На правах рукописи

ПОЗДЯЕВ ВЛАДИМИР ВАСИЛЬЕВИЧ

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Специальность 05.13.01 — «Системный анализ, управление и обработка информации (в науке и промышленности)» по физико-математическим наукам

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Нижний Новгород — 2018 г.

Работа выполнена на кафедре прикладной математики в Арзамасском политехническом институте (филиале) Нижегородского государственного технического университета им. Р. Е. Алексеева.

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, профессор
Пакшин Павел Владимирович.

Официальные оппоненты:

Коган Марк Михайлович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,
кафедра математики, заведующий кафедрой;

Граничин Олег Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
Санкт-Петербургский государственный университет, кафедра системного программирования математико-механического факультета, профессор;

Маликов Александр Иванович,
доктор физико-математических наук, профессор,
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева — КАИ, кафедра автоматики и управления, профессор.

Ведущая организация:

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва.

Защита диссертации состоится 15 ноября 2018 г. в ____ часов в ауд. ____ на заседании диссертационного совета Д212.165.05 при Нижегородском государственном техническом университете им. Р. Е. Алексеева по адресу: 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Нижегородского государственного технического университета им. Р. Е. Алексеева и на сайте http://www.nntu.ru/content/aspirantura-i-doktorantura/dissertacii.

Автореферат разослан «____» ____________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Суркова Анна Сергеевна

Общая характеристика работы

Работа посвящена исследованию полиномиальных матричных неравенств, возникающих в математической теории управления, задачам оптимизации при ограничениях в виде этих неравенств и методам их решения. Особое внимание уделено невыпуклым задачам в задачах анализа устойчивости и вычисления норм 2D-систем, а также в некоторых версиях классических задач.

Актуальность темы обусловлена двумя факторами:

- существует ряд задач теории управления, естественным образом сводящихся к задачам оптимизации с участием полиномиальных — но не линейных — матричных неравенств;
- известные методы решения таких задач имеют слабый баланс характеристик: являются эффективными, но излишне специализированными; универсальными, но плохо масштабируемыми и т. д.

Рассмотрим их подробнее.

Матричные неравенства и задачи оптимизации при ограничениях в виде матричных неравенств составляют один из ключевых математических инструментов современной теории управления. Наиболее изученным и широко применяемым их классом являются линейные матричные неравенства (ЛМН); задачи оптимизации с ограничениями в виде ЛМН и линейными целевыми функциями далее будем называть задачами ЛМН. Методы построения и использования таких задач и родственных им объектов связаны с работами А. М. Ляпунова, В. А. Якубовича и других исследователей; распространённые методы решения — с работами Ю. Е. Нестерова, А. С. Немировского и др. Спектр задач управления, в которых применяются методы, основанные на ЛМН, довольно широк, что нашло отражение в посвящённых данным методам работах Д. В. Баландина, А. А. Бобцова, М. М. Когана, А. И. Маликова, Б. Т. Поляка, М. В. Хлебникова, П. С. Щербакова и др. Однако возможности линейных матричных неравенств ограничены. Следующим по возможностям (и сложности) классом задач можно считать задачи с участием полиномиальных матричных неравенств (ПМН); задачи оптимизации с ограничениями такого вида и полиномиальными целевыми функциями далее будем называть задачами ПМН. В общем случае задачи данного типа невыпуклы, и для их решения необходимы методы глобальной оптимизации.

Из литературы известно, что к задачам, близким по структуре к задачам ПМН, сводятся такие задачи теории управления, как, например, анализ устойчивости, стабилизация и вычисление норм линейных 2D-систем. 2D-системы (и их более общий вариант, nD-системы), представленные, например, в классических работах R. P. Roesser, E. Fornasini, G. Marchesini и современных исследованиях (научная группа П. В. Пакшина, E. Rogers и научная группа университета Саутгемптона, K. Galkowski и научная группа Зеленогурского университета, N. Yeganefar и научная группа университета Пуатье, S. Knorn, R. H. Middleton и др.), имеют фундаментальное значение в решении задач, связанных с такими классами систем и процессов, как системы с распределёнными параметрами, распространение возмущений и др. Особо отметим одно из ключевых приложений теории 2D-систем: управление с итеративным обучением. Модели систем, в которых процессы имеют повторяющуюся природу, встречаются в управлении промышленными роботами, медицинским оборудованием, химическими реакторами и другими объектами самого разного вида. Повторения обычно являются неотъемлемым аспектом функционирования системы, но возможно также и расширение данной концепции на повторяющееся внешнее воздействие. Такие модели включают две описывающие время переменные: номер итерации и время от начала итерации, что и позволяет представлять их как 2D-системы.

