

УДК 658.512

EDN TMLZTP

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ОБЪЕМНО-КАЛЕНДАРНЫХ ПЛАНОВ ДЛЯ ПРЕДПРИЯТИЙ С ЕДИНИЧНЫМ И МЕЛКОСЕРИЙНЫМ ХАРАКТЕРОМ ПРОИЗВОДСТВА

И.В. НетронинORCID: 0009-0001-3647-8407 e-mail: ivnetronin@yandex.ru

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Нижний Новгород, Россия

Рассмотрена проблема формирования объемно-календарных планов для предприятий с единичным и мелкосерийным характером производства. Описаны два случая формализованного описания рассматриваемой проблемы: общий случай, когда производственная система моделируется трехуровневой сетевой структурой, и частный случай с древовидной сетевой структурой. Построены математические модели, поставлены оптимизационные задачи, для решения которых предлагаются алгоритмы. Представлен оригинальный алгоритм для решения задачи объемно-календарного планирования, имеющий линейно-логарифмическую сложность.

Ключевые слова: объемно-календарное планирование; единичное и мелкосерийное производство; трехуровневая иерархическая система; иерархическая система древовидной структуры.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Нетронин, И.В. Распределение ресурсов при формировании объемно-календарных планов для предприятий с единичным и мелкосерийным характером производства // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. 2026. № 3. С. 16-23. EDN TMLZTP

RESOURCE ALLOCATION IN FORMATION OF MASTER PRODUCTION SCHEDULES FOR ENTERPRISES WITH SINGLE-UNIT AND SMALL-BATCH PRODUCTION

I.V. NetroninORCID: 0009-0001-3647-8407 e-mail: ivnetronin@yandex.ru

Nizhny Novgorod State University n.a. N.I. Lobachevsky

Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. The paper considers the problem of forming master production schedules for enterprises with single-unit and small-batch production. Two cases of a formalized description of the problem under consideration are described: the general case, when the production system is modeled by a three-level network structure, and the special case, when it is modeled by a tree network structure. Mathematical models are created, optimization problems are formulated, and solution algorithms are proposed. An original algorithm with linear-logarithmic complexity is proposed for solving the master production scheduling problem.

Keywords: master production scheduling; single-unit and small-batch production; three-level hierarchical system; hierarchical tree-structured system.

FOR CITATION: Netronin I.V. Resource allocation in formation of master production schedules for enterprises with single-unit and small-batch production. Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev. 2026. № 3. Pp. 16-23. EDN TMLZTP

1. Введение. Содержательное описание проблемы формирования объемно-календарных планов

Задачи объемно-календарного планирования представляют собой эффективный инструмент, предназначенный для распределения плановых объемов производства изделий из портфеля заказов по подразделениям предприятия и подпериодам планирования по различным критериям. Основными среди них являются выполнение заданных директивных сроков изготовления выпускаемой продукции, равномерность расходования ресурсов по тактам планирования, а также уменьшения объемов незавершенного производства [1-8]. Как правило, в таких задачах большое внимание уделяется эффективному использованию производственных мощностей предприятия.

В работе предлагается следующая модель формализации рассматриваемой проблемы формирования объемно-календарного плана. Рассматривается трехуровневая иерархическая система, в которой распределяется однородный ресурс (нормо-часы, соответствующие изготавливаемым изделиям). Система состоит из «распределителя ресурса» (центра), который распределяет ресурс, «потребителей ресурса» – подразделений предприятия, непосредственно следующих за центром, и следующих за ними, в свою очередь, элементов, которые соответствуют распределению ресурсов для подразделений предприятия по календарным подпериодам планирования.

Задача рассматривается в общем виде, когда объемы ресурса, соответствующие элементам системы, задаются через сегменты, предполагая, что когда есть заранее определенные объемы ресурса, то приравнивая левые и правые границы сегментов, будут задаваться скалярные значения объема ресурса. Сегменты, соответствующие потребителям ресурса, т.е. подразделениям предприятия, определяются из условий обеспеченности подразделений ресурсами: если некоторому подразделению предприятия в заданный период планирования приписан сегмент $[A_{st}, B_{st}]$, то A_{st} определяет минимальный объем нормо-часов, меньше которого подразделение с номером s в такт t получить не может, а B_{st} определяет максимальный объем нормо-часов, которое предприятие с номером s может выполнить в такт t .

