики косочно-непрерывных элементов может расширить группу Ли. Групповой анализ систем дифференциальных уравнений [9] оперирует с преобразованиями симметрий частных решений. Таким образом, для хаотических и устойчивых решений, сгенерированных одной системой, по-видимому, тоже должно существовать конечное инвариантное преобразование [2]. Все это дает предпосылки для исследований в области симметрий фазовых портретов. Симметричность нелинейных процессов давно привлекает внимание исследователей. К последним результатам можно отнести использование симметрий для повторения хаотических процессов при кодировании данных [10] и для синхронизации нелинейных систем [11].

Цель исследования – для отобранных, потенциально схожих финансовых временных рядов, представляющих собой остатки на счетах, найти их симметричность по отношению к преобразованиям (переноса, растяжения/сжатия, поворота). Полученные таким образом результаты дают основание формировать единую модель для группы рядов, прогнозировать и управлять процессами как одной системой с учетом найденных коэффициентов преобразований.

В [12] показано, что для субъектов с однотипной экономической деятельностью характерны временные ряды со схожей динамикой. Это, согласно [13], является результатом, например, сезонных трат на закупку одинаковых товаров и услуг. В [14] была рассмотрена задача распределения резервов денежных средств между филиалами крупных банков (или аналогичная задача загрузки банкоматов купюрами), в которой вводится понятие симметричной сезонности, где сезонные колебания считаются инвариантами для филиалов, и стоится управление на основе коэффициентов масштабирования. Однако в этих работах рассматривалось выявление схожести для построения интервального прогноза, поэтому делалось предположение об инвариантности сезонности и возможном слабом нарушении симметрий, что нивелируется искомыми интервальными моделями для группы симметричных рядов.

Настоящее исследование состоит в поиске преобразования, позволяющего достаточно точно выявлять симметричные ряды и соответствующие параметры преобразований. Результаты могут использоваться как для робастных интервальных моделей, так и для стохастического моделирования нестационарного процесса, в условиях предположения о вероятностной природе отклонений от симметрии.

2. Исходные данные и материалы

Для исследования берутся временные ряды, представляющие собой пронормированные обезличенные данные об ежедневных остатках на счетах клиентов. Для примера рассмотрено 7 счетов, динамика которых приведена на рис. 1.

