Ershkov

*На правах рукописи*

**ЕРШКОВ Сергей Владимирович**

# НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ С ПОСТОЯННОЙ ФУНКЦИЕЙ БЕРНУЛЛИ

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2018

Работа выполнена на кафедре «Прикладная математика»
ФГБОУ ВО «Нижегородского государственного технического университета
им. Р.Е. Алексеева»

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор физико-математических наук, **Шамин Роман Вячеславович** |
| Официальные оппоненты: | **Семенов Владимир Иосифович**, доктор физико-математических наук, профессор, Балтийский федеральный университет им. И. Канта |
| | **Коптев Александр Владимирович**, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики, Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова |
| Ведущая организация: | ФГБУН «Институт прикладной математики Дальневосточного отделения РАН» |

Защита состоится «25» декабря 2018 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д212.165.10 при ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева» по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24, корп. 1, ауд. 1315.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НГТУ им. Р.Е. Алексеева и по ссылке - https://www.nntu.ru/frontend/web/ngtu/files/org_structura/instit_fakul_kaf_shkoly/fsvk/dissertacii/2018/ershkov_s_v.pdf
Автореферат разослан «__» ________ 2018 г.

Учёный секретарь
Диссертационного совета,

к. ф.-м. н. Рубинская Е.А. Рубинская

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

## Актуальность темы диссертации

Построение точных решений уравнений гидродинамики имеет весьма важное значение, поскольку, во-первых, позволяет лучше понять структуру решений нелинейных уравнений гидродинамики, а, во-вторых, подобные решения могут служить в качестве теста (объекта) для проверки точности используемых методов численного моделирования. При этом наиболее важным является именно случай нестационарных решений. Таким образом, тема диссертации является актуальной в контексте разработки новых методов точных решений уравнений механики, и степень ее разработанности обеспечивается актуализацией этих методов в отношении известных на данный момент техник поиска точных решений (например, на основе разделения переменных).

В данной диссертационной работе получено представление общего вида для нового класса нестационарных трехмерных решений уравнений Навье-Стокса (вязкая несжимаемая жидкость), сохраняющих интеграл *Бернулли* (закон, функцию или уравнение *Бернулли*) для течения во всем пространстве.

Существование подобных решений было установлено ранее для случая стационарного безвихревого или потенциального течения вязкой несжимаемой жидкости (классический интеграл Коши-Лагранжа). Менее известным является случай существования интеграла *Бернулли* для потока плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости [1] (характерный признак плоскопараллельных течений - вихрь строго перпендикулярен полю скорости). Также следует упомянуть работы [2, 3].

В литературе по гидродинамике часто можно встретить следующее рассуждение:

1) рассмотрим уравнение импульсов Навье-Стокса;

2) применим ротацию к обеим частям, и будем решать уже получившееся уравнение.

Контрпример, представленный в разделе 3.5 (глава 3) в рассматриваемой диссертационной работе, показывает, что при переходе от 1) к 2) выше теряется часть решений. То есть, решая уравнение эволюции вихря из 2) выше, мы конечно получим решения исходного уравнения импульсов Навье-Стокса. Но не все, часть решений при этом будет потеряна.

Для случая 2D, однако, была показана эквивалентность перехода от 1) к 2) выше - например, в работе Gresho [4].

В случае 3D это до сих пор не сделано, и как показывает контрпример выше, сделано быть не может. Таким образом, тема диссертации является востребованной в контексте актуализации привычных схем и теоретических подходов к пониманию свойств решений уравнений гидродинамики.

## Цели диссертационной работы

Целью данной работы является построение новых точных, нестационарных решений в гидродинамике на основе уравнений Навье-Стокса и Эйлера несжимаемой жидкости, и последующий анализ полученных решений.

**Научная новизна результатов работы**

Научная новизна диссертационной работы определяется следующими полученными оригинальными результатами исследований:

1. Предложен новый метод решения нестационарных уравнений Навье-Стокса для вязких течений несжимаемой жидкости, сохраняющих интеграл или функцию Бернулли для течения во всем пространстве.
2. В соответствии с предложенным методом, получены новые классы точных нестационарных решений, допускаемых уравнениями Навье-Стокса.
3. Получено представление нового точного решения уравнений Навье-Стокса из класса нестационарных *винтовых* течений, отличительной особенностью которого является пространственная зависимость коэффициента пропорциональности $\alpha$ между полем скорости и завихренностью в потоке жидкости. Получен новый инвариант (отвечающий данному типу течений) - градиент функции *Бернулли* $\nabla B$ должен быть перпендикулярен вектору $\nabla\alpha$ в таком потоке, где:

$$B = \frac{1}{2}(\vec{u}^{\,2}) + p + \phi$$

для нестационарного решения $\{p,\ \vec{u}\}$ уравнений Навье-Стокса, здесь $\phi$ это потенциал внешней силы, действующей на жидкость.
4. Построен пример *винтовых* течений, опровергающий как контрпример утверждение о том, что уравнение импульсов Навье-Стокса эквивалентно уравнению эволюции вихря в смысле множества допускаемых 3D нестационарных решений.
5. Получено новое точное решение уравнений Эйлера (несжимаемая жидкость) в соответствии с предложенным новым методом построения нестационарных решений уравнений Навье-Стокса.
6. Выявлены общие закономерности для всех классов изученных решений, базисом являются особенности общих решений уравнений типа *Риккати* (с финитными областями существования непрерывного решения).

**Теоретическая значимость результатов работы**

В диссертации впервые представлен новый класс нестационарных течений на основе уравнений Навье-Стокса и Эйлера для несжимаемой жидкости (включая новые результаты по винтовым течениям в главе 3), сохраняющих инвариантным интеграл или функцию Бернулли. До сих пор – в классических учебниках по гидродинамике – данное свойство традиционно рассматривалось только для стационарных, безвихревых течений вязкой несжимаемой жидкости (классический интеграл Коши-Лагранжа).