Требуется определить такие объемы ресурса, которые удовлетворяют сегментным ограничениям элементов системы и соответствуют экстремальным значениям различных критериев оптимальности.

2. Трехуровневая сетевая структура. Математическая модель

Будем моделировать систему распределения однородного ограниченного ресурса трехуровневой сетевой структурой $S = \langle V_0, V_s, V_{st} \rangle$, где V_0 – одноэлементное множество, соответствующее «распределителю» ресурса, V_s – множество подразделений предприятия, V_{st} – множество плановых подпериодов, соответствующих подразделениям предприятия, $s = \overline{1, s_0}, t = \overline{1, t_0}$.

Обозначим через $[A_0, B_0], [A_s, B_s], [A_{st}, B_{st}]$ минимально и максимально возможные объемы работ, которые соответствуют распределителю ресурсов, предприятиям и подразделениям предприятия по календарным подпериодам. При этом:

$$\sum_{t=1}^{t_0} A_{st} = A_s, s = \overline{1, s_0}, \sum_{s=1}^{s_0} A_s = A_0;$$

$$\sum_{t=1}^{t_0} B_{st} = B_s, s = \overline{1, s_0}, \sum_{s=1}^{s_0} B_s = B_0.$$

Обозначим через x_{st} количество ресурса, которое будет распределено подразделению предприятия s в такт планирования $t, s = \overline{1, s_0}, t = \overline{1, t_0}$. Тогда математическая модель рассматриваемой производственной системы формально представляется системой линейных алгебраических неравенств:

$$A_0 \leq \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{t=1}^{t_0} x_{st} \leq B_0. \quad (1)$$

$$A_s \leq \sum_{t=1}^{t_0} x_{st} \leq B_s, s = \overline{1, s_0}. \quad (2)$$

$$A_{st} \leq x_{st} \leq B_{st}, s = \overline{1, s_0}, t = \overline{1, t_0}. \quad (3)$$

3. Постановка задачи формирования объемно-календарного плана

Из множества элементов системы выделим подмножество K «основных» элементов системы – подразделений предприятия, в которых выполняются наиболее трудоемкие операции. На подмноестве K зададим бинарное отношение « $>$ » с помощью функции $\mu(x_k)$, $x_k \in [A_k, B_k]$, $k \in K$. Будем говорить, что $x_k > x_l$ для $x_k \in [A_k, B_k]$, $x_l \in [A_k, B_k]$, тогда и только тогда, если $\mu(x_k) \geq \mu(x_l)$, $l, k \in K$. Тогда задача формирования объемно-календарного плана будет заключаться в решении многокритериальной задачи с ограничениями (1)-(3) и критериями: $\mu(x_k) \rightarrow opt, k \in K$. Основные элементы также могут иметь разную «важность», в зависимости от приоритетности изделий, которые они выполняют. В случае, если $\mu(x_k)$ линейные функции, $k \in K$, то

$$\mu(\vec{x}) = \sum_{k \in K} \mu(x_k) \rightarrow opt, x_k \in [A_k, B_k], k \in K. \quad (4)$$

4. Алгоритм решения

Полученная задача (1-4) является задачей линейного программирования и может быть решена, например, с использованием метода ортогональных проекций Агмона-Моцкина для решения большеразмерных задач линейного программирования [9], или открытых пакетов программ [10-11] для решения задач линейного программирования. Возникающие сложности связаны с большими вычислительными затратами на решение большеразмерных задач, соответствующих реальным производственным системам.