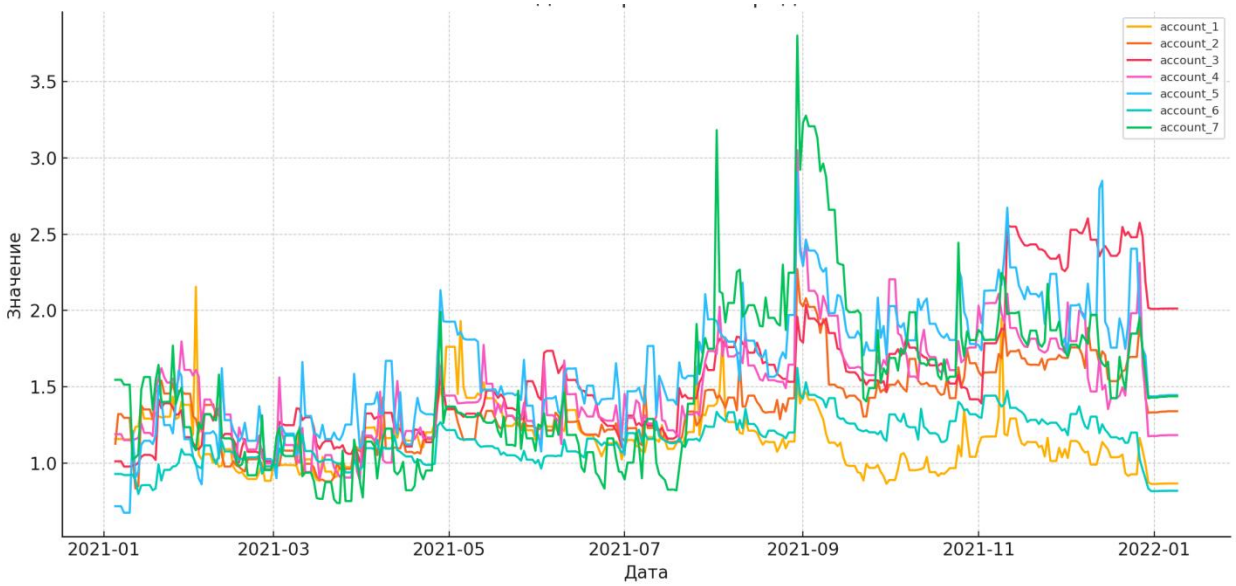

Рис. 1. Отобранные временные ряды для исследования

Fig. 1. Time series selected for study

Пусть каждый ряд порожден некоторой диссипативной автономной динамической системой:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{1}$$

$$y = g(\mathbf{x}), \tag{2}$$

где $\mathbf{x}$ – вектор состояний системы $x \in \mathbf{R}^n$; n – размерность пространства состояний; y – скалярный выходной параметр; t_0 – начальный момент времени наблюдения процесса; f, g – некоторые кусочно-непрерывные функции.

В системе (1)-(2) решение системы дифференциальных уравнений в задаче Коши (1), сворачивается так называемым уравнением динамики с помощью функции $g(\mathbf{x})$, то есть представляет собой некоторую интегрирующую функцию от пространственных координат, то есть от решения системы дифференциальных уравнений. Следовательно, можно рассматривать (2) как преобразование фазового портрета системы дифференциальных уравнений (1), учитывая групповые свойства решений. Таким образом, если построить кривую в координатах $(y, \dot{y}, \ddot{y}, ...)$, то она будет гомеоморфна фазовым портретам из тех же начальных условий, что дает возможность при сравнении двух систем, эти кривые можно анализировать также, как и симметричность самих фазовых траекторий. Поэтому в контексте данного исследования для простоты будем их также называть фазовыми траекториями. В отличие от последних, восстановить интегральные кривые в координатах $(y, \dot{y}, \ddot{y}, ...)$ можно численным дифференцированием наблюдаемого процесса.

Можно рассматривать временной ряд как дискредитированный наблюдаемый выход Y системы (1):

$$Y = \{y(t_0), y(t_0 + \Delta t), y(t_0 + 2\Delta t), ...\},$$

где Δt – шаг дискретизации.

Существует ряд методик реконструкции аттрактора по временным рядам [3, 15], включая странные аттракторы, где определяются размерности реконструкции, наличие хаотической динамики и другие параметры. Однако, не нарушая общности, можно рассматривать двумерный случай, поскольку, как показали расчеты, в рассматриваемых процессах странный аттрактор не имеет место. Будем реконструировать фазовые (интегральные) траектории, имеющие место в каждом ряде для начальных параметров.

Научная гипотеза состоит в том, что наблюдаемые ряды могут быть описаны одной системой, т.е. существует редуцированная динамическая модель с фазовым портретом, в который входят фазовые траектории, симметричные реконструированным по соответствующим исходным временным рядам. Иными словами, если подвергнуть реконструированные интегральные траектории в фазовом пространстве преобразованиям симметрии, так, чтобы фазовые траектории сходились в единый аттрактор, то при условиях отклонений от заданной устойчивой малой окрестности (в рамках первого метода Ляпунова) можно считать, что такие временные ряды порождены единой динамической системой. В качестве допустимых симметричных преобразований используем композицию преобразований переноса, растяжение/сжатие и поворота.

Исследования заключаются в поиске структур динамической системы, которые не зависят от выбора системы координат (допускают преобразования симметрии). Замена координат представляет собой некоторый диффеоморфизм (в случае гладкой структуры) или гомеоморфизм (в топологической ситуации) фазовых пространств. Таким образом, можно ввести отношения эквивалентности между динамическими системами, связанные с различными классами замен координат, и интерпретировать описание структуры связанных систем как задачу классификации с точностью до этих отношений эквивалентности. Отметим, что компактность соответствующих фазовых пространств несущественна, введенная схожесть может быть использована для случаев, когда для некоторых точек динамическая система определена только на конечном отрезке времени, как это имеет место, например, в окрестности гиперболической неподвижной точки линейного отображения. Такое обобщение приводит к понятию структурной устойчивости к симметричным преобразованиям.