Все решения и алгоритмы поиска решений, предложенные в диссертации, объединены уникальным подходом (актуальность и работоспособность которого доказывается при поиске новых решений уравнений Эйлера несжимаемой жидкости). Данный теоретический подход, или метод построения точных решений уравнений гидродинамики, заключается в комбинации известных методов, которые обычно не применяют вместе – метод поиска точных решений и метод дифференциальных связей, МДС. Целью является редукция определяющих уравнений к какому-либо варианту уравнений типа Риккати или Абеля, но допускается редукция к другим типам уравнений. При этом разделение производится по классическому методу поиска точных решений, в варианте разделения общего объекта исследований на суммирующиеся части (а не в виде разделения на фактор-множители - метод разделения переменных). Для каждой из отделенных частей ищутся нетривиальные решения, исследуются возникшие дополнительные дифференциальные связи на совместность.

Таким образом, при исследовании уравнений Навье-Стокса в практическом плане решена задача построения системы инвариантов, определяющих общий вид и характер нового класса решений, сохраняющих интеграл *Бернулли* (закон, функцию или уравнение *Бернулли*).

**Практическая значимость результатов работы**

Практическая значимость результатов работы определяется возможностью проверки точности численных методов, применяемых в гидродинамике, при помощи полученных в работе точных, нестационарных 3D решений.

Кроме того, возможность существования нестационарных режимов течений, сохраняющих функцию Бернулли, может означать способность быстро оценивать параметры изменения потока (скорость, давление) без их непосредственного измерения, только при помощи визуального наблюдения характеристик (например, определять давление через скорость, поскольку они связаны между собой в инварианте или функции Бернулли). Это может быть важно для технических областей (например, в нефтепроводах, где наблюдаются достаточно большие скачки давления на маршевых магистральных участках) или в области астрофизики, где непосредственные измерения невозможны (например, при изучении динамики приливных течений на поверхности планет в экваториальной зоне, влияющих на орбиту спутников планет).

**Положения, выносимые на защиту**

1. Новый метод решения нестационарных уравнений Навье-Стокса для вязких течений несжимаемой жидкости, сохраняющих интеграл или функцию Бернулли для течения во всем пространстве.
2. Алгоритм построения нового класса точных нестационарных решений, допускаемых уравнениями Навье-Стокса.
3. Новое точное решение уравнений Навье-Стокса (из класса нестационарных *винтовых* течений).
4. Простой и наглядный пример *винтовых* течений, опровергающий как контрпример утверждение о том, что уравнение импульсов Навье-Стокса эквивалентно уравнению эволюции вихря в смысле множества допускаемых 3D нестационарных решений.

5. Новое точное решение уравнений Эйлера (несжимаемая жидкость) в соответствии с предложенным алгоритмом.
6. Алгоритм решения уравнения динамики движения заряженной частицы под воздействием силы Лоренца в нерелятивистском приближении (во внешнем магнитном поле с заданным потенциалом $V$).

**Достоверность результатов**

Достоверность результатов работы обоснована выбором апробированных моделей механики жидкости, математической корректностью постановок гидродинамических задач, строгим использованием аналитических и численных методов, сопоставлением с натурными результатами.

**Апробация работы**

Основные результаты диссертации представлялись на Третьем совещании по магнитной и плазменной аэродинамике в аэро-космических приложениях «Conically self-similar solutions of the Maxwell's equations with an electromagnetic field torsion» (Москва, 2001), а также на семинарах в Нижегородском государственном техническом университете им. Р.Е.Алексеева (Нижний Новгород), Санкт-Петербургском государственном университете (кафедра гидроаэромеханики, математико-механический факультет, Санкт-Петербург), Московском Государственном Университете им. М.В.Ломоносова (Институт механики МГУ, Москва), Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва), РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина (кафедра нефтяной и подземной гидромеханики, Москва), Институте вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск).

Полученные результаты используются в российских исследовательских проектах, выполняемых при участии автора диссертации:

- Научно-исследовательские работы в рамках государственного задания в сфере научной деятельности (задание № 5.5176.2017/8.9);
- грант Президента Российской Федерации по государственной поддержке научных исследований ведущих научных школ Российской Федерации НШ-2685.2018.5.

**Публикации и личный вклад автора**

По теме диссертации опубликовано 12 печатных работ, включая 11 статей в изданиях, рекомендованных ВАК и/или входящих в международные базы цитирования WoS и Scopus и 1 статью в трудах всероссийской конференции. При этом 8 работ опубликовано без соавторов.

В совместных работах соавторам принадлежат следующие результаты: первая статья в списке (2018 г.) опубликована в соавторстве с Шаминым Романом Вячеславовичем, доктором физико-математических наук, профессором, и Гиниятуллиным Айратом Рафаэлевичем, аспирантом Нижегородского государственного технического университета имени Р.Е.Алексеева. В данной работе, Р.В.Шамин осуществлял общее научное руководство направлением творческого научного поиска; С.В.Ершкову принадлежит реализация замысла, поиск точных решений, вычисления, представление общего вида решений, аппроксимация и поиск приближенных решений; А.Р.Гиниятуллин отвечал за построение графиков, графическое представление решений при подготовке публикации.

Вторая статья в списке (2018 г.) опубликована в соавторстве с Шаминым Романом Вячеславовичем, доктором физико-математических наук, профессором. В данной работе, С.В.Ершкову также принадлежит реализация замысла, поиск точных решений, вычисления, представление общего вида решений, аппроксимация и поиск приближенных решений.

Последняя статья в списке (2001 г.) опубликована в соавторстве с Щенниковым Владимиром Вениаминовичем, доктором физико-математических наук (ИАП РАН). В данной работе, В.В.Щенникову принадлежит идея поиска решений, инвариантных относительно уравнения состояния газа (переход к его наиболее общему виду, включающему все известные спецификации - совершенный, несовершенный, политропный, нормальный, аномальный газы). С.В.Ершкову принадлежит реализация замысла, поиск решений, вычисления, представление общего вида решений на основе метода разделения переменных, редукция фактор-системы обыкновенных дифференциальных уравнений к системе двух уравнений *Риккати*.

Кроме того, в 3 работах используется разработанный автором подход к построению точных решений уравнений в механике сплошных сред и волновой механике (первые три работы в списке).

**Структура и объём диссертации**

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертации - 100 страниц, включая 4 рисунка и 1 таблицу.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность работы, сформулированы ее цели, научная новизна и основные положения, выносимые на защиту, теоретическая и практическая значимость результатов работы, их достоверность, апробация работы, список публикаций по теме диссертации и личный вклад автора.

**Глава 1** посвящена изучению нестационарных решений основных уравнений гидродинамики (уравнений Навье-Стокса) с заявленными характеристиками. Здесь и ниже обозначения и нумерация формул не совпадают с представленными в диссертации (если не указано обратное).