5. Иерархическая система древовидной структуры. Математическая модель

Учитывая, что задачи объемно-календарного планирования решаются на достаточно большой период в 5-7 лет, можно, используя некоторую идеализацию, перейти от общего вида представления производственной системы, к древовидной сетевой структуре [12]. Специфика древовидности иерархической системы для решения задачи формирования объемно-календарного плана позволила предложить алгоритм, имеющий линейно-логарифмическую сложность. Представим трехуровневую сетевую структуру $S = \langle V_0, V_s, V_{st} \rangle$, $s = \overline{1, s_0}$, $t = \overline{1, t_0}$, в виде взвешенного ориентированного дерева $T = (V, A)$, $A \subseteq V^2$, где совокупность множеств V_0, V_i, V_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, является разбиением множества V .

Обозначим через $Q(i) = \{j | (i, j) \in A, j \in V\}$ – множество номеров вершин дерева, непосредственно следующих после вершины с i -ым номером, $i \in V \setminus V_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, а через $G(i) = \{j | (j, i) \in A, j \in V\}$ – множество номеров вершин дерева, непосредственно предшествующих вершине с i -ым номером, $i \in V \setminus V_0$. Каждой вершине i поставим в соответствие пару L_i, R_i , $0 \leq L_i < \infty$, $L_i \leq R_i$, где L_i и R_i – соответственно, нижняя и верхняя границы допустимых значений распределяемого ресурса, $i \in V$.

Пусть переменные x_{ij} определяют, сколько ресурса будет направлено по дуге $(i, j) \in A$. Тогда естественные условия баланса (отсутствие «потерь» ресурса при распределении) представимы в виде следующих ограничений:

$$\sum_{j \in G(i)} x_{ji} = x_i = \sum_{j \in Q(i)} x_{ij}, i \in V_s, s = \overline{1, s_0}, \quad (5)$$

$$x_i = \sum_{j \in Q(i)} x_{ij} i \in V_0, \quad (6)$$

$$x_i = \sum_{j \in G(i)} x_{ji}, i \in V_{st}, s = \overline{1, s_0}, t = \overline{1, t_0}. \quad (7)$$

Здесь величины x_i определяют объем ресурса, соответствующий вершине дерева с номером i , $i \in V$. Добавив к системе (5-7) ограничения, связанные с ресурсными условиями для вершин дерева:

$$L_i \leq x_i \leq R_i, i \in V, \quad (8)$$

получаем математическую модель формирования объемно-календарного плана для случая, когда иерархическая система, описывающая рассматриваемую проблему, является сильно-связной.

Исходя из условий (5-7), и того, что распределение ресурсов, соответствующее каждой вершине дерева ограничено как сверху L_i , так и снизу R_i , математическую модель можно преобразовать к виду:

$$L_i \leq \sum_{j \in Q(i)} x_{ij} \leq R_i, i \in V \setminus V_{st}, s = \overline{1, s_0}, t = \overline{1, t_0}, \quad (9)$$

$$L_i \leq \sum_{j \in G(i)} x_{ji} \leq R_i, i \in V_0, \quad (10)$$

$$0 \leq \sum_{j \in G(i)} x_{ji} - \sum_{j \in Q(i)} x_{ij} \leq 0, i \in V_s, s = \overline{1, s_0}. \quad (11)$$

Здесь условия (9)-(10) определяют ограничения на распределяемый ресурс для элементов системы, а условия (11) являются условиями баланса.

6. Условия совместности системы ограничений математической модели

Рассмотрим величины L_i^0 и R_i^0 , для которых выполняются соотношения:

$$L_i^0 = \sum_{j \in Q(i)} L_j^0, R_i^0 = \sum_{j \in G(i)} R_j^0, i \in V \setminus V_0.$$

Для их определения предлагается следующая процедура.

Найдем с величины L_i^p и R_i^p , $i \in V$:

$$L_i^p = L_i, R_i^p = R_i, i \in V_0, \quad (12)$$

$$L_i^p = \max (L_i, \sum_{j \in Q(i)} L_j^p), i \in V \setminus V_0,$$

$$R_i^p = \min (R_i, \sum_{j \in G(i)} R_j^p), i \in V \setminus V_0. \quad (13)$$

Если максимум выражения (12) с найденными значениями L_i^p достигается на L_i , то $L_i^0 = L_i^p$, а величины L_j^0 , $j \in Q(i)$ определяются путем увеличения значений L_j^p таким образом, чтобы $\sum_{j \in Q(i)} L_j^0 = L_i^0$.