Решение задачи, заключающейся в выделении нескольких рядов в группу, позволяет моделировать эту группу процессов единой системой с точностью до преобразований симметрий.

3. Результаты

Реконструированные пронормированные интегральные траектории для исходных семи временных рядов приведены на рис. 2.

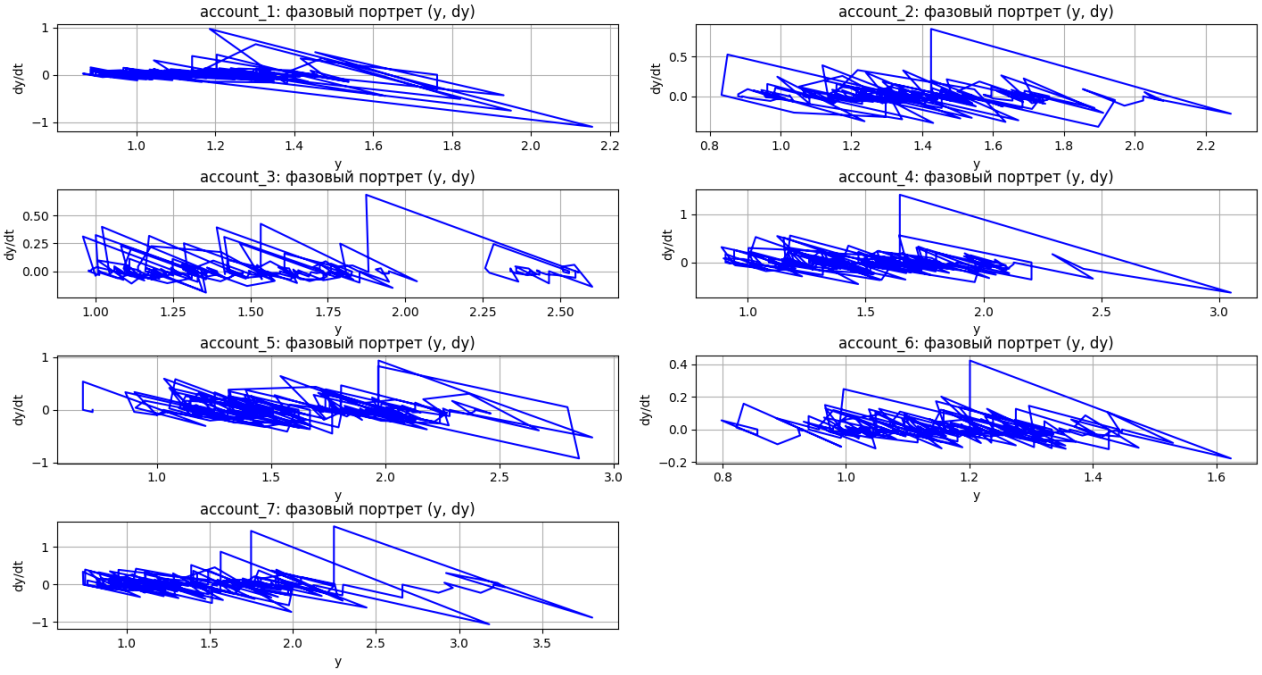

Рис. 2. Реконструированные фазовые траектории

Fig. 2. Reconstructed phase trajectories

Для поиска решения задачи предлагается использовать алгоритм Прокруста [16] (или прокрустово преобразование – Procrustes rotation), названный по имени известного героя греческой мифологии. Это метод минимизации геометрического расхождения между траекториями после нормализации масштаба, сдвига и поворота. В процессе сопоставления данных используется интегральная мера сходства D, отражающая сумму квадратов отклонений между совмещенными траекториями.

$$D = \| \tilde{Y}_1 - \tilde{Y}_2 \times W \|, \tag{3}$$

где – $\tilde{Y}_1$ и $\tilde{Y}_2$ – центрированные и нормализованные матрицы исходных точек Y_1, Y_2; **W** — ортогональная матрица поворота; $\| \square \|$ – фробениусова норма (сумма квадратов всех элементов матрицы).