Предложенные на данный момент методы решения задач, связанных с такими системами, сводят вычисления к нетривиальным операциям с параметризованными ЛМН или построению эквивалентных задач ЛМН. Последние, представленные в работах G. Chesi, R. H. Middleton и др., формально приводят к необходимым и достаточным условиям устойчивости, возможности находить точные значения норм и т. д. Но практическая полезность данных методов не очень высока ввиду их склонности порождать вспомогательные задачи ЛМН большого размера. Версии же данных результатов, требующие меньших вычислительных мощностей, являются существенно более ограниченными и консервативными. В связи с этим представляется актуальным исследование иных подходов к данным задачам, таких как поиск альтернативных форм на основе ПМН и разработка эффективных способов решения полученных задач, обладающих лучшей масштабируемостью и аналогичной или более высокой точностью результатов.

Дополнительной мотивацией исследований является то, что задачи аналогичного вида возникают и при работе с системами других типов, например, системами с параметрической неопределённостью с полиномиальной зависимостью коэффициентов системы от параметров и ограничениями на значения параметров в виде ПМН.

На данный момент для задач оптимизации с участием ПМН разработаны различные алгоритмы решения, в том числе универсальные алгоритмы, формально способные решать задачи с ПМН произвольной структуры. В частности, такие алгоритмы рассматриваются в работах J.-B. Lasserre и D. Henrion. Также в ряде случаев возможно применение иных подходов или их элементов, связанных, например, с рандомизированным поиском (см. работы О. Н. Граничина и соавторов), или алгоритмов, ориентированных на высокопараллельные вычисления (работы Р. Г. Стронгина, В. П. Гергеля и др.). Однако, независимо от подхода, универсальные алгоритмы сталкиваются с труднопреодолимой проблемой объёма вычислений. Ввиду NP-трудности рассматриваемого класса задач, такие алгоритмы, не учитывающие происхождение задачи и её индивидуальные свойства, способны работать только с задачами относительно небольшого размера.

Как показывает практика, невыпуклые задачи ПМН, происходящие из теории управления, обычно имеют «умеренную» невыпуклость, не приводящую к таким эффектам, как, например, экспоненциальный рост количества локальных экстремумов при увеличении размера задачи. Вследствие этого дополнительным актуальным направлением исследований является поиск метода решения задач ПМН, наследующего ключевые характеристики универсальных методов и при этом имеющего более высокую эффективность для структур области поиска, характерных для задач теории управления.

Таким образом, основной мотивацией исследований является низкая эффективность и слабая масштабируемость существующих методов решения задач указанного вида, а фундаментальной задачей — улучшение данных характеристик путём разработки методов решения, специализирующихся на задачах ПМН, связанных с теорией управления.

Цель работы заключается в формировании новой концепции решения класса задач теории управления, сводящихся к исследованию параметризованных матричных неравенств, на основе приведения их к универсальной форме задач ПМН.

Задачи исследования включают разработку следующей группы методов.

1. Метод решения задач ПМН, ориентированный на эффективную работу с характером невыпуклости, типичным для задач ПМН, возникающих в теории управления. Метод должен удовлетворять следующим базовым требованиям:

    а) он должен позволять упрощать вычисления и уменьшать их объём в случае, когда есть априорная информация о более простом характере невыпуклости задачи;

    б) его базовая (полная) форма должна быть (в определённом смысле) эквивалентна одному из универсальных глобальных методов решения задач ПМН;

    в) его минимальная форма должна быть (в определённом смысле) эквивалентна локальному поиску методом внутренней точки и иметь аналогичную вычислительную сложность;

г) будучи применена к задачам ЛМН, его минимальная форма должна быть эквивалентна какому-либо из стандартных методов решения задач данного класса.

2. Методы решения задач анализа динамических систем, по возможности ориентированные на использование единой промежуточной формы задач ПМН:

   а) метод решения задач об устойчивости 2D-систем;
   б) метод решения задач о нахождении $\mathcal{H}_\infty$-нормы 2D-систем;
   в) метод решения задач о нахождении $\mathcal{H}_2$-нормы 2D-систем;
   г) методы решения аналогичных задач для систем с параметрической неопределённостью.

Методы исследования, применяемые в работе, относятся к теории дифференциальных уравнений; математической теории управления; теории устойчивости; линейной алгебре; методам выпуклой и невыпуклой оптимизации, полуопределённого программирования; теории матричных неравенств; теории интегральных преобразований.

