

УДК 519.213

DOI: 10.46960/1816-210X_2025_4_21
EDN EEILBV**ДВУМЕРНЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ И R/S-АНАЛИЗ
ТОПОЛОГИЙ ФРАКТАЛЬНЫХ МИКРО- И НАНОСТРУКТУР.
ВЕРИФИКАЦИЯ ФРАКТАЛЬНОГО ПОДХОДА****В.Б. Куликов**ORCID: 0000-0003-2825-7476 e-mail: vb.kulikov@yandex.ruНижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
*Нижний Новгород, Россия***А.Б. Куликов**ORCID: 0009-0008-4659-7793 e-mail: akulikov@nntu.ruНижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
*Нижний Новгород, Россия***В.П. Хранилов**ORCID: 0000-0003-1317-5320 e-mail: hranilov@nntu.ruНижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Нижний Новгород, Россия

Методом фрактального и вероятностного анализа исследованы топологические характеристики образца стали 30ХГСА для обоснования и верификации предложенного фрактального понятия: двумерной фрактальной размерности Хаусдорфа-Безиковича с двумя «ортогональными» компонентами. Шероховатость образца стали, как и пористость ранее исследованных мембранных структур, исследуется на основе разработанного полимодального и двумерного R/S-анализа (обобщение метода Г.Е. Херста). Для малых выборок данных сканирующей туннельной микроскопии в методе линейной интерполяции выполнен корректный фрактальный анализ поверхностной микроструктуры стали 30ХГСА. Предложенный подход оптимизирует и расширяет возможности обработки экспериментальных данных. Компоненты фрактальной размерности образца стали определяются усреднением вычисленного массива показателей Херста по каждому ортогональному направлению. Идентификация одномерных плотностей распределения значений шероховатости выявила их существенную полимодальность с числом значимых мод от одной до четырех.

Ключевые слова: фрактальный анализ; двумерная плотность распределения и двумерный R/S-анализ; сканирующая туннельная микроскопия; размерность Хаусдорфа-Безиковича; двумерная интерполяция стохастических данных.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Куликов, В.Б. Двумерный стохастический и R/S-анализ топологий фрактальных микро- и наноструктур. Верификация фрактального подхода / В.Б. Куликов, А.Б. Куликов, В.П. Хранилов // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2025. № 4. С. 21-30. DOI: 10.46960/1816-210X_2025_4_21 EDN: EEILBV

**TWO-DIMENSIONAL STOCHASTIC AND R/S-ANALYSIS
OF FRACTAL MICRO- AND NANOSTRUCTURE TOPOLOGIES.
FRACTAL APPROACH VERIFICATION****V.B. Kulikov**ORCID: 0000-0003-2825-7476 e-mail: vb.kulikov@yandex.ruNizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev
Nizhny Novgorod, Russia

A.B. Kulikov

ORCID: **0009-0008-4659-7793** e-mail: **akulikov@nntu.ru**
Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev
Nizhny Novgorod, Russia

V.P. Khranilov

ORCID: **0000-0003-1317-5320** e-mail: **hranilov@nntu.ru**
Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev
Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. This article presents the results of a study of the topological characteristics (roughness) of a 30KhGSA (30CrMnSiA) steel sample using fractal and probabilistic analysis. These results are used to justify and verify the authors' proposed fractal concept – the two-dimensional Hausdorff-Besicovitch fractal dimension with two “orthogonal” components. The roughness of the steel sample, as well as the porosity of previously studied membrane structures, is studied on the basis of the developed polymodal and two-dimensional R/S analysis (generalization of the method of H. E. Hurst). A correct fractal analysis of the 30KhGSA steel surface microstructure was performed for small samples of scanning tunneling microscopy data in the linear interpolation method. The proposed approach optimizes and expands the possibilities of processing experimental data. The fractal dimension components of the steel sample are determined by averaging the calculated array of Hurst exponents for each orthogonal direction. Identification of univariate distribution densities of roughness values revealed their essential polymodality with the number of significant modes from one to four.

Key words: fractal analysis; two-dimensional distribution density and two-dimensional R/S analysis; scanning tunneling microscopy; Hausdorff-Besicovitch dimension; two-dimensional interpolation of stochastic data.

FOR CITATION: V.B. Kulikov, A.B. Kulikov, and V.P. Khranilov. Two-dimensional stochastic and R/S-analysis of fractal micro- and nanostructure topologies. Fractal approach verification. Transactions of NNTSU n.a. R.E. Alekseev. 2025. № 4. Pp. 21-30. DOI: 10.46960/1816-210X_2025_4_21 EDN: EEILBV

Введение

Настоящее исследование является продолжением и развитием современных методов фрактального анализа топологий нано- и микроструктур [1-4]. В публикациях [5, 6] «на основе методов двумерного стохастического и фрактального анализа впервые была выявлена фрактальная анизотропия топологических характеристик гибридных газоселективных мембран, что позволило ввести и обосновать математический формализм и представление о двумерной фрактальной размерности Хаусдорфа-Безиковича с двумя «ортогональными» компонентами $D_{x,y} = 3 - M\{H_{x,y}\}$ ». Было показано, что статистический анализ профилей пористых структур и оценка фрактальных свойств зависят от направления сканирования атомно-силового микроскопа (АСМ), т.е. имеет место анизотропия фактора самоподобия и плотностей распределения характеристик структуры.