Для сравнения использована интегральная кривая одного из рядов, в данном случае – счет 5 (account_5) Для задач с большей размерностью можно использовать для выбора «эталонного» (наиболее подходящего для редуцированной модели) формальные методы, например, использующие корреляционные функции.

На рис. 3 приведены фазовые траектории после применения Прокрустова алгоритма, попарно примененного относительно account_5. В табл. 1 приведены параметры результаты решения (3) для пар временных рядов относительно выбранного account_5.

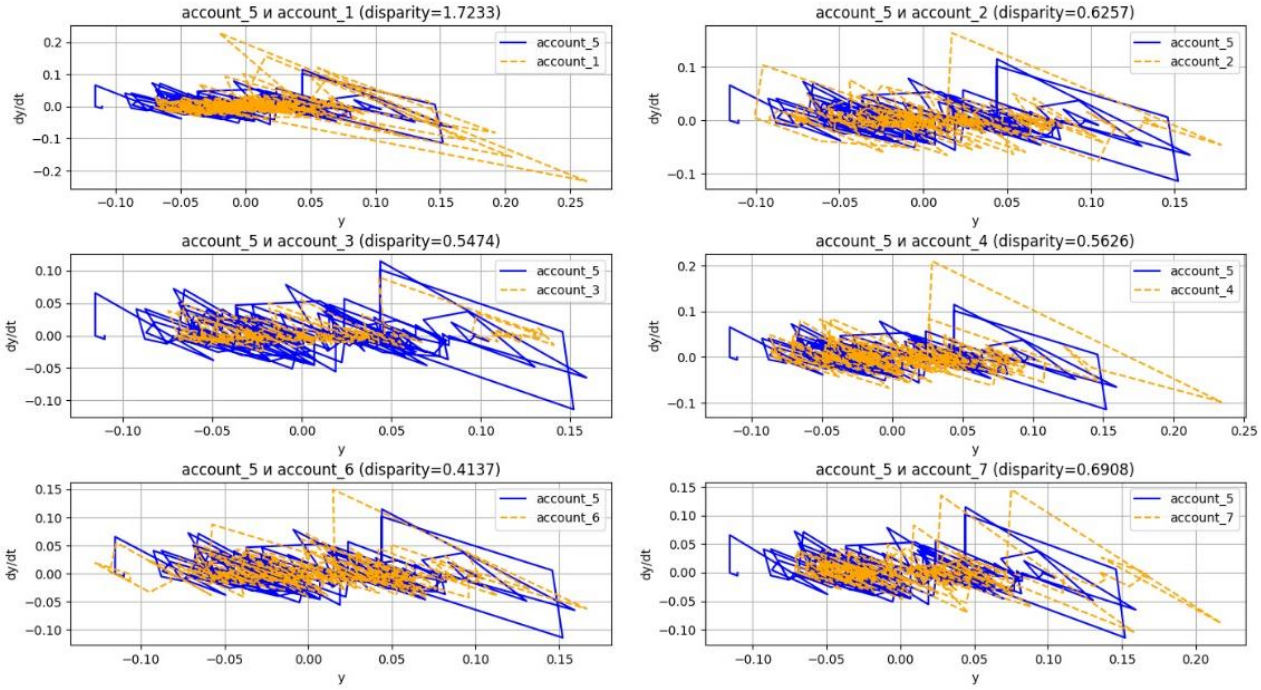

Рис. 3. Попарное применение Прокрустового алгоритма к фазовым траекториям

Fig. 3. Pairwise application of the Procrustes algorithm to phase trajectories

Таблица 1.

Параметры симметричных преобразований после применения Прокрустова алгоритма

Table 1.

Parameters of symmetric transformations after applying the Procrustes algorithm

Временной ряд	*D*	Коэффициент растяжения/сжатия	Сдвиг по оси *y*	Сдвиг по оси *dy/dt*	Угол поворота
account_1	1.7233	1.9203	-0.6048	-0.247	-6.4601
account_2	0.6257	1.5786	-0.5209	0.04	1.0305
account_3	0.5474	1.0579	0.0015	-0.0448	-1.5688
account_4	0.5626	1.2158	-0.1839	0.0314	0.9179
account_6	0.4137	2.8846	-1.7223	-0.0178	-0.3335
account_7	0.6908	0.7705	0.4644	0.0297	1.324

Вводя ограничение на метрику *D*, можно определить принадлежность исходного временного ряда к искомой группе. Например, если ввести $D > 1$, то из группы исключается временной ряд account_1. Это можно проиллюстрировать, построив временные ряды после применения симметричных преобразований (рис. 4). Видно, что из группы выделяется именно ряд account_1.