Научная новизна результатов диссертации заключается в создании концепции решения параметризованных матричных неравенств путём их трансформации к промежуточной универсальной форме задач ПМН с помощью построения двойственных форм подзадач, и дальнейшей трансформации пространства поиска в полученных задачах с целью приведения их к форме, допускающей эффективное решение. В рамках данной концепции разработана следующая группа методов.

1. Метод оптимизации, спроектированный для эффективного решения задач ПМН, связанных с теорией управления. Метод занимает промежуточное положение между локальными и глобальными методами и позволяет контролировать полноту исследования области поиска. Он предоставляет улучшенный баланс эффективности и универсальности по сравнению с другими существующими методами.

2. Методы анализа динамических систем, использующие сведение к единой форме задач ПМН в сочетании с вышеуказанным методом оптимизации. Данные методы обладают улучшенной масштабируемостью по сравнению с существующими аналогами:

   - метод анализа устойчивости 2D-систем;
   - метод нахождения $\mathcal{H}_\infty$-нормы 2D-систем;
   - методы анализа устойчивости и вычисления $\mathcal{H}_\infty$- и $\mathcal{H}_2$-норм систем с параметрической неопределённостью.

3. Получены результаты, связанные с тематикой работы и отдельными элементами общей концепции, но в целом использующие существенно иные методы решения:
   - упрощённый метод вычисления $\mathcal{H}_2$-норм 2D-систем;
   - критерии разрешимости задачи о существовании общей квадратичной функции Ляпунова множества линейных систем.

Преимуществами разработанных методов перед существующими аналогами являются более простые преобразования задач и значительно улучшенная эффективность метода решения и его масштабируемость при росте количественных характеристик задачи. Например, даже для систем небольшого размера решение задач из п. 2 существующими методами требует многоэтапных преобразований к форме ЛМН с числом неизвестных от сотен до десятков тысяч. В то же время предложенный метод позволяет сразу сформировать задачу ПМН с числом неизвестных около десяти[1] и решить её довольно эффективным способом (см. примеры в тексте диссертации, параграфы 4.2.2, 4.2.3.1, 4.2.3.2).

Кроме того, улучшены специфичные для конкретных задач особенности: например, при поиске $\mathcal{H}_2$-нормы 2D-системы вычисляется не верхняя граница (довольно неточная), как в существующих результатах, а непосредственно точное значение данной величины (параграф 4.2.3.3 в тексте диссертации). При этом общий объём вычислений значительно меньше.

Практическая ценность. Полученные в диссертационной работе результаты могут использоваться при решении перечисленных выше задач теории управления, а также в иных задачах, сводимых к оптимизационным задачам с участием систем матричных неравенств с аналогичным характером невыпуклости. Представленный подход и полученные результаты могут служить основой для дальнейшего развития методов применения ПМН в задачах теории управления, трансформационных методов оптимизации и нахождения ещё более эффективных вычислительных схем.

Достоверность и обоснованность положений диссертационной работы подтверждается строгим математическим выводом полученных формул и уравнений и доказательством лемм и теорем.

Личным вкладом соискателя в диссертации и публикациях являются формирование общей концепции решения рассматриваемых задач; формулирование и доказательство теоретических результатов; разработка программного обеспечения, реализующего и иллюстрирующего данные результаты. Все новые результаты опубликованы в работах без соавторов.

---

[1] При использовании предложенного метода это число умножается на количество т. н. атомов, но порядок величины остаётся тем же.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на 14-й международной конференции IEEE «Методы и модели в автоматике и робототехнике» MMAR-2009 (Мендзыздрое, Польша, 2009); XI международном семинаре им. Е. С. Пятницкого «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2010); международной конференции «Моделирование, управление и устойчивость» MCS-2012 (Севастополь, Украина, 2012); XIX международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» ИСТ-2013 (Нижний Новгород, 2013); XX международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» ИСТ-2014 (Нижний Новгород, 2014); XII всероссийском совещании по проблемам управления ВСПУ-2014 (Москва, 2014); XI всероссийской школе-конференции молодых ученых «Управление большими системами» УБС-2014 (Арзамас, 2014); XXI международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии» ИСТ-2015 (Нижний Новгород, 2015); 1-й международной конференции IFAC «Моделирование, идентификация и управление нелинейными системами» MICNON-2015 (Санкт-Петербург, 2015); 8-м симпозиуме IFAC «Проектирование робастного управления» ROCOND-2015 (Братислава, Словакия, 2015); 12-м международном семинаре IFAC «Адаптация и обучение в управлении и обработке сигналов» ALCOSP-2016 (Эйндховен, Нидерланды, 2016); 21-й международной конференции IEEE «Методы и модели в автоматике и робототехнике» MMAR-2016 (Мендзыздрое, Польша, 2016); 20-м международном конгрессе IFAC (Тулуза, Франция, 2017).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 25 работ, в том числе: 16 статей в изданиях из перечня ВАК РФ (14 из них опубликовано в изданиях, входящих в Web of Science и/или Scopus напрямую или в виде переводов), две зарегистрированные программы для ЭВМ.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы, включающего 127 наименований, и приложения. Основная часть работы изложена на 179 страницах, содержит 34 иллюстрации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 07-01-92166, № 08-01-97036, № 10-08-00843, № 12-08-31440 (руководство), № 13-08-01092) и Минобрнауки РФ (проект № 2.1748.2014/К).