Если максимум выражения (12) достигается на $\sum_{j \in Q(i)} L_j^p$, то $\sum_{j \in Q(i)} L_j^p = L_i^0$.

Если минимум выражения (13) с найденными значениями, R_i^p достигается на R_i , то $R_i^0 = R_i$, а величины R_j^0 , $j \in G(i)$ определяются путем уменьшения значений R_j^p таким образом, чтобы $\sum_{j \in G(i)} R_j^0 = R_i^0$.

Если минимум выражения (13) с найденными значениями R_i^p достигается на $\sum_{j \in G(i)} R_j^p$, то $R_i^0 = \sum_{j \in G(i)} R_j^p$, а $R_j^0 = R_j^p$, $j \in G(i)$.

Если после применения описанного алгоритма некоторые переменные определяются однозначно, то они исключаются из рассмотрения и исходная система преобразуется в систему меньшей размерности.

Приведенная здесь процедура получения новых границ сегментов согласно [12] называется процедурой приведения границ.

После проделанных преобразований математическая модель проблемы формирования объемно-календарных планов может быть представлена в виде совокупности линейных двухсторонних неравенств:

$$L_i^0 \leq \sum_{j \in G(i)} x_{ji} \leq R_i^0, i \in V_0, \quad (14)$$

$$L_i^0 \leq \sum_{j \in Q(i)} x_{ij} \leq R_i^0, i \in V_s, s = \overline{1, s_0}, \quad (15)$$

$$L_i^0 \leq \sum_{j \in Q(i)} x_{ij} \leq R_i^0, i \in V_{st}, s = \overline{1, s_0}, t = \overline{1, t_0}, \quad (16)$$

$$0 \leq \sum_{j \in G(i)} x_{ji} - \sum_{j \in Q(i)} x_{ij} \leq 0, i \in V_s, s = \overline{1, s_0}. \quad (17)$$

Конкретизируем критерий рассматриваемой задачи.

Введенный ранее функционал $\mu(\vec{x}) = \sum_{k \in K} \mu(x_k) \rightarrow \text{opt}$ предполагает следующую конкретизацию, зависящую от поставленных целей. Если к основным элементам системы относятся подразделения предприятия, задаваемые множеством V_s , для которых выполняются ограничения (15), и при этом требуется как можно больше использовать ресурсы этих подразделений, то:

$$\mu_i(x) = \sum_{j \in Q(i)} x_{ij} \rightarrow \max, i \in V_s, s = \overline{1, s_0}. \quad (18)$$

В случае, если предполагается сохранять определенный запас ресурсов основных подразделений:

$$\mu_i(x) = \sum_{j \in Q(i)} x_{ij} \rightarrow \min, i \in V_s, s = \overline{1, s_0}. \quad (19)$$

Алгоритм решения

Система неравенств (14)-(17) с приведенными границами при выполнении условий $L_i^0 \leq R_i^0, i \in V$, согласно теореме о приведенных границах [12], является совместной, и по построению ни одно из неравенств ограничений (14)-(16) не является зависимым. Отсюда в качестве ведущей гиперплоскости может быть выбрана гиперплоскость, соответствующая любому из односторонних неравенств этих ограничений, т.е. та, проецирование на которую приносит максимальное (минимальное) приращение текущему значению критерия оптимизационной задачи. После выполнения схемы жорданова исключения с последующим удалением ведущего столбца (переменной) и ведущей строки (ограничения), получим новую систему ограничений (меньшей размерности), для которой необходимо выполнить процедуру приведения границ сегментов (только для тех элементов системы, которые участвовали при выполнении схемы жорданова исключения). Новая система ограничений также является совместной и не содержит зависимых неравенств, т.е. для нее можно повторить предлагаемую процедуру.