В предлагаемой работе изучаются анизотропные свойства топологических характеристик (шероховатости) образца стали 30ХГСА для обоснования и верификации предложенного авторами нового фрактального понятия: двумерной фрактальной размерности Хаусдорфа-Безиковича, определяемой по двум ортогональным координатам и обобщающей классическое понятие фрактальной размерности Хаусдорфа-Безиковича для поверхностных топологий. Шероховатость образца стали, как и пористость мембранных структур, исследуется на основе разработанного двумерного R/S-анализа (обобщение классического метода Г.Е. Херста) и метода идентификации закона распределения значений неровностей поверхности, основанного на решении обратных задач математической физики (уравнения Фредгольма первого рода [7]). Для корректного применения метода Херста исследована правомерность кратной двумерной интерполяции данных атомно-силовой и сканирующей туннельной микроскопии измеряемых характеристик микроструктур.

Результаты настоящих исследований дополняют и обобщают теорию фрактальных структур и цифровые модели поверхностей материалов для важнейших направлений про-

мышленного применения в машиностроении, ракетно-космических технологиях, биомедицине. Например, при обосновании важности таких исследований в [8, с. 4] говорится: «Микроструктура поверхности является важной характеристикой, с которой связаны такие свойства, как микротвердость, износостойкость, усталостная прочность, коэффициент трения, тепло-силовые нагрузки, аэро- и газодинамические сопротивления и т.п. Решение задач газовой динамики в условиях отсутствия данных о реальной структуре поверхности, с которой взаимодействуют молекулы газа, затрудняет формулировку граничных условий для расчета переноса энергии и импульса при обтекании тел».

Двумерный вероятностный и R/S -анализ морфологических характеристик поверхности образца стали 30ХГСА

Перспективность методов фрактального анализа и моделирования шероховатых поверхностей для решения задач газодинамики, отработки фрагментов летательных аппаратов (ЛА), элементов теплозащиты подтверждается актуальной диссертационной работой [8]. Разработанные в ней методы фрактальной геометрии, учитывающие шероховатость на микро- и наноуровне, базируются на постулате фрактального подобия на всех масштабах: от начального минимального до некоторого максимального уровня. Данное исследование содержит актуальную информацию о морфологии поверхностей различных сплавов, легирующих нанопокровов, микроструктур [9, 10].

На рис. 1 представлено трехмерное изображение данных сканирующей туннельной микроскопии (СТМ) для стали 30ХГСА, полученное на базе нанотехнологического комплекса Умка-02-Е [8]. В этой работе для аналогичных образцов сплавов стали, титана, меди выполнена оценка величины фрактальной размерности в качестве главного информативного критерия при создании цифровых моделей микро- и наноструктур. В изучении теплообмена в высокоэнталийных неравновесных потоках фрактальная размерность количественно представляет геометрические характеристики шероховатости, измеренные методом СТМ-микроскопии.

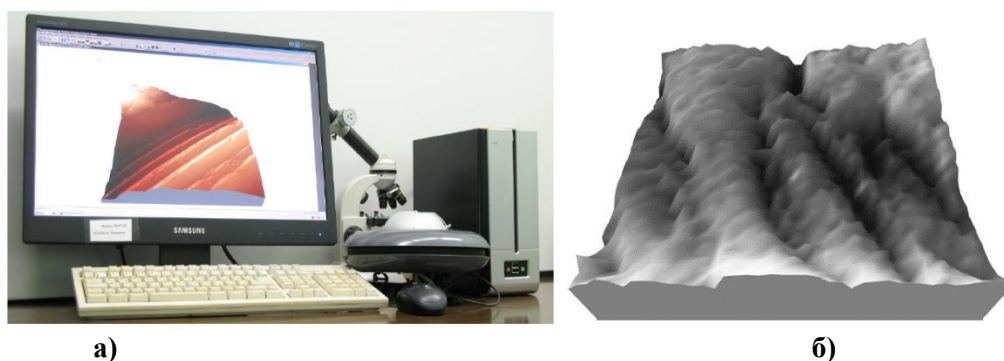


Рис. 1. Трехмерное изображение данных сканирующей туннельной микроскопии (СТМ) для стали 30ХГСА:

а) нанотехнологический комплекс Умка-02-Е; б) 3D-модель поверхности образца стали 30ХГСА [8]

Fig. 1. Three-dimensional image of scanning tunneling microscopy (STM) data for 30KhGSA steel:

a) Umka-02-E nanotechnological complex; б) 3D model of 30KhGSA steel sample surface [8]

Практическая важность высокоточной идентификации фрактальной размерности в качестве информативной характеристики изрезанности и шероховатости микроструктуры, например, в аэродинамике, определяется таким образом: «Задача построения геометрической модели микроповерхности имеет как теоретические, так и прикладные аспекты. Как известно, физические процессы, возникающие при взаимодействии атомов и молекул газа с поверхностью, весьма сложны. Поэтому требуется теоретически обоснованная трактовка результатов наземной экспериментальной отработки фрагментов летательных аппаратов. При-

кладное значение определяется необходимостью оптимизации средств диагностики потоков в высокоэнтальпийных установках, в которых происходит имитация теплового нагружения, действующего на ЛА в процессе полета, а также технологических процессов создания теплозащитных материалов и покрытий изделий ракетно-космической техники (РКТ)» [8, с. 4-5].