На защиту выносятся

- Новая концепция решения задач теории управления, сводящихся к параметризованным матричным неравенствам, путём их трансформации к универсальной форме задач ПМН.

- Разработанная в рамках концепции группа методов:
  - новый метод решения задач ПМН;
  - методы преобразования к форме ПМН задач анализа устойчивости и вычисления $\mathcal{H}_\infty$-норм 2D-систем;
  - методы преобразования к форме ПМН задач анализа устойчивости и вычисления $\mathcal{H}_\infty$- и $\mathcal{H}_2$-норм систем с параметрической неопределённостью.
- Методы, связанные с тематикой работы и воплощающие отдельные элементы предложенной концепции: упрощённый метод вычисления $\mathcal{H}_2$-нормы 2D-систем; критерии разрешимости задачи о существовании общей квадратичной функции Ляпунова множества линейных систем.

Основное содержание работы

Во **введении** описывается основная проблематика работы, обосновывается её актуальность, формулируются цели и задачи исследования, научная новизна, практическая ценность, положения, выносимые на защиту.

В **первой главе** приведены сведения о 2D-системах как ключевом виде динамических систем, рассматриваемых в диссертации. Описаны их основные модели и связь между задачами анализа 2D-систем и матричными неравенствами различного вида.

Приведён обзор роли линейных и нелинейных матричных неравенств в теории управления и методов решения задач с их участием. Представлены примеры задач, сводимых к данным формам.

Отмечено, что задачи ПМН могут также возникать в существенно иных областях (например, теории графов или поиске на битовых строках); при этом характер их невыпуклости может существенно отличаться. Задачи такого вида в диссертации не рассматриваются.

Охарактеризованы типы методов решения задач ПМН (глобальные или локальные, универсальные или специализирующиеся на отдельных видах задач и т. д.). Существование такого спектра методов решения обусловлено тем, что задачи ПМН в общем случае являются NP-трудными, а следовательно, универсальность метода решения и его эффективность несовместимы. Указан метод решения задач ПМН, являющийся основой для дальнейших построений в диссертации. Он основан на конструировании т. н. иерархий ЛМН-релаксаций и с их помощью позволяет находить глобальные экстремумы задач ПМН. Данный метод относится к категории универсальных, в силу чего его эффективность имеет приемлемый уровень лишь для задач небольшого размера: в противном случае размеры вспомогательных задач (ЛМН-релаксаций) имеют тенденцию становиться недопустимо большими.

Приведены сведения о классе задач, тесно связанных с задачами ПМН: задачах о неотрицательных полиномах, в частности, полиномах, представимых в виде сумм квадратов. (Данная связь обусловлена тем, что такие полиномы являются ключевым элементом задач, двойственных к ЛМН-релаксациям задач ПМН.) Такие задачи возникают, например, при анализе 2D-систем. Так же, как и для задач ПМН, численные методы их решения могут вызывать трудности из-за большого размера вспомогательных задач.

Представлена стоящая за ключевыми результатами, полученными в диссертации, концепция систематической трансформации формального представления задач[2], включающей два этапа:

- построение двойственных форм подзадач с целью приведения задачи к универсальной форме задач ПМН;
- преобразование полученных задач ПМН к виду, позволяющему, с учётом характера их невыпуклости, в значительной мере контролировать необходимый для их решения объём вычислений.

Описана структура групп методов, реализующих данную концепцию и изложенных в двух последующих главах.

Во **второй главе** описаны методы оптимизации, предназначенные для решения рассматриваемых в диссертации задач ПМН. Основные публикации, содержащие материалы данной главы: [4–6; 13; 15; 16].