Рассмотрим задачу 1, задаваемую системой ограничений (14-17), и критериями (18), которая является многокритериальной задачей с линейными ограничениями и линейными критериями. Рассмотрим один из критериев задачи 1 при заданном номере i , определяющим некоторое подразделение предприятия. Этому критерию соответствует ограничение $L_i^0 \leq \sum_{j \in Q(i)} x_{ij} \leq R_i^0$. Очевидно, что значение этого критерия на любом допустимом решении принадлежит сегменту $[L_i^0, R_i^0]$. Пусть исходная система (14-17) совместна. Рассмотрим сегмент $[L_i^*, R_i^*], [L_i^*, R_i^*] \subseteq [L_i^0, R_i^0]$. Рассмотрим систему ограничений (15), где вместо выбранного ограничения с номером i , рассмотрим ограничение $L_i^* \leq \sum_{j \in Q(i)} x_{ij} \leq R_i^*$. Применив к измененной системе описанную процедуру приведенных границ, можно проверить полученную систему на совместность. При этом вычислительная сложность такой проверки линейна.

Рассмотрим систему из k вложенных сегментов $[L_i^1, R_i^1] \subset [L_i^2, R_i^2] \subset \dots \subset [L_i^{k-1}, R_i^{k-1}] \subset [L_i^0, R_i^0]$. Поскольку мы рассматриваем максимизируемый критерий, «лучшим» сегментом будет тот, для которого совместна система (14-17) с замененным ограничением $L_i^0 \leq \sum_{j \in Q(i)} x_{ij} \leq R_i^0$ на ограничение $L_i^j \leq \sum_{j \in Q(i)} x_{ij} \leq R_i^j$, и несовместна при заменном

ограничении на $L_i^{j+1} \leq \sum_{j \in Q(i)} x_{ij} \leq R_i^{j+1}$. Монотонность, связанная с вложенностью системы сегментов, позволяет осуществлять для поиска лучшего сегмента двоичный поиск.

Для решения поставленной многокритериальной задачи 1 предлагается ввести лексикографическое упорядочивание частных критериев оптимальности (18), учитывающее «важности» изделий, которые будут изготавливаться в подразделениях предприятия. Будем предполагать, что введенная нумерация $s = \overline{1, s_0}$ уже соответствует введенному порядку.

Алгоритм решения задачи 1 заключается в последовательной проверке на совместность системы линейных двусторонних алгебраических неравенств, в которой всегда присутствуют без изменения ограничения (14), (16), (17) и ограничения (15) с измененными значениями левых и правых границ.

1-й шаг работы алгоритма

Рассматривается система ограничений (14)–(17), при условии, что ограничения с номером $i = 1$ системы (15) последовательно заменяются на ограничения, определяемыми системой из k вложенных сегментов $[L_i^1, R_i^1] \subset [L_i^2, R_i^2] \subset \dots \subset [L_i^{k-1}, R_i^{k-1}] \subset [L_i^0, R_i^0]$, каждый раз проверяя на совместность полученную систему неравенств, используя процедуру приведенных границ. Монотонность, связанная с вложенностью системы сегментов, позволяет осуществлять для поиска «лучшего» сегмента двоичный поиск.

2-й шаг работы алгоритма

Зафиксировав ограничение с номером $i = 1$ системы (15) на найденном сегменте, повторяем проделанную процедуру для ограничения $i = 2$ системы (15).

s_0 -й шаг работы алгоритма

Зафиксировав ограничение с номером $i = s_0 - 1$ системы (15) на найденном сегменте, повторяем проделанную процедуру для ограничения $i = s_0$ системы (15).

Предложенный алгоритм имеет линейно-логарифмическую сложность, и включает в себя проверку на совместность порядка $s_0 \log_2 k$ двусторонних систем линейных алгебраических неравенств, для чего используются линейные процедуры приведенных границ.