Рассмотрим свойства топологических параметров стали 30ХГСА, исходя из введенного понятия двумерной фрактальной размерности Хаусдорфа-Безиковича $D_{x,y}$. Как и для мембранных структур [5], здесь применим авторский метод стохастического и фрактального анализа, обобщающий классическую фрактальную статистику. Для изучения вероятностных свойств поверхности такой структуры также используем систему одномерных плотностей распределения. Измеренные сканирующим туннельным микроскопом значения высотных отметок поверхности стали 30ХГСА размером $0,144 \times 0,144$ мкм [8] содержатся в текстовом файле с матрицей 40×40 узловых точек, что недостаточно для полноценного стохастического анализа. Разработанный для этих задач комплекс алгоритмов и программ позволяет корректно идентифицировать законы распределения случайных величин по выборкам малого объема (30-50 отсчетов), однако метод нормированного размаха Херста (R/S -анализ) требует, как минимум, на порядок больших значений случайной характеристики.

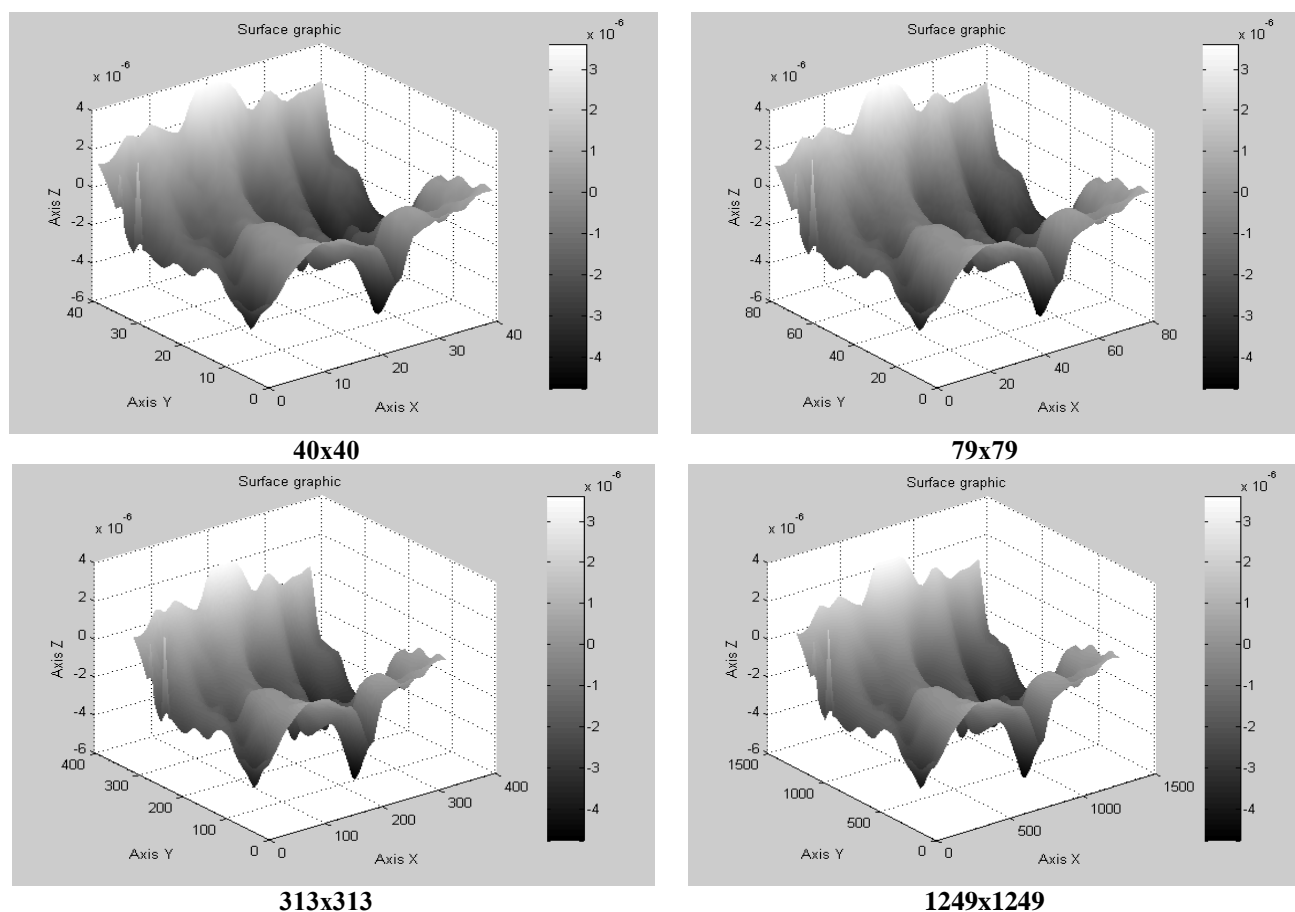


Рис. 2. Графика СТМ-данных (исходная поверхность и результат интерполяции) образца стали 30ХГСА

Fig. 2. Graphics of STM data (initial surface and interpolation result) of 30KhGSA steel sample

С целью получения расширенной выборки для верификации развиваемого подхода нами был применен метод двумерной интерполяции узловых значений (функция *interp2* пакета MATLAB) и последовательного увеличения размера матрицы данных [11]. При интерполяции последовательно контролировалось соответствие «расширенной» цифровой 3D-модели исходному изображению поверхности (рис. 2). Идентифицированные плотности распределения высотного профиля изображены на рис. 3.