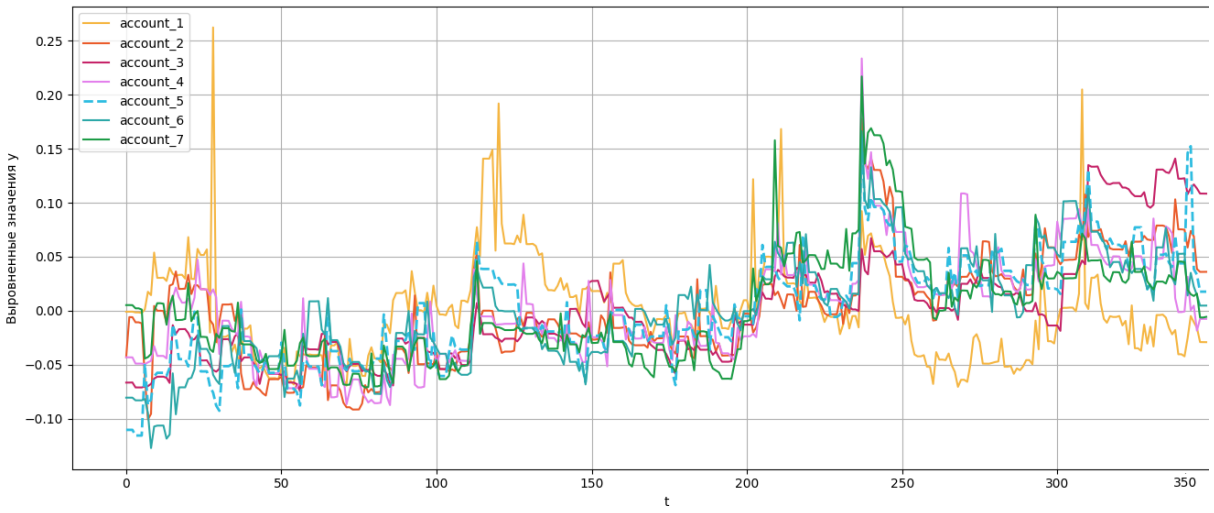

Рис. 4. Временные ряды после симметричных преобразований

Fig. 4. Time series after symmetric transformations

Таким образом, из исходно сформированной выборки рядов исключается ряд account_1, остальные ряды с точностью до преобразований симметрии можно считать схожими и являющимися результатами функционирования схожих систем.

Результаты показывают теоретическую и практическую значимость предложенного подхода, на основе которого можно сформировать методику группировки временных рядов:

1) получение набора временных рядов, претендующих на объединение в группу;
2) формирование интегральных траекторий в фазовом пространстве;
3) выбор эталонного ряда для построения симметрий;
4) применение Прокрустова алгоритма для получения параметров симметричных преобразований при минимизации в по (3);
5) выделение в группу рядов, для которых минимальное значение D меньше заданного.

Если требуется выравнивание по времени (в случае больших растяжений и сжатий), можно применить метод DTW (Dynamic Time Warping) [17] для измерения временной деформации.

Заключение

Разработана методика поиска симметрий в реконструированных по временным рядам фазовых портретах на основе Прокрустова алгоритма. Наличие симметрий позволяет считать системы, порождающие временные ряды одинаковыми с точность до найденных преобразований. Решение задачи, заключающейся в выделении нескольких рядов в группу, позволяет моделировать эту группу процессов единой системой с точностью до преобразований симметрий. Возможно, например, построение единой прогнозной модели для одного ряда, выбранного инвариантным, соответствующей редуцированной системы, с вычислением остальных по найденным преобразованиям. Также можно оценивать качество данных по возможным пропускам или неточностям в схожих временных рядах или значение процессов при задержках, возможны и другие применения.