В параграфе 1.1 дается введение в методологию и методы поиска точных решений в механике сплошных сред (гидродинамике). Кроме того, во введении дан краткий обзор основных достижений и трудностей в исследуемой области. Ставится задача анализа (выявления) общих особенностей нестационарных решений изучаемого типа, допускаемых уравнениями гидродинамики на основе уравнений Навье-Стокса и Эйлера. Приводятся соответствующие определения и утверждения. Исследуется также вопрос о корректности постановки задачи. Дан обзор наиболее часто встречающихся характерных парадоксов топологического переупрощения в механике сплошных сред, по Гаррету Биркгофу.

В параграфе 1.2 приводится общий обзор (ретроспектива) именных точных решений в механике сплошных сред, позволяющий получить представление об истории вопроса, начиная с момента возникновения механики сплошных сред как отдельной научной дисциплины. Приводится таблица именных точных решений.

В параграфе 1.3 дается общая постановка задачи поиска нестационарных трехмерных решений уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой ньютоновой жидкости, рассматриваемой для течения во всем пространстве, а именно: системы уравнения импульсов и уравнения неразрывности.

В параграфе 1.4 уравнение импульсов Навье-Стокса приводится эквивалентными преобразованиями - методами векторной алгебры - к форме, удобной для поиска решений. В явном виде выделено отдельное слагаемое, ассоциируемое с интегралом или функцией Бернулли (3):

$$\nabla\cdot\vec{u} = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = \vec{u}\times\vec{w} + \nu\cdot\nabla^2\vec{u} - \left(\frac{1}{2}\nabla(u^2) + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla\phi\right) \tag{2}$$

- здесь $\vec{u}$ это векторное поле скоростей потока; $\rho$ - плотность жидкости, $p$ - давление, $\nu$ - кинематическая вязкость, $\phi$ - потенциал внешних объёмных сил (*на единицу массы в объеме*), действующих на жидкость; $\vec{w}$ - это вихрь.

Существование подобных решений было установлено ранее для случая стационарного безвихревого или потенциального течения вязкой несжимаемой жидкости (интеграл Коши-Лагранжа). Менее известным является случай существования интеграла *Бернулли* для потока плоскопараллельных течений вязкой несжимаемой жидкости [1], а также ряд других исследований [2, 3].

В параграфе 1.5 вводится разбиение поля скорости на вихревую и безвихревую составляющие, согласно фундаментальной теореме Гельмгольца векторного анализа: $\vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_w$ (здесь $\vec{u}_p$ это безвихревая компонента поля скорости потока, $\nabla\times\vec{u}_p = \vec{0}$, в то время как $\vec{u}_w$ - вихревая компонента, $\nabla\cdot\vec{u}_w = 0$). А также ставится задача поиска решений системы уравнений (1), (2) для *постоянной* функции *Бернулли*:

$$B = \frac{1}{2}(\vec{u}^{\,2}) + p + \phi = const, \quad \nabla B = 0. \tag{3}$$

Тем самым, на уравнения системы накладывается дополнительная дифференциальная связь. Кроме того, задача поиска частных решений системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}_p}{\partial t} = \vec{u}_p \times \vec{w} + \vec{f}\,, & (4) \\ \\ \dfrac{\partial \vec{u}_w}{\partial t} = \nu \cdot \nabla^2 \vec{u}_w + \vec{s}\,, & (5) \end{cases}$$

(1), (2) упрощается выделением в уравнении импульсов - помимо безвихревой части (ассоциируемой с интегралом или функцией *Бернулли*) - также и вихревой компоненты уравнения импульсов, в явном виде. Таким образом, уравнение импульсов может быть представлено как сумма двух уравнений:
где

- здесь векторная величина $\vec{s}$ – это функция источника завихренности (также зависящая от времени, в общем случае); в данной работе рассматривается только случай $\vec{s} = \vec{0}$. Уравнение (5) с необходимостью приводит к следующему уравнению (*для этого достаточно взять ротацию от обеих частей*):

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = \nu \cdot \nabla^2 \vec{w}\,, \qquad (6)$$

$$\vec{f} = \vec{u}_w \times \vec{w} - \vec{s}\,,$$

- которое означает что, действительно (в случае вязкой ньютоновой жидкости), изменение переменного поля вихря $\vec{w}$ существенным образом зависит от фактора вязкости жидкости.

Таким образом, в главе 1 уравнение импульсов представлено суммой 3-х уравнений (тождеств), одно из которых является аналогом интеграла *Бернулли* (функции, закона или уравнения *Бернулли*) для компонент градиента давления; второе векторное уравнение представляет систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений по времени для 3-х компонент безвихревой составляющей скорости; третье – уравнение диффузии или теплопроводности для каждой из 3-х компонент вихревой составляющей скорости.

Фактически, уравнение импульсов разделено на три составляющие: безвихревую часть (интеграл *Бернулли*), вихревую (уравнение диффузии или теплопроводности для вихревой составляющей скорости) и смешанную составляющие. Данное разделение произведено по классическому методу поиска точных решений, в варианте разделения общего объекта исследований на суммирующиеся части (а не в виде разделения на фактор-множители - как это делается, например, методом разделения переменных). Для каждой из отделенных частей уравнения импульсов ищутся нетривиальные решения.

В параграфе 1.6 смешанная составляющая (4) уравнения импульсов (оставшаяся после отделения в явном виде вихревой (5) и бехвихревой (3) составляющих этого уравнения) представлена в виде системы из трех уравнений для поиска трех составляющих решения $\vec{u}_p = \{U, V, W\}$ в зависимости только от времени $t$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t} &= (V \cdot w_z - W \cdot w_y) + f_x , \\
\frac{\partial V}{\partial t} &= (W \cdot w_x - U \cdot w_z) + f_y , \\
\frac{\partial W}{\partial t} &= (U \cdot w_y - V \cdot w_x) + f_z ,
\end{aligned} \tag{7}$$

- где каждая функция зависит от переменных ($x$, $y$, $z$, $t$), но при этом переменные ($x$, $y$, $z$) рассматриваются как параметры. Это позволяет рассматривать данную систему как систему *обыкновенных* дифференциальных уравнений по времени $t$. Также вводятся условия совместности (8), позволяющие учесть все особенности представленных решений, а именно - вводится требование "нулевого вихря" (наряду с уравнением неразрывности (1)):

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = 0 , \quad \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \tag{8}$$

В параграфе 1.7 для системы (7) показано, что представление решения зависит от решений 2-х комплексных уравнений *Риккати*, причём формульное представление этого решения определяется вещественным диапазоном значений для любого момента времени (указано соотношение между составляющими решения, позволяющее перевести или трансформировать все комплексные решения в вещественные). Таким образом, решения для поля скорости приобретают ясный физический смысл.