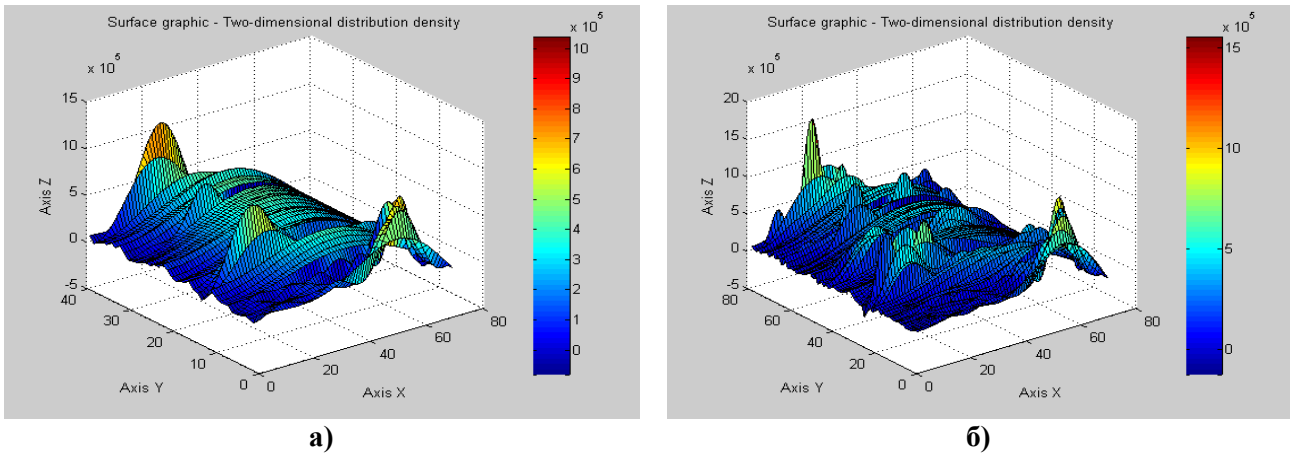


Рис. 3. Идентифицированные двумерные плотности распределения высотного профиля стали 30ХГСА:

а) для исходной матрицы данных; б) интерполяция в масштабе 79×79

Fig. 3. Identified two-dimensional distribution densities of the height profile of 30KhGSA steel:
a) for the original data matrix; б) interpolation at 79×79 scale