В первом параграфе представлена общая форма задач. Задачи ПМН имеют вид

$$\begin{aligned} & f^* = \min f(x), \\ & G_i(x) \geqslant 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{1}$$

где $f(x)$ — полином от x, $G_i(x)$ — матрицы, элементы которых являются полиномами от x, а знак неравенства понимается как требование положительной полуопределённости. Множество x, удовлетворяющих всем ограничениям $G_i(x) \geqslant 0$, будем называть областью поиска или допустимой областью. Данная задача также имеет структурно более простой вариант,

[2]Как указывалось ранее, основной интерес в контексте данных исследований представляют задачи анализа 2D-систем и систем с параметрической неопределённостью.

использующий скалярные полиномиальные неравенства (ПН):

$$\begin{aligned}&f^* = \min_x f(x),\\ &g_i(x) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m,\\ &x \in \mathbb{R}^n,\end{aligned} \tag{2}$$

где $g_i(x)$ — (не обязательно выпуклые) полиномы. Далее систему таких неравенств $g_i(x)$ и саму данную задачу мы будем называть, соответственно, системой и задачей ПН. Данные представления могут быть сведены друг к другу. Тем не менее, если при формализации задачи естественным образом возникают ПМН, то работа с ними напрямую (без сведения к ПН) может существенно упростить вычисления.

Охарактеризован базовый метод глобальной оптимизации, предложенный в работах J.-B. Lasserre и D. Henrion, от которого отталкиваются дальнейшие построения.

Во втором параграфе данный базовый метод рассмотрен более детально. Его основным элементом являются т. н. иерархии ЛМН-релаксаций задач ПН и ПМН в пространстве моментов переменных. ЛМН-релаксации задач ПМН (для задач ПН формулы аналогичны) в данном контексте представляют собой задачи следующего вида:

$$\begin{aligned}&f^* = \min_y \sum_i f_i y_i,\\ &M_k(y) \geqslant 0,\\ &M_{k-d_i}(G_i, y) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m,\\ &y_1 = 1,\end{aligned} \tag{3}$$

где $k \in \mathbb{N}$ (такое, что все $k - d_i \geqslant 0$) — порядок релаксации; $d_i = \lceil \frac{1}{2} \deg G_i(x) \rceil$; вектор неизвестных $y = \int b_{2k}(x)\,\mathrm{d}\mu$ интерпретируется как вектор моментов некоторой неизвестной меры μ; $b_r(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, — базис пространства полиномов степени не выше r:

$$b_r(x) = [1\ x_1\ x_2\ \ldots\ x_n\ x_1^2\ x_1x_2\ \ldots\ x_n^2\ \ldots\ x_1^r\ \ldots\ x_n^r]^{\mathrm{T}};$$

вектор $[f_i]_i$ — представление $f(x)$ в базисе $b_{2k}(x)$: $f(x) \equiv \sum_i (b_{2k}(x))_i f_i$. Матрицы $M_k(y)$ и $M_{k-d_i}(G_i, y)$ — т. н. «матрица моментов» и «локализующие матрицы», конструируемые исходя из соотношений

$$M_k(y) \equiv \int b_k(x) b_k(x)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}\mu,$$

$$M_{k-d}(G, y) \equiv \int \left(b_{k-d}(x) b_{k-d}(x)^{\mathrm{T}}\right) \otimes G(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Из решения ЛМН-релаксации достаточно высокого порядка возможно извлечение положений т. н. «атомов» соответствующей меры μ, которые представляют собой искомые глобальные экстремумы. Данный метод имеет высокую степень универсальности, но его эффективность и практическая полезность довольно низки ввиду следующих недостатков.

- Комбинаторный взрыв размера задачи, следующий из характера роста размерности $b_r(x)$: даже ЛМН-релаксация начального порядка относительно небольшой задачи ПМН может иметь количество неизвестных, не позволяющее решать её напрямую.
- Максимальный порядок моментов, задействованных в ЛМН-релаксации, растет вместе с её номером, равно как и со степенью полиномов в исходной системе ПМН. При этом ухудшается обусловленность матриц, составляющих ЛМН-релаксации, что отрицательно влияет на точность решения.

В третьем параграфе предложен метод оптимизации, основанный на аналогичной базовой структуре релаксаций, но при этом преобразованный к форме, позволяющей значительно сократить вычислительную сложность алгоритма решения.