В параграфе 1.8 делается замечание о характере решений уравнения (5) для вихревой составляющей поля скорости, поскольку существуют современные методы для решения 3-мерного уравнения теплопроводности [6], а также делается замечание о характере взаимосвязи давления и всех компонент поля скорости через интеграл или функцию *Бернулли* (3).

В параграфе 1.9 резюмируются итоги главы 1, обсуждается представление нестационарного 3D решения уравнений Навье-Стокса (1), (2).

**Глава 2** посвящена анализу, детализации и формульным аналитическим представлениям общих теоретических результатов, полученных в главе 1.

В параграфе 2.1 ещё раз фиксируется ключевое, изящное замечание о характере взаимосвязи компонент решений двух комплексных уравнений *Риккати*, позволяющее перевести или трансформировать все комплексные решения в вещественные.

В параграфе 2.2 эти представления облекаются в законченный

$$\begin{gathered}
U = -\gamma \cdot \left( \frac{2a}{1 + (a^2 + b^2)} \right), \quad V = -\gamma \cdot \left( \frac{2b}{1 + (a^2 + b^2)} \right), \\
W = \gamma \cdot \left( \frac{1 - (a^2 + b^2)}{1 + (a^2 + b^2)} \right) .
\end{gathered} \tag{9}$$

формульный вид для безвихревой компоненты поля скоростей:
- где компоненты $a$, $b$ *безвихревой* части поля скоростей в (9) являются решениями системы уравнений *Риккати*:

$$\begin{cases} a' = \frac{w_y}{2}\cdot a^2 - (w_x \cdot b)\cdot a - \frac{w_y}{2}(b^2 - 1) + w_z \cdot b\,, \\ \\ b' = -\frac{w_x}{2}\cdot b^2 + (w_y \cdot a)\cdot b + \frac{w_x}{2}\cdot (a^2 - 1) - w_z \cdot a\ . \end{cases} \tag{10}$$

в зависимости от компонент вихря $\vec{w} = \{w_x, w_y, w_z\}$.

В параграфе 2.3 приведены соответствующие примеры *частных* решений этой системы.

В параграфе 2.4 делается замечание о характере решений для каждой из компонент вихревой составляющей поля скорости (5) и вихря (6). А именно, для каждого из уравнений теплопроводности (6) для каждой из составляющих можно записать фундаментальное решение (11) как указано ниже:

$$w_i = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_0(u,v,\omega)\cdot \exp\left(-\left(\frac{(x-u)^2+(y-v)^2+(z-\omega)^2}{4\nu\cdot t}\right)\right) du\,dv\,d\omega}{8(\pi\cdot\nu\cdot t)^{\frac{3}{2}}} \tag{11}$$

- (здесь $w_0(x, y, z, t)_{t=0} = w_0(x, y, z)$, $i = \{x, y, z\}$), поскольку существуют современные методы решения 3-мерного уравнения теплопроводности [6]. Обсуждаются дополнительные ограничения, накладываемые на нестационарные решения для безвихревой составляющей поля скоростей $\vec{u}_p = \{U, V, W\}$, а также ограничения для решений *винтового* типа $\vec{u}_w \times \vec{w} = \vec{0}$ для вихревой составляющей поля скоростей ($\vec{u}_w = \beta\cdot \vec{w}$, $\beta \neq 0$).

В параграфе 2.5 обсуждается общее представление решения - основной результат главы 2 - его особенности, условия совместности, дополнительные возможности и возникающие ограничения в процессе построения решения, взаимосвязи компонент $a$, $b$ для *безвихревой* части поля скоростей. Также обсуждаются решения подобного типа, предложенные ранее другими авторами (Trkal V.; Bogoyavlenskij O., Fuchssteiner B.), особенности этих решений.

В параграфе 2.6 делаются резюмирующие замечания, а также обсуждаются допущения, сделанные в процессе поиска представленного решения.

В параграфе 2.7 производится проверка представленного нестационарного решения для безвихревой составляющей поля скоростей $\vec{u}_p = \{U, V, W\}$ непосредственной подстановкой формул (9) и (10) в исходные уравнения (7).

В параграфе 2.8 (заключение) перечислены основные результаты исследований, приводятся возможные области приложения предложенных методов, а также делается замечание о подобии характеров решений в уравнениях типа *Риккати* и проблеме малых знаменателей Анри Пуанкаре - в смысле расходимостей и существования непрерывного решения в ограниченном диапазоне значений аргумента.

В заключении главы 2 также отмечено, что при решении системы уравнений (7) для безвихревой части поля скоростей $\vec{u}_P = \{U, V, W\}$ (или (1.14) в диссертации) был использован метод, который носит достаточно общий характер. И поэтому данный метод (вместе с финальным представлением решения (9)-(10)) может быть успешно применен для решений других систем обыкновенных дифференциальных уравнений подобного рода.

Например, рассмотрен алгоритм решения уравнения динамики движения заряженной частицы под воздействием силы Лоренца в нерелятивистском приближении (во внешнем магнитном поле с заданным потенциалом $V$):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = k\left[\vec{v}\times\vec{B}\right],$$

- где $k$ – некоторый размерный коэффициент пропорциональности, характерный для данной задачи, $\vec{v}$ – скорость частицы, $\vec{B}$ – индукция внешнего магнитного поля, определяющая заданный потенциал $V$.