Результатом работы алгоритма станет совместная система линейных двусторонних алгебраических неравенств, любое решение которой будет допустимым решением поставленной задачи. Поскольку найденная система совместных ограничений представляет собой иерархическую систему древовидной структуры, решение исходной задачи (14)–(17) можно найти с использованием введенного ранее дерева $T = (V, A)$, $A \subseteq V^2$.

Вершине дерева, соответствующей ограничению с номером $i = 1$ системы (15) присваивается максимально возможное значение из сегмента, найденного для этой вершины. Применяется процедура приведенных границ, которая преобразует систему, но сохранит ее совместность. Затем то же самое повторяется последовательно для остальных ограничений в порядке $i = 2, i = 3, \dots, i = s_0$. Затем в произвольном порядке выбираются остальные вершины и для них выбираются произвольные значения из соответствующих сегментов. Найденные объемы распределяемого ресурса определяют решение исходной задачи (14)–(17). В результате несложных преобразований предложенный алгоритм может быть применен и к решению задачи 2 с минимизируемым критерием.

Заключение

В работе рассмотрена проблема формирования объемно-календарных планов для предприятий с единичным и мелкосерийным характером производства. Построена общая математическая модель, в рамках которой ставится многокритериальная задача объемно-календарного планирования. Путем свертки частных критериев оптимальности эта задача формализуется как задача линейного программирования, решение которой может быть осуществлено с использованием открытых пакетов программ. Для часто встречающегося случая, когда рассматриваемая задача ставится в рамках иерархической системы древовидной структуры, предложен алгоритм решения поставленной задачи, имеющий линейно-логарифмическую сложность.

Библиографический список

1. Прилуцкий, М.Х. Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах / М.Х. Прилуцкий // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 2. – С. 139-146.
2. Прилуцкий, М.Х. Многокритериальные многоиндексные задачи объемно-календарного планирования / М.Х. Прилуцкий // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2007. – № 1. – С. 83-87.
3. Прилуцкий, М.Х. Оптимизационные задачи объемно-календарного планирования для нефтеперерабатывающих предприятий / М.Х. Прилуцкий, В.Е. Костюков // Системы управления и информационные технологии. – 2007. – № 2-1(28). – С. 188-193.
4. Афраимович, Л.Г. Многоиндексные задачи оптимального планирования производства / Л.Г. Афраимович, М.Х. Прилуцкий // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 10. – С. 148-155.
5. Прилуцкий, М.Х. Задачи календарного планирования для предприятий с единичным и мелкосерийным характером производства / М.Х. Прилуцкий, И.В. Нетронин // Системы управления и информационные технологии. – 2019. – № 3(77). – С. 46-51.
6. Прилуцкий, М.Х. Задачи объемно-календарного планирования для предприятий с единичным и мелкосерийным характером производства / М.Х. Прилуцкий, И.В. Нетронин // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2019. – № 4(127). – С. 36-43.
7. Прилуцкий, М.Х. Решение задач объемно-календарного планирования для предприятий судостроения в условиях ограниченности ресурсов / М.Х. Прилуцкий, Е.А. Кумагина // Научные проблемы водного транспорта. – 2024. – № 80. – С. 35-42.
8. Игумнов, Л.А. Проблема существования решения у больших размерных задач линейного программирования / Л.А. Игумнов, М.Х. Прилуцкий // Информационные системы и технологии ИСТ-2020: Сборник материалов XXVI Международной научно-технической конференции, Нижний Новгород, 24-28 апреля 2020 года / Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева. – Нижний Новгород : Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева. – 2020. – С. 825-829.
9. SoPlex. Sequentialobject-oriented simplex. [Электронный ресурс] – URL: <https://soplex.zib.de> (дата обращения 16.03.2026).
10. GLPK. GNU Linear Programming Kit. [Электронный ресурс] – URL: <https://www.gnu.org/software/glpk/> (дата обращения 16.03.2026).
11. Прилуцкий, М.Х. Распределение однородного ресурса в иерархических системах древовидной структуры / М.Х. Прилуцкий // Труды международной конференции «Идентификация систем и задачи управления SICPRO 2000». Москва, 26-28 сентября 2000 г. – М. : Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – 2000. – С. 238-249.