В решении задачи исходным методом участвуют три различных пространства:

- исходное пространство поиска ($\mathbb{R}^n$);
- пространство моментов порядка до $2k$ ($\mathbb{R}^{s_n(2k)}$), где $s_n(r) = C_{n+r}^r = \frac{(n+r)!}{n!r!}$ — размерность $b_r(x)$;
- пространство атомов, элементами которого являются кортежи из r пар «вектор исходного пространства; его вес» ($\mathbb{R}^{r\times(n+1)}$).

В настоящей диссертационной работе предлагается исключить из процедуры решения выход в промежуточное пространство моментов. Для этого необходимо сформулировать (и решить) *напрямую в пространстве атомов* вспомогательную задачу оптимизации, в определённом смысле эквивалентную ЛМН-релаксации (3). При этом мы отказываемся от ЛМН-представления исходной задачи, заменяя его на структуру, объединяющую непосредственно элементы (1) или (2) в рамках одной целевой функции, минимум которой находится с помощью модифицированного метода Ньютона.

Запишем задачу ЛМН (3) в более общем виде:

$$
\begin{aligned}
&f^* = \min_y c^{\mathrm{T}} y,\\
&F(y) = \sum_i F_i y_i \geqslant 0, \qquad (4)\\
&y_1 = 1,
\end{aligned}
$$

где вектор c состоит из f_i, а $F(y) = \mathrm{diag}(M_k(y), M_{k-d_1}(g_1, y), \ldots, M_{k-d_m}(g_m, y))$. Для её решения воспользуемся одним из простейших вариантов метода внутренней точки в прямой форме с ньютоновским направлением поиска и вспомогательными подзадачами вида

$$\begin{aligned} f^* &= \min_y f^{(i)}(y), \\ \nu_y^{\mathrm{T}} y &= \nu_y^{\mathrm{T}} y^{(0)}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots$ — номер итерации, $y^{(0)}$ — начальное приближение, $\nu_y = [1\ 0\ 0\ \ldots\ 0]^{\mathrm{T}}$, $f^{(i)}(y) = c^{\mathrm{T}} y - \mu^{(i)} \log\det F(y)$, и $\{\mu^{(i)}\}$ — монотонно невозрастающая сходящаяся к 0 вещественная последовательность.

Пусть теперь y является гладкой функцией вектора x той же размерности: $y = y(x)$, матрица Якоби J с элементами $J_{ij} = \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x_j}$ невырождена, и (конечные) минимумы $f^{(i)}(y)$ и $f^{(i)}(y(x))$ существуют. Для малых значений t имеем:

$$y_i(x + t\,\Delta x) = y_i(x) + (J\,\Delta x)_i t + o(t).$$

Таким образом, движение от точки x в направлении Δx эквивалентно в малом движению от $y(x)$ в направлении $\Delta y = J\,\Delta x$. Построим алгоритм поиска экстремумов семейства функций $f^{(i)}(y(x))$ в пространстве векторов x, повторяющий вышеупомянутый метод внутренней точки, в котором

- начальным приближением является вектор $x^{(0)}$ такой, что $y(x^{(0)}) = y^{(0)}$;
- направление спуска выбирается как $\Delta x = \Delta x(x) = J^{-1}\Delta y(y(x))$, где $\Delta y(y)$ — направление спуска, которое было бы использовано в оригинальном методе внутренней точки применительно к текущей аппроксимации решения y.

Данный алгоритм мы будем называть эквивалентным исходному алгоритму в контексте трансформации $y = y(x)$. В настоящей главе показано, что, в дополнение к вычислению $f^{(i)}(y(x))$ как функции от x, вектор y можно также исключить из функции $\Delta x(x) = J^{-1}\Delta y(y(x))$, а следовательно, и из нового алгоритма в целом.

Отдельно отметим связь между производными целевых функций по x и по y: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(i)} = J^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{(i)}$. Отсюда следует, что экстремум $x^{*(i)}$ трансформированной вспомогательной целевой функции $f^{(i)}(y(x))$ (в котором $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(i)}(y(x^{*(i)})) = 0$) необходимо соответствует экстремуму $y^{*(i)} = y(x^{*(i)})$ вспомогательной целевой функции $f^{(i)}(y)$ (поскольку в силу невырожденности J необходимо имеем $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{(i)}(y^{*(i)}) = 0$). Иными словами, любой экстремум трансформированной функции $f^{(i)}(y(x))$, в котором может стабилизироваться процесс поиска, является корректным, а их последовательность, соответственно, сходится к корректному (глобальному) решению задачи. Это верно *для любого допустимого начального приближения* — в том числе и тогда, когда область поиска в исходной задаче (2) несвязна, а решение задачи и выбранное в качестве начального приближения множество атомов находятся в разных компонентах связности.