Решение будет выглядеть следующим образом (здесь ниже $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\upsilon$ - константа, зависящая от начальных условий):

$$v_1 = -\upsilon\cdot\left(\frac{2a}{1+(a^2+b^2)}\right), \quad v_2 = -\upsilon\cdot\left(\frac{2b}{1+(a^2+b^2)}\right),$$

$$v_3 = \upsilon\cdot\left(\frac{1-(a^2+b^2)}{1+(a^2+b^2)}\right),$$

- где функции a($t$), b($t$) являются решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений *Риккати*, $\vec{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$:

$$\begin{cases} a' = \left(\dfrac{k\cdot B_2}{2}\right)\cdot a^2 - (k\cdot B_1\cdot b)\cdot a - \dfrac{k\cdot B_2}{2}(b^2-1) + (k\cdot B_3)\cdot b\,, \\ b' = -\left(\dfrac{k\cdot B_1}{2}\right)\cdot b^2 + (k\cdot B_2\cdot a)\cdot b + \dfrac{k\cdot B_1}{2}\cdot(a^2-1) - (k\cdot B_3)\cdot a\,. \end{cases}$$

В **главе 3** исследован новый тип винтовых течений.

В параграфе 3.1 дается общая постановка задачи поиска подобных течений, отличительной особенностью которых является пространственная зависимость коэффициента пропорциональности $\alpha(x,y,z)$ между полем скорости и завихренностью в потоке жидкости:

$$\vec{\Omega}(x,y,z,t) = \alpha(x,y,z)\cdot\vec{u}(x,y,z,t) \qquad (12)$$

- здесь завихренность в потоке $\vec{\Omega} = (\nabla\times\vec{u})$, α - переменный (*пространственно зависимый*) параметр, определяемый начальными условиями, α = 1/β; составляющие поля скорости $\vec{u} = \{U, V, W\}$ не совпадают с обозначениями $\vec{u}_p$ в предыдущих главах диссертации (а просто являются составляющими скорости). Рассматривается задача Коши для течения во всем пространстве.

Кроме того, используя подобную пространственную зависимость (12) коэффициента (кинематического) подобия в анализе уравнения неразрывности (1), отмечено что нетрудно получить соответствующий инвариант $(\nabla\alpha\cdot\vec{u}) = 0$ для данного типа течений (поле скорости $\vec{u}$ перпендикулярно $\nabla\alpha$).

В параграфе 3.2 путем последовательных эквивалентных преобразований уравнения импульсов Навье-Стокса, используя инвариант $(\nabla\alpha\cdot\vec{u}) = 0$, получен ещё один новый инвариант, который означает что градиент функции *Бернулли* $\nabla B$ перпендикулярен вектору $\nabla\alpha$ в таком потоке, $(\nabla B\cdot\nabla\alpha) = 0$.

В параграфе 3.3 для случая постоянной функции *Бернулли* $B$ (3), получен класс нестационарных трехмерных точных решений уравнений Навье-Стокса вязкой несжимаемой жидкости, сохраняющих интеграл *Бернулли* (закон, функцию или уравнение *Бернулли*) для течения во всем пространстве. А именно, в предположении $\partial\alpha/\partial y = 0$ ($\partial\alpha/\partial z \neq 0$), составляющие поля скорости:

$$V = \pm\sqrt{\left(U^2(t_0)+V^2(t_0)+W^2(t_0)\right)\cdot\exp\left(-2\nu\cdot\alpha^2\cdot(t-t_0)\right) - \left(1+\frac{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2}\right)\cdot U^2}\,, \quad (13)$$

$$W = -\frac{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)}\cdot U\,, \quad U^2 \le \frac{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2}{\left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2\right)}\cdot\left(U^2(t_0)+V^2(t_0)+W^2(t_0)\right)\cdot\exp\left(-2\nu\cdot\alpha^2\cdot(t-t_0)\right)$$

- где зависимость компоненты поля скорости $U$ от времени $t$ описывается *обыкновенным* дифференциальным уравнением 1-го порядка:

$$\frac{dU}{dt} = \nu\cdot V\cdot\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right) - \nu\cdot\alpha^2\cdot U\,, \quad (14)$$

- в котором выражение для $V$ задается (определяется) тождеством (13) выше, а функции, зависящие от переменных $\{x, y, z\}$ – могут быть рассмотрены как переменные параметры относительно времени $t$. Уравнение (14), несмотря на сложный вид, удается свести к уравнению *Абеля* (3.12.1) в диссертации.

В параграфе 3.4 делаются резюмирующие замечания по представлению, особенностям и процедуре поиска решения, в частности о том что выбор пространственной части поля скоростей определяется (ограничивается) соотношением ($\nabla\alpha \cdot \vec{u}$) = 0:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}\cdot U + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\cdot V + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\cdot W = 0$$

- а также что выбор пространственной части поля давления задается через функцию *Бернулли* (3), при известных компонентах поля скоростей $\{U, V, W\}$:

$$B = \frac{1}{2}(\vec{u}^{\,2}) + p + \phi = const$$

В параграфе 3.5 показано почему построенный пример *винтовых* течений опровергает (как контрпример) утверждение о том, что уравнение импульсов Навье-Стокса эквивалентно уравнению эволюции вихря в смысле множества допускаемых 3D нестационарных решений (в случае 2D эквивалентность доказана в работе [4]).

В **главе 4** исследуется новый случай нестационарных решений уравнений Эйлера (система уравнений (1)-(2) при $\nu = 0$), сохраняющих функцию *Бернулли* (3) в потоке несжимаемой жидкости.

В параграфе 4.1 дается общая постановка задачи поиска подобных течений (при заданных начальных или граничных условиях).

В параграфе 4.2 для поиска решений используется подход, примененный ранее в главах 1-2 (предполагающий *аналитический* способ представления безвихревой части поля скорости (9)-(10) относительно времени $t$).

В параграфе 4.3 рассмотрен случай нестационарного решения для вихревого потока идеальной несжимаемой жидкости (случай с ненулевым вихрем скорости в потоке). Предложены условия для существования точного решения упомянутого типа; указаны ограничения при выборе формы 3D решения: а именно, поле давления вычисляется через заданное значение постоянной функции *Бернулли* (3) (при известном поле скорости).

В параграфе 4.4 приводится финальное представление решения, а также найден изящный способ его упростить до аналитического представления *приблизительного* решения. Приводятся соответствующие схематичные (условные) графики составляющих скоростного поля $\{u_1, u_2, u_3\}$ в зависимости от времени $t$, которые соответствуют приблизительным решениям:

$$u_1 = -\sqrt{\gamma^2(y,z) - \left(\exp\left(-(t-t_0)\right) + D\cdot\gamma(y,z)\right)^2}\ ,$$

- здесь $D = \partial\gamma/\partial y$, функция $\gamma\ (y, z)$ является некоторой произвольной функцией, определяемой из начальных условий, с дополнительным условием $\gamma^2 > \sigma^2(t)$ для всех значений $\{y, z, t\}$, где мы обозначили ($B = \partial\gamma/\partial z$)

$$\sigma(t) = -\left(\frac{\exp\left(-B\cdot(t-t_0)\right) + D\cdot\gamma(y,z)}{B}\right),$$

- и для простоты визуализации графиков выбран случай $B = 1$.