Библиографический список

1. **Кумратова А.М.** Управление сложным процессом на базе метода фазового анализа / А.М. Кумратова, Е.В. Попова, Н.С. Курносова, К.А. Сивков // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия: Естественно-математические и технические науки. 2020. № 2 (261). С. 40-46.

2. **Никульчев Е.В.** Геометрический подход к моделированию нелинейных систем по экспериментальным данным / Е.В. Никульчев: монография. – М.: МГУП, 2007.
3. **Анищенко В.С.** Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах / В.С. Анищенко, Астахов В.В. – М.-Ижевск: ИКИ, 2003.
4. **Брагин В.О.** Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи Чуа / В.О. Брагин, В.И. Вагайцев, Н.В. Кузнецов, Г.А. Леонов // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. №4. С. 3-36
5. **Leonov G.A.** Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert–Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits / G.A. Leonov, N.V. Kuznetsov // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2013. V. 23. №. 01. P. 1330002.
6. **Леонов Г.А.** Глобальные задачи дифференциальных включений: проблемы Калмана и Вышнеградского, цепи Чуа / Г.А. Леонов, Н.В. Кузнецов, М.А. Киселева, Р.Н. Мокаев // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 4. С. 1-52
7. **Кузнецов Н.В.** Теория скрытых колебаний / Н.В. Кузнецов // С сб. XIII Всероссийс. совещ. по проблемам управления ВСПУ-2019. – М.: ИПУ РАН, 2019. С. 103-107.
8. **Буркин И.М.** Сосуществующие хаотические и периодические аттракторы в контрпримере к гипотезе Калмана / И.М. Буркин, Н.В. Кузнецов, Т.Н. Мокаев // В матер. XVI Международ. научн. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). – М.: ИПУ РАН, 2022. С. 109-112.
9. **Хабиров С.В.** Простые частично инвариантные решения / С.В. Хабиров // Уфимский математический журнал. 2019. Т. 11. №. 1. С. 87-98.
10. **Кузнецова О.И.** Применение мегастабильной системы с 2-D полосой скрытых хаотических аттракторов для обеспечения безопасной связи / О.И. Кузнецова // Чебышевский сборник. 2023. Т. 24. №. 1 (87). С. 89-103.
11. **Кузнецов Н.В.** Анализ и синтез систем управления фазовой автоподстройки с приложением к задачам навигации и управления движением / Н.В. Кузнецов, М.Ю. Лобачев // В материал. Международ. семинара «Навигация и управление движением» (NMC 2023). – СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2023. С. 113-114.
12. **Червяков А.А.** Методика построения интервальных робастных прогнозов в информационно-аналитической системе поддержки принятия решений Федерального казначейства / А.А. Червяков // Вестник современных цифровых технологий. 2023. № 17. С. 36-41.
13. **Червяков А.А.** Информационно-аналитическое обеспечение систем поддержки принятия решений на основе методов интервального прогнозирования финансовых временных рядов / Червяков А.А. / Дисс. … канд. техн. наук. – М.: РТУ МИРЭА, 2024.
14. **Nikulchev E.** Symmetric seasonality of time series in interval prediction for financial management of the branch / E. Nikulchev, A. Chervyakov // Symmetry. 2023. V. 15. № 12. P. 2100.
15. **Мальцев Г.Н.** Алгоритм реконструкции фазового пространства динамической системы и его применение для разработки прогнозных моделей / Г.Н. Мальцев, А.В. Назаров, В.Л. Якимов // Информационно-управляющие системы. 2014. №. 2 (69). С. 33-39.
16. **Балонин Н.А.** Задачи разрешимые и неразрешимые. Алгоритм Прокруста получения матриц семейства Адамара / Н.А. Балонин, С. Дженифер, М.Б. Сергеев // Информационно-управляющие системы. 2023. №. 1 (122). С. 2-16.
17. **Yadav M.** Dynamic time warping (DTW) algorithm in speech: a review / M. Yadav, M. Alam // Internat. Journal of Research in Electronics and Computer Engineering. 2018. V. 6. №. 1. P. 524-528.

Дата поступления
в редакцию: 24.03.2025

Дата принятия
к публикации: 19.05.2025