Ввиду того, что в (4) присутствует дополнительное ограничение в виде равенства, классическая формула из метода Ньютона должна быть несколько изменена.

Лемма 1. *Пусть в задаче оптимизации*

$$\begin{aligned}
&f^* = \min_x f(x),\\
&f(x) = (x - x_0)^{\mathrm{T}} A (x - x_0) + b^{\mathrm{T}}(x - x_0) + c,\\
&\nu^{\mathrm{T}} x = \nu^{\mathrm{T}} x_0,
\end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $x, x_0, b, \nu \in \mathbb{R}^n$; $c \in \mathbb{R}$, *выполняются соотношения* $b, \nu \in \operatorname{col} A + A^{\mathrm{T}}$; $A + A^{\mathrm{T}} \geqslant 0$. *Тогда вектор* Δx, *который необходимо прибавить к* x_0, *чтобы попасть в точку минимума (одну из возможных, если* $\det A + A^{\mathrm{T}} = 0$*), равен*

$$\Delta x = H^- \left(-g + \frac{\nu^{\mathrm{T}} H^- g}{\nu^{\mathrm{T}} H^- \nu} \nu \right),$$

где $g = \nabla f(x_0) = b$, $H = \nabla^2 f(x_0) = A + A^{\mathrm{T}}$, H^- *— произвольная*[3] *обобщённая обратная к* H *матрица.*

Влияние трансформации $y = y(x)$ на градиенты и гессианы вспомогательных целевых функций $f = f^{(i)}$ представлено следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть* $x \in \mathbb{R}^n$, $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *и функции* $y(x)$ *и* $f(y)$ *достаточное количество раз дифференцируемы. Тогда*

$$\begin{aligned}
&g_x = J^{\mathrm{T}} g_y,\\
&H_x = J^{\mathrm{T}} H_y J + H_x^y,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&g_x = \nabla_x f, \quad H_x = \nabla_x^2 f, \quad H_x^y = \sum_k \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y_k} \left(\nabla_x^2 y_k \right),\\
&g_y = \nabla_y f, \quad H_y = \nabla_y^2 f,\\
&J = \left[\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x_j} \right]_{ij},
\end{aligned}$$

[3]Свободно выбирается из множества обобщённых обратных матриц при первом упоминании. Все дальнейшие вхождения этой матрицы имеют то же значение.

∇ и ∇^2 с нижними индексами — полные градиент и матрица Гессе по соответствующим переменным:

$$\nabla_p q \equiv \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p_i} q\right]_i, \quad \nabla_p^2 q \equiv \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p_i\, \mathrm{d}p_j} q\right]_{ij},$$

и функции в правых частях вычисляются в точках x (для $y(x)$, $f(y(x))$ и их производных) и $y(x)$ (для $f(y)$ и её производных).

Направление спуска в трансформированном методе описывается следующей теоремой (мы продолжаем использовать обозначения из леммы 2).

Теорема 1. *Пусть в точке $y = y(x)$ выполняются соотношения $g_y, \nu_y \in \operatorname{col} H_y$; $H_y \geqslant 0$; $\det J \neq 0$. Тогда направление поиска Δx в алгоритме, эквивалентном методу внутренней точки в прямой форме с ньютоновским направлением поиска в контексте трансформации $y = y(x)$, применительно к* (5) *имеет следующий вид:*

$$\Delta x = \widetilde{H}_x^- \left(-g_x + \frac{\nu_x^{\mathrm{T}} \widetilde{H}_x^- g_x}{\nu_x^{\mathrm{T}} \widetilde{H}_x^- \nu_x} \nu_x \right),$$

где $\widetilde{H}_x = H_x - H_x^y$; $\widetilde{H}_x^-$ — обобщённая обратная к $\widetilde{H}_x$ матрица; $\nu_x = J^{\mathrm{T}} \nu_y$; градиент g_x и модифицированный гессиан $\widetilde{H}_x$ вычисляются в текущей точке x.

Для исключения y из итоговой формулы используется следующее дополнительное соотношение.

Теорема 2. *Для функции f вида $f(y) = \log\det F(y)$, где $F(y)$ линейно зависит от y, поправка в модифицированном гессиане $\widetilde{H}_x$ из теоремы 1 равна*

$$H_x^y = \sum_k \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y_k} (\nabla_x^2 y_k) = \sum_{i,j} F_{ij}^{-\mathrm{T}} (\nabla_x^2 F_{ij}),$$

где $F_{ij} = F(y(x))_{ij}$ и $F_{ij}^{-\mathrm{T}} = F(y(x))_{ij}^{-\mathrm{T}}$ — соответствующие элементы матриц F и $F^{-\mathrm{T}}$ (суммирование производится по всем допустимым значениям индексов).