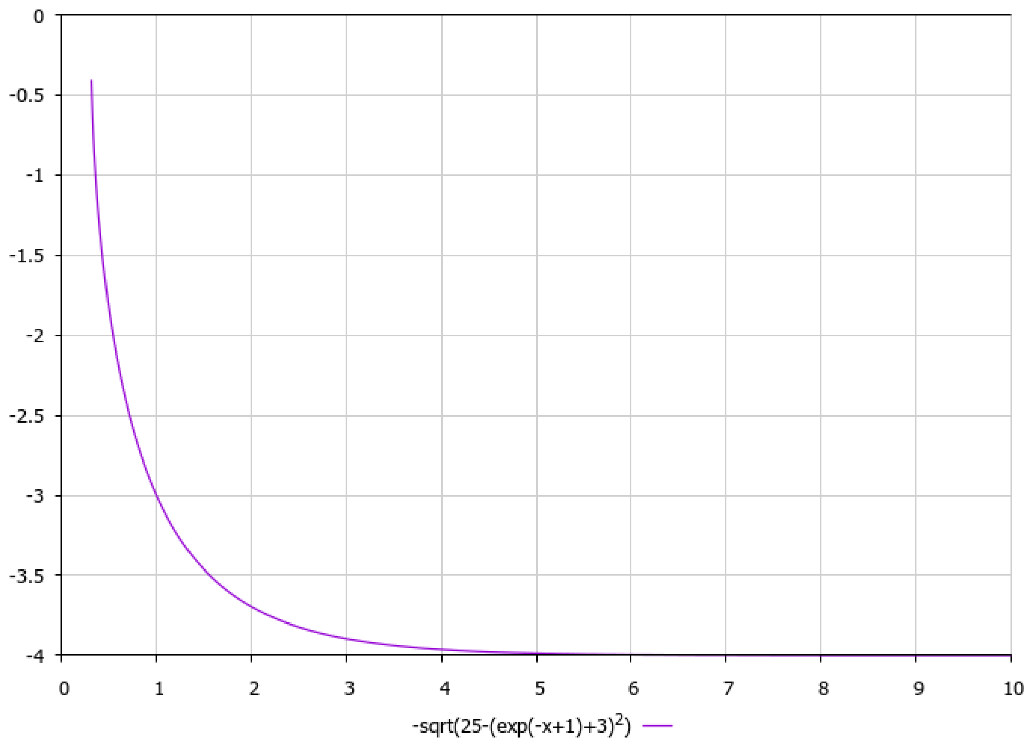


Рис.1. Схематичный график составляющей $u_1$ скорости в зависимости от $t$, по оси ординат отмечены значения $u_1$, по оси абсцисс время $t$ (здесь выбрано $t = x$, в качестве обозначения аргумента на графике)

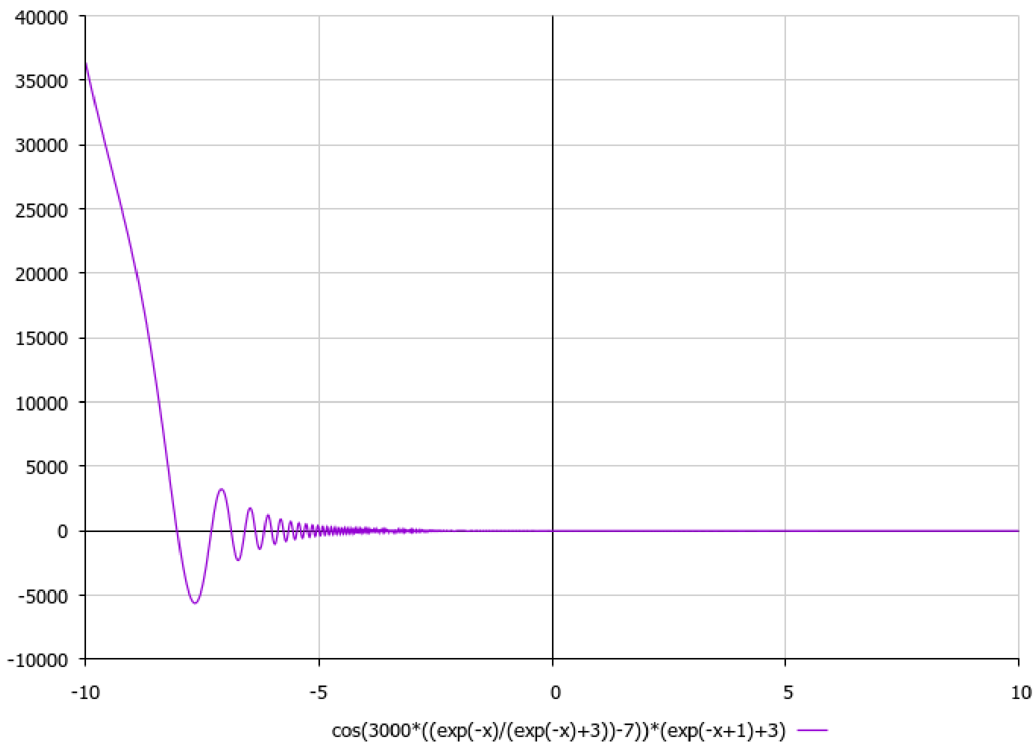


Рис.2. Схематичный график составляющей $u_2$ скорости в зависимости от $t$, где

$$u_2 = -\cos(A(t)\cdot x)\cdot\sigma(t)\,,$$

$$A(t) \;=\; \frac{\exp\left(-t_0\right)}{D\cdot\gamma(y,z)}\cdot\left(\frac{\exp\left(-t\right)}{\left(D\cdot\gamma(y,z)\cdot\exp\left(-t_0\right)+\exp\left(-t\right)\right)} \;-\; \frac{\gamma(y,z)}{x}\right)$$