References

1. Prilutskiy M.Kh. Mnogokriterial'noe raspredelenie odnorodnogo resursa v ierarkhicheskikh sistemakh [Multicriteria distribution of a homogeneous resource in hierarchical systems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control]. 1996;(2):139-146. (in Russian).
2. Prilutskiy M.Kh. Mnogokriterial'nye mnogoindexnye zadachi ob'emno-kalendar'nogo planirovaniya [Multicriteria multi-index aggregate scheduling problems]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems]. 2007;(1):83-87. (in Russian).
3. Prilutskiy M.Kh., Kostyukov V.E. Optimizatsionnye zadachi ob'emno-kalendar'nogo planirovaniya dlya neftepererabatyvayushchikh predpriyatiy [Optimization problems of aggregate scheduling for oil refineries]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control Systems and Information Technologies]. 2007;(2-1(28)):188-193. (in Russian).
4. Afraymovich L.G., Prilutskiy M.Kh. Mnogoindexnye zadachi optimal'nogo planirovaniya proizvodstva [Multi-index optimal production planning problems]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control]. 2010;(10):148-155. (in Russian).
5. Prilutskiy M.Kh., Netronin I.V. Zadachi kalendar'nogo planirovaniya dlya predpriyatiy s edinichnym i melkoseriynym kharakterom proizvodstva [Scheduling problems for enterprises with unit and small-scale production]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control Systems and Information Technologies]. 2019;(3(77)):46-51. (in Russian).

6. Prilutskiy M.Kh., Netronin I.V. Zadachi ob'emno-kalendarnogo planirovaniya dlya predpriyatiy s edinichnym i melkoseriynym kharakterom proizvodstva [Aggregate scheduling problems for enterprises with unit and small-scale production]. *Trudy NGTU im. R.E. Alekseeva* [Transactions of NNTSU n.a. R.E. Alekseev]. 2019;(4(127)):36-43. (in Russian).
7. Prilutskiy M.Kh., Kumagina E.A. Reshenie zadach ob'emno-kalendarnogo planirovaniya dlya predpriyatiy sudostroeniya v usloviyakh ogranichennosti resursov [Solving aggregate scheduling problems for shipbuilding enterprises under resource constraints]. *Nauchnye problemy vodnogo transporta* [Scientific Problems of Water Transport]. 2024;(80):35-42. (in Russian).
8. Igumnov L.A., Prilutskiy M.Kh. Problema sushchestvovaniya resheniya u bol'sherazmernykh zadach lineynogo programmirovaniya [The problem of existence of a solution for large-scale linear programming problems]. In: «Informatsionnye sistemy i tekhnologii IST-2020: Sbornik materialov XXVI Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii» [Information Systems and Technologies IST-2020: Proceedings of the XXVI International Scientific and Technical Conference]; 2020 Apr 24-28; Nizhniy Novgorod. Nizhniy Novgorod: Nizhniy Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev; 2020. p. 825-829. (in Russian).
9. SoPlex. Sequential object-oriented simPlex. Available from: <https://soplex.zib.de> [accessed 2026 Mar 16].
10. GLPK. GNU Linear Programming Kit. Available from: <https://www.gnu.org/software/glpk/> [accessed 2026 Mar 16].
11. Prilutskiy M.Kh. Raspredelenie odnorodnogo resursa v ierarkhicheskikh sistemakh drevoidnoy struktury [Distribution of a homogeneous resource in hierarchical systems of tree structure]. In: *Trudy mezhdunarodnoy konferentsii «Identifikatsiya sistem i zadachi upravleniya SICPRO 2000»* [Proceedings of the International Conference «System Identification and Control Problems SICPRO 2000»]; 2000 Sep 26-28; Moscow. Moscow: V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences; 2000. p. 238-249. (in Russian).

**Дата поступления
в редакцию: 07.04.2026**

**Дата принятия
к публикации: 17.07.2026**