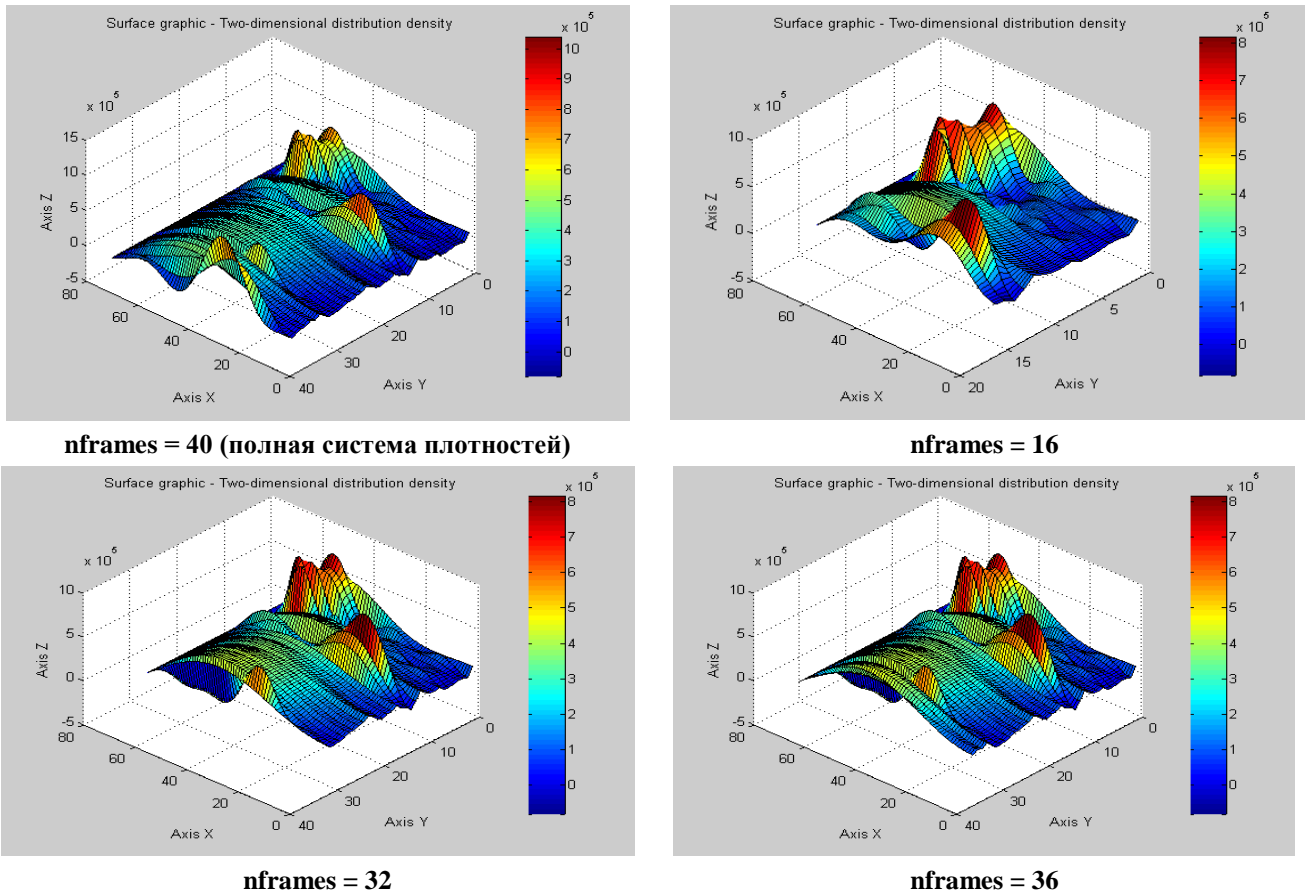


Рис. 4. Зависимость 2D-плотности распределения высотных профилей стали 30ХГСА от числа восстановленных одномерных плотностей по направлению Y

Fig. 4. Dependence of the 2D distribution density of the height profiles of 30KhGSA steel on the number of reconstructed one-dimensional densities in the Y direction

Показанные на рис. 2 «новые» поверхности повторяют структуру исходной (40×40 узлов), что подтверждает самоподобие структуры на различных масштабах. При увеличении

размера матрицы данных 3D-модели становятся закономерно сложнее при неизменном общем подобии (рис. 3). Как было отмечено ранее в [6], визуализация объемных плотностей распределения допускает множество возможных представлений.

Рис. 4 с исходной матрицей данных 40×40 пикселей иллюстрирует возможности анимации в процессе идентификации графиков распределения (значения по азимуту и полярному углу можно варьировать). Более поздние графики плотностей ставятся на передний план для улучшения графической визуализации и восприятия информации. Идентификация одномерных плотностей распределения высотных отметок выявила полимодальность законов распределения (число выраженных мод от одной до четырех). Информация о полимодальной природе высотных отметок необходима для выбора технологии и контроля чистоты обработки поверхности стальных элементов с учетом различных свойств по ортогональным направлениям. В ракетно-космической технике предложенный авторами публикации метод исследования анизотропных свойств поверхности конструкций (стали, композиты, защитные покрытия) имеет актуальную новизну. Важнейшее прикладное значение имеет учет влияния фрактальной анизотропии и стохастических характеристик на каталитическую активность материалов в аэродинамике разреженных газов, а также теоретические и экспериментальные исследования теплофизических и кинетических характеристик теплозащитных материалов [9, 12].

Рассмотрим фрактальную геометрию высотных отметок поверхности стали 30ХГСА на основе метода нормированного размаха Херста [13, 14]. На рис. 5 и 6 показаны двумерные R/S поверхности – семейство одномерных графиков, зависящих от аргумента X (аргумента Y) и соответствующие массивы показателей Херста (H) для матрицы 313×313 .

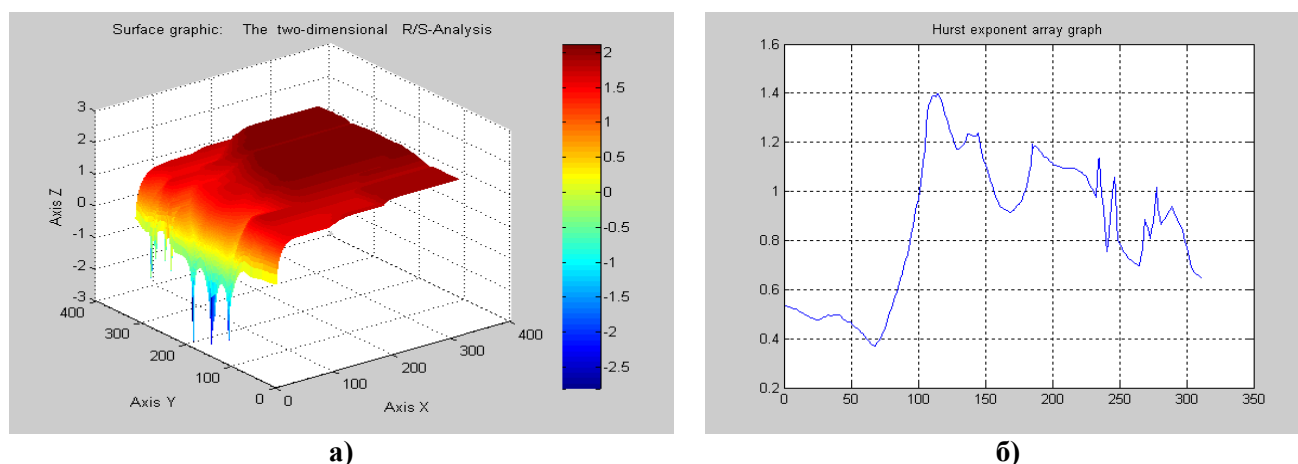


Рис. 5. Двумерные R/S поверхности и соответствующие массивы показателей Херста:
 а) двумерная R/S поверхность высотных отметок стали 30ХГСА (семейство одномерных графиков, функций от аргумента X) по направлению оси Y; б) вычисленный массив показателей Херста