Третья составляющая поля скорости в зависимости от времени *t*:

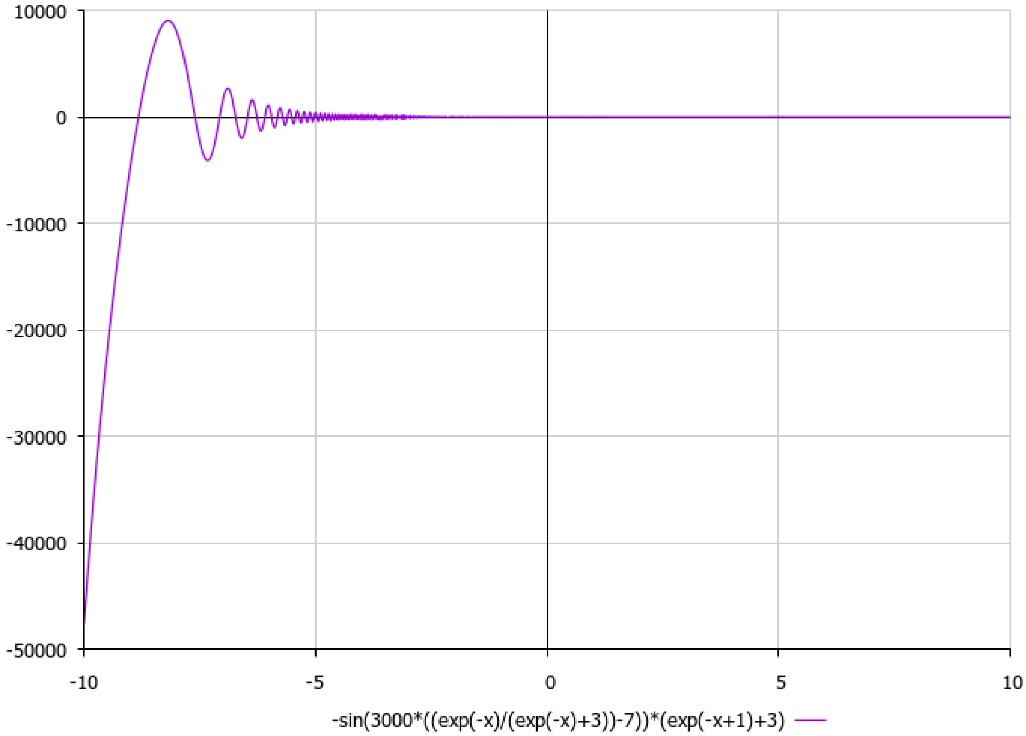


Рис.3. Схематичный график составляющей $u_3$ в зависимости от времени *t*, где

$$u_3 \;=\; \sigma(x,t) = \sin(A(t)\cdot x)\cdot\sigma(t)$$

В параграфе 4.5 делаются резюмирующие замечания по представлению, условиям существования, особенностям, ограничениям и процедуре поиска двух типов предложенных точных решений. Например, поле давления вычисляется через заданное значение постоянной *B* функции *Бернулли* (3), если все компоненты поля скорости уже получены в процессе решения. Также делается замечание о том, что вопрос единственности представленных решений не рассмотрен (выходит за рамки данной диссертации).

Основной акцент в диссертации сделан на развитии аналитических методов для поиска точных течений. При этом выявлен существенно *Риккатиев* (*разрывный*) характер конструируемых решений, не являющийся чем-то новым в механике (контактные разрывы, ударные волны, возникновение кавитации в течении). С физической точки зрения, это означает резкое нарастание амплитуды решения в конечном или счетном числе точек оси времени (данная возможность зависит от начальных и граничных условий задачи):

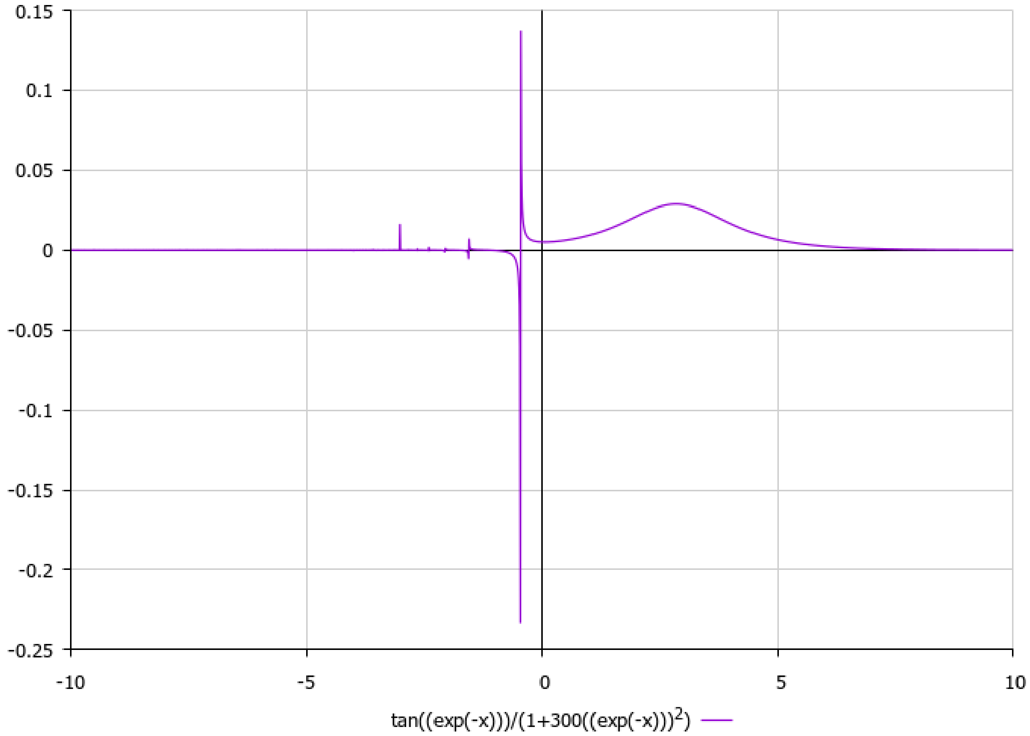


Рис.4. Схематичный график составляющей $U(t)$, пояснение ниже.

На рисунке схематично изображена составляющая точного решения уравнений Навье-Стокса, полученного в работе: а именно, график безвихревой компоненты скорости $U$ в зависимости от времени $t$, в соответствии с выражением для решения (2.17) в диссертации по формулам (9)-(10) (по оси ординат – значения составляющей скорости потока $U$ в зависимости от времени $t$, по оси абсцисс – время $t$).

В **Заключении** диссертационной работы перечислены основные результаты исследований.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Предложен новый метод решения нестационарных уравнений Навье-Стокса для вязких течений несжимаемой жидкости, сохраняющих интеграл или функцию Бернулли для течения во всем пространстве.
2. Получены новые классы точных нестационарных решений, допускаемых уравнениями Навье-Стокса.
3. Получено представление нового точного решения уравнений Навье-Стокса из класса нестационарных *винтовых* течений.
4. Построенный пример *винтовых* течений опровергает как контрпример утверждение о том, что уравнение импульсов Навье-Стокса эквивалентно уравнению эволюции вихря в смысле множества допускаемых решений (уравнение эволюции вихря - результат применения ротации $\nabla$ к обеим частям уравнения импульсов Навье-Стокса; эквивалентность в случае 2D доказана в [4]).

5. Получено новое точное решение уравнений Эйлера (несжимаемая жидкость) в соответствии с новым методом построения нестационарных решений уравнений гидродинамики.
6. Выявлены общие закономерности для всех классов изученных решений, базисом являются особенности общих решений уравнений типа *Риккати* (с финитными областями существования непрерывного решения).

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Голубкин В.Н., Сизых Г.Б. (1987). *О некоторых общих свойствах плоскопараллельных течений вязкой жидкости* // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1987. — № 3. — С. 176–178.
2. Дынникова Г.Я. (2000). *Аналог интегралов Бернулли и Коши-Лагранжа для нестационарного вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости*. Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа, № 1, с. 31-41.
3. Stepanyants Y.A., Yakubovich E.I. (2015). *The Bernoulli Integral for a Certain Class of Non-Stationary Viscous Vortical Flows of Incompressible Fluid*, STUDIES IN APPLIED MATHEMATICS 135:295–309, Wiley Periodicals, Inc., DOI: 10.1111/sapm.12087.
4. Gresho P.M. (1991). Incompessible fluid dynamics: some fundamental formulation issues. Annual Review of Fluid Mechanics. Vol.23, pp 413-453.
5. Ershkov S.V. (2017). *A Riccati-type solution of Euler-Poisson equations of rigid body rotation over the fixed point*. Acta Mechanica, vol. 228, no. 7, pp. 2719–2723.
6. Thambynayagam R.K.M. (2011). *The Diffusion Handbook: Applied Solutions for Engineers*. McGraw-Hill Professional, ISBN 978-0-07-175184-1.


## СПИСОК ОСНОВНЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Статьи в изданиях, рекомендованных ВАК и/или входящих в международные базы цитирования WoS и Scopus:**


1. **Ершков С.В.**, Щенников В.В. (2001). *Об автомодельных решениях системы полных уравнений Навье-Стокса для случая осесимметричных закрученных течений вязкого сжимаемого газа*. Журнал вычислительной математики и математической физики. Т.41. №7. С. 1117-1124.
2. **Ershkov S.V.** (2015). *Quasi-periodic non-stationary solutions of 3D Euler equations for incompressible flow*. Journal of King Saud University – Science, 06, 27(4), 369-374.
3. **Ershkov S.V.** (2015). *Exact solution of Helmholtz equation for the case of non-paraxial Gaussian beams*. Journal of King Saud University – Science, 07, 27(3), 198-203.

4. **Ershkov S.V.** (2015). *On Existence of General Solution of the Navier-Stokes Equations for 3D Non-Stationary Incompressible Flow*. International Journal of Fluid Mechanics Research, 06, 42(3), pp. 206-213. Begell House.
5. **Ershkov S.V.** (2016). *A procedure for the construction of non-stationary Riccati-type flows for incompressible 3D Navier–Stokes equations*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 65, no. 1, pp. 73–85.
6. **Ershkov S.V.** (2016). *Non-stationary Riccati-type flows for incompressible 3D Navier-Stokes equations*. Computers and Mathematics with Applications, vol. 71, no. 7, pp. 1392–1404.
7. **Ershkov S.V.** (2016). *About existence of stationary points for the Arnold-Beltrami-Childress (ABC) flow*. Applied Mathematics and Computation, vol. 276, pp. 379–383.
8. **Ershkov S.V.** (2016). *Non-stationary helical flows for incompressible 3D Navier-Stokes equations*. Applied Mathematics and Computation, vol. 274, pp. 611–614.
9. **Ershkov S.V.** (2017). *Non-stationary creeping flows for incompressible 3D Navier–Stokes equations*. European Journal of Mechanics, B/Fluids, vol. 61(1), pp. 154–159.
10. **Ershkov S.V.**, Shamin R.V. (2018). *A Riccati-type solution of 3D Euler equations for incompressible flow*. Journal of King Saud University - Science, (*in Press*), https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1018364718302349
11. **Ershkov S.V.**, Giniyatullin A.R., and Shamin R.V. (2018). *On a new type of non-stationary helical flows for incompressible 3D Navier-Stokes equations*, Journal of King Saud University – Science (*in Press*), DOI: 10.1016/j.jksus.2018.07.006.

**Тезисы докладов**:

«Conically self-similar solutions of the Maxwell's equations with an electromagnetic field torsion», 3-е совещание по магнитной и плазменной аэродинамике в аэро-космических приложениях. 24-26 апреля 2001, Секция 11, № 74.
3-е совещание по магнитной и плазменной аэродинамике в аэро-космических приложениях. 24-26 апреля 2001. Москва, ОИВТ РАН. С. 377-380.
Соавторы: Быркин А.П. (ЦАГИ), **Ершков С.В.** (ИАП РАН), Щенников В.В. (ИАП РАН).

ЕРШКОВ Сергей Владимирович

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ
ГИДРОДИНАМИКИ С ПОСТОЯННОЙ ФУНКЦИЕЙ БЕРНУЛЛИ

А в т о р е ф е р а т

Подписано в печать ___.___.2018 г.
Формат 60×90 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 1
Тираж 150 экз. Заказ № .

Отпечатано в типографии НГТУ им. Р.Е. Алексеева
603950, г.Н.Новгород, ул.Минина, 24.