Fig. 5. Two-dimensional R/S surfaces and corresponding arrays of Hurst exponents:
 а) two-dimensional R/S surface of elevation marks of 30KhGSA steel (a family of one-dimensional graphs, functions of the argument X) in the direction of the Y axis; б) calculated array of Hurst exponents

Как и в случае мембранной структуры, показатель H для стали 30ХГСА имеет часть значений выше 0.5 и ниже 1. Значения, большие 1, составляют в обоих вариантах (рис. 5б, 6б) примерно 50 %. Очевидно, что утверждение о фрактальных свойствах топологии образца стали необходимо также дополнить положением о анизотропии показателя H и экстремальности (относительно размеров шероховатости) высотных профилей.

Двумерный R/S-анализ шероховатости стали 30ХГСА выполнен для матриц узловых значений 157×157 , 625×625 , 1249×1249 . Фрактальная размерность Хаусдорфа-Безиковича $D = 3 - H$ высотных отметок тоже двумерная: $D_{x,y} = 3 - M\{H_{x,y}\}$. Например, для матрицы данных 313×313 значение $M\{H_x\} = 0.8548$, $D_x = 2.1452$. Аналогичный R/S-анализ вдоль оси Y образца

дает $D_y = 3 - M\{H_y\} = 3 - 0.8926 = 2.1074$. Отметим корректность применения интерполяции в условиях малых выборок: на сетке 1249×1249 значение $M\{H_x\} = 0.8479$, $D_x = 2.1521$; $D_y = 3 - M\{H_y\} = 3 - 0.8719 = 2.1281$. Для всех вариантов двумерной интерполяции подтверждается фрактальность геометрии топологических характеристик поверхности стали.

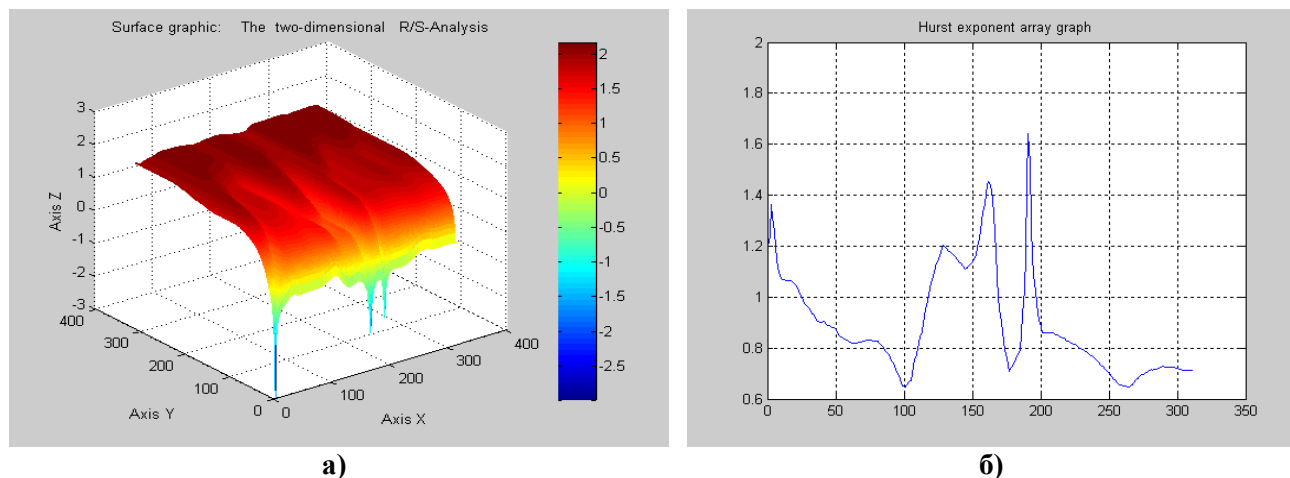


Рис. 6. Двумерные R/S поверхности и соответствующие массивы показателей Херста:
 а) R/S поверхность высотных отметок стали 30ХГСА (семейство одномерных графиков, функций от аргумента Y) по направлению оси X ; б) массив показателей Херста

Fig. 6. Two-dimensional R/S surfaces and corresponding arrays of Hurst exponents:
 а) R/S surface of elevation marks of 30KhGSA steel (a family of one-dimensional graphs, functions of the argument Y) in the direction of the X axis; б) array of Hurst exponents

В табл. 1 приведены все идентифицированные значения двумерной фрактальной размерности $D_{x,y}$ для метода двумерной линейной интерполяции СТМ-данных изученного образца стали. Компонента D_y фрактальной размерности для исходной матрицы данных, определенная по методу Херста равна 1.9704, что дает неверное значение, меньшее топологической евклидовой размерности, равной 2. Это подтверждает тезис о том, что объем измерительных данных должен быть существенно больше.

Таблица 1.

Значения двумерной фрактальной размерности $D_{x,y}$ для образца стали 30ХГСА (двумерный метод Херста)

Table 1.

Values of the two-dimensional fractal dimension $D_{x,y}$ for 30KhGSA steel sample (two-dimensional Hurst method)

Размер топологии	40x40	79x79	157x157	313x313	625x625	1249x1249
D_x	2.1356	2.1381	2.1405	2.1452	2.1491	2.1521
D_y	1.9704*	2.0475	2.0853	2.1074	2.1204	2.1281

В публикации [12] для стали 30ХГСА выполнен анализ фрактальных свойств поверхности на основе СТМ-снимков. Табл. 2 воспроизводит вычисленные фрактальные размерности, зависящие от профилей поверхности в различных масштабах сканирования. В статье отмечается, что «для определения фрактальной размерности D использовался метод кубической размерности [8], при этом в среднем $D = 2,2$ с разбросом $0,1$ ». Отметим, что в работах [8-10], как и в большинстве значимых отечественных и зарубежных исследований, фрактальная размерность D – скалярный параметр, количественно описывающий фрактальные свойства поверхности изучаемого образца.

Таблица 2.
Фрактальная размерность поверхности стали 30ХГСА
при различных масштабах съемки СТМ [12]

Table 2.
Fractal dimension of 30KhGSA steel surface of at different STM shooting scales [12]

Снимок	8x8	4x4	2x2	1x1	0,5x0,5	250x250	120x120	63x63	30x30
	МКМ	МКМ	МКМ	МКМ	МКМ	нм	нм	нм	нм
<i>D</i>	2,14	2,24	2,28	2,10	2,20	2,22	2,29	2,33	2,20

Сравнение значений табл. 1 с фрактальными данными табл. 2 подтверждает корректность применения двумерной интерполяции СТМ-данных для малых двумерных выборок и обобщает одномерный фрактальный подход.

Выводы

1. На примере стали 30ХГСА выявлена возможность применения интерполяции данных СТМ в условиях малых двумерных выборок с актуальным увеличением размеров матриц (как минимум до уровня 1249x1249).
2. Предложенный полимодальный вероятностный и фрактальный подход к изучению топологических характеристик образца стали 30ХГСА является универсальным и может применяться для изучения морфологических параметров поверхностей различных типов.
3. Оптимизация измерений параметров в АСМ и СТМ микроскопии за счет двумерной интерполяции данных (типичные значения времени сканирования участка размером 256×256 пикселей от 10 до 40 мин) сокращает длительность зондирования, повышает точность и возможности методов в режиме масштабного мониторинга топологий микроструктур.

Библиографический список

1. **Анофриев, В.А.** К проблеме автоматизации процесса определения фрактальной размерности / В.А. Анофриев, А.В. Низенко, Д.В. Иванов [и др.] // Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов. – 2022. – Вып. 14. – С. 264-276.
2. **Имашев, С.А.** Оценка возможностей применения методов фрактального анализа для исследования геофизических данных. Часть 1. Обзор методов оценки параметра Херста / С.А. Имашев, В.Н. Сычев // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. – 2017. – Т. 17. № 5. – С. 72-77.
3. **Аптуков, В.Н.** Фрактальные и механические свойства кристаллов сильвина и галита в микро- и нанодиапазоне / В.Н. Аптуков, В.Ю. Митин // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – № 3. – С. 481-495.
4. **Кириллов, Д.С.** Распределения показателя Херста нестационарного маркированного временного ряда / Д.С. Кириллов, О.В. Короб, Н.А. Митин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. – 2013. – № 11. – С. 1-16.
5. **Куликов, В.Б.** Плотности распределения и фрактальная геометрия двумерных характеристик стохастических структур и систем / В.Б. Куликов, А.Б. Куликов, В.П. Хранилов, А.А. Игнатъев // Математические методы в технологиях и технике. – 2024. – № 6. – С. 101-106.
6. **Куликов, В.Б.** Анализ фрактальных параметров поверхностных топологий микроструктур со стохастическими свойствами / В.Б. Куликов, А.Б. Куликов, В.П. Хранилов // Труды НГТУ им. П.Е. Алексеева. – 2024. – № 4. – С. 17-26. – EDN MXHDMW.
7. **Тихонов, А.Н.** Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – Москва: Наука, 1986. – 288 с.
8. **Брылкин, Ю.В.** Геометрическое моделирование микроструктуры поверхности на основе теории фракталов: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: 05.01.01 / Брылкин Юрий Владимирович. – М., 2018. – 121 с.

9. **Брылкин, Ю.В.** Экспериментальные исследования влияния структуры поверхности материалов на их каталитическую активность / Ю.В. Брылкин, В.И. Власов, Г.Н. Залогин [и др.] // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. – 2015. – Т. 16, вып. 3. URL: www.chemphys.edu.ru/issues/2015-16-3/articles/600 (дата обращения: 1.09.2025).
10. **Брылкин, Ю.В.** Исследование микро- и наноструктуры поверхности медного сплава с использованием теории фракталов / Ю.В. Брылкин, А.Л. Кусов // Космонавтика и ракетостроение. – 2016. – № 5 (90). – С. 89-95.
11. **Дьяконов, В.П.** MATLAB. Полный самоучитель / В.П. Дьяконов. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.
12. **Брылкин, Ю.В.** Моделирование структуры рельефа реальных поверхностей на основе фракталов в аэродинамике разреженных газов / Ю.В. Брылкин, А.Л. Кусов // Космонавтика и ракетостроение. – 2014. – № 3 (76). – С. 22-28.
13. **Федер, Е.** Фракталы / Е. Федер. – Москва: Мир, 1991. – 254 с.
14. **Петерс, Э.** Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка / Э. Петерс. – Москва: Мир, 2000. – 333 с.

References

1. Anofriev V.A., A.V. Nizenko, D.V. Ivanov, A.S. Antonov and N.Iu. Sdobniakov. 2022. “K probleme avtomatizatsii protsessa opredeleniia fraktal'noi razmernosti” [On the Problem of Automating the Process of Determining Fractal Dimension]. *Fiziko-khimicheskie aspekty izucheniia klasterov, nanostruktur i nanomaterialov* [Physical and Chemical Aspects of the Study of Clusters, Nanostructures and Nanomaterials], no. 14: 264-276.
2. Imashev S.A. and V.N. Sychev. 2017. “Otsenka vozmozhnostei primeneniia metodov fraktal'nogo analiza dlia issledovaniia geofizicheskikh dannykh. Chast' 1. Obzor metodov otsenki parametra Khersta” [Assessing the Possibilities of Applying Fractal Analysis Methods for the Study of Geophysical Data. Part 1. A Review of Methods for Estimating the Hurst Parameter]. *Vestnik KRSU* [Bulletin of KRSU] 17 (5): 72-77.
3. Aptukov V.N. and V.Yu. Mitin. 2017. “Fraktal'nye i mekhanicheskie svoistva kristallov sil'vina i galita v mikro- i nanodiapazone” [Fractal and Mechanical Properties of Sylvite and Halite Crystals in the Micro- and Nanorange]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences], no. 3: 481-495.
4. Kirillov D.S., O.V. Korob, N.A. Mitin and [et al.]. 2013. “Raspredeleniia pokazatelia Khersta nes-tatsionarnogo markirovannogo vremennogo riada” [Distributions of the Hurst Exponent for a Non-Stationary Marked Time Series]. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha* [Keldysh Institute Preprints], no. 11: 1-16.
5. Kulikov V.B., A.B. Kulikov, V.P. Khranilov and A.A. Ignat'ev. 2024. “Plotnosti raspredeleniia i fraktal'naia geometriia dvumernykh kharakteristik stokhasticheskikh struktur i sistem” [Distribution Densities and Fractal Geometry of Two-Dimensional Characteristics of Stochastic Structures and Systems]. *Matematicheskie metody v tekhnologiiakh i tekhnike* [Mathematical Methods in Technologies and Engineering], no. 6: 101-106.
6. Kulikov V.B., A.B. Kulikov and V.P. Khranilov. 2024. “Analiz fraktal'nykh parametrov poverkhnostnykh topologii mikrostruktur so stokhasticheskimi svoistvami” [Analysis of Fractal Parameters of Surface Topologies of Microstructures with Stochastic Properties]. *Trudy NGTU im. R.E. Alekseeva* [Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev], no. 4: 17-26. EDN: MXHDMW.
7. Tikhonov A.N. and V.Ya. Arsenin. 1986. *Metody resheniia nekorrektnykh zadach* [Methods for Solving Ill-Posed Problems]. Moscow: Nauka.
8. Brylkin Yu.V. 2018. “Geometricheskoe modelirovanie mikrostrukturnykh poverkhnosti na osnove teorii fraktalov” [Geometric Modeling of Surface Microstructure Based on Fractal Theory]. Candidate of Technical Sciences diss., Moscow.
9. Brylkin Yu.V., V.I. Vlasov, G.N. Zalogin, A.L. Kусov and N.F. Rudin. 2015. “Eksperimental'nye issledovaniia vliianiia struktury poverkhnosti materialov na ikh kataliticheskuiu aktivnost'” [Experimental Studies of the Influence of Material Surface Structure on Their Catalytic Activity]. *Fiziko-khimicheskaiia kinetika v gazovoi dinamike* [Physicochemical Kinetics in Gas Dynamics] 16 (3).

10. Brylkin Yu.V. and A.L. Kusov. 2016. "Issledovanie mikro- i nanostrukturny poverkhnosti mednogo splava s ispol'zovaniem teorii fraktalov" [Study of the Micro- and Nanostructure of a Copper Alloy Surface Using Fractal Theory]. *Kosmonavtika i raketostroenie* [Cosmonautics and Rocket Engineering], no. 5 (90): 89-95.
11. D'iakonov V.P. 2012. *MATLAB. Polnyi samouchitel'* [MATLAB. Complete Tutorial]. Moscow: DMK Press.
12. Brylkin Yu.V. and A.L. Kusov. 2014. "Modelirovanie struktury rel'efa real'nykh poverkhnostei na osnove fraktalov v aerodinamike razrezhenykh gazov" [Modeling the Structure of Real Surface Topography Based on Fractals in Rarefied Gas Aerodynamics]. *Kosmonavtika i raketostroenie* [Cosmonautics and Rocket Engineering], no. 3 (76): 22-28.
13. Feder E. 1991. *Fraktaly* [Fractals]. Moscow: Mir.
14. Peters E. 2000. *Khaos i poriadok na rynkakh kapitala. Novyi analiticheskii vzgliad na tsikly, tseny i izmenchivost' rynka* [Chaos and Order in the Capital Markets. A New Analytic View of Cycles, Prices and Market Volatility]. Moscow: Mir.

*Дата поступления
в редакцию: 10.09.2025*

*Дата принятия
к публикации: 14.10.2025*