В четвёртом параграфе рассматривается применение полученного метода к базовому случаю: задачам одномерной оптимизации в форме ПН. Преобразуем задачу такого вида к эквивалентной форме в пространстве атомов.

А именно, для атомов x_i, $i = 1, 2, \dots, r$, и их весов p_i введём векторное пространство атомов с элементами вида

$$z = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r & p_1 & p_2 & \dots & p_r \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{r \times (n+1)} = \mathbb{R}^{2r}.$$

Нелинейная трансформация пространства поиска, применяемая к ЛМН-релаксациям, имеет вид

$$y = y(z) = \sum_{i=1}^{r} p_i b_{2k}(x_i).$$

Для обеспечения равенства размерностей вводится ограничение $r = k + 1$. Введены дополнительные обозначения:

- для множества s и натурального числа n обозначим как $\mathbb{C}_s^n$ множество n-элементных подмножеств s; пусть также $\mathbb{C}_{[r]}^n = \mathbb{C}_{\{1,2,\dots,r\}}^n$;
- для конечного числового множества s обозначим как s_i его i-й наименьший элемент: s_1 — минимальный элемент s, s_2 — следующий по величине и т. д.

Показано, что в этом случае ν_z (аналог ν_x из теоремы 1) равен $\nu_z = [0\ 0\ \dots\ 0\ 1\ 1\ \dots\ 1]^{\mathrm{T}}$, а также выполняются следующие соотношения.

Теорема 3. *Якобиан функции $y(z)$ равен*

$$\det J(z) = (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \left(\prod_{i=1}^{r} p_i \right) \left(\prod_{i \in \mathbb{C}_{[r]}^2} (x_{i_2} - x_{i_1})^4 \right)$$

(для $r = 1$ последнее произведение считаем равным 1).

Теорема 4. *Локализующая матрица $M_{k-d}(g, y(z))$ равна*

$$M_{k-d} = \sum_{i=1}^{r} p_i b_{k-d}(x_i) b_{k-d}(x_i)^{\mathrm{T}} g(x_i).$$

Теорема 5. *Определитель матрицы $M_{k-d}(g, y(z))$ имеет вид*

$$\det M_{k-d} = \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{D}_s,$$

где $\mathcal{S} = \mathbb{C}_{[r]}^{r-d}$, и

$$\mathcal{D}_s = \left(\prod_{i \in s} p_i g(x_i) \right) \left(\prod_{i \in \mathbb{C}_s^2} (x_{i_2} - x_{i_1})^2 \right).$$

Теорема 6. *С учётом обозначений предыдущей теоремы, градиент* $\log\det M_{k-d}(g, y(z))$ *может быть представлен как*

$$\nabla_z \log\det M_{k-d} = \frac{g_z}{\det M_{k-d}},$$

где

$$g_z = \nabla_z \det M_{k-d} = \sum_{s\in\mathcal{S}} \left(\nabla_z \log \mathcal{D}_s\right) \mathcal{D}_s,$$

а ненулевые элементы $\nabla_z \log \mathcal{D}_s$ *имеют вид*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} \log \mathcal{D}_s = \frac{g'(x_i)}{g(x_i)} + \left(\sum_{j\in s\setminus\{i\}} \frac{2}{x_i - x_j}\right), \quad i \in s;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p_i} \log \mathcal{D}_s = \frac{1}{p_i}, \quad i \in s.$$

Теорема 7. *С учётом обозначений предыдущей теоремы, матрица Гессе* $\log\det M_{k-d}(g, y(z))$ *может быть представлена как*

$$\nabla_z^2 \log\det M_{k-d} = \frac{H_z}{\det M_{k-d}} - \frac{g_z g_z^{\mathrm{T}}}{(\det M_{k-d})^2},$$

где

$$H_z = \nabla_z^2 \det M_{k-d} = \sum_{s\in\mathcal{S}} \left(\nabla_z^2 \log \mathcal{D}_s + (\nabla_z \log \mathcal{D}_s)(\nabla_z \log \mathcal{D}_s)^{\mathrm{T}}\right) \mathcal{D}_s,$$

а ненулевые элементы $\nabla_z^2 \log \mathcal{D}_s$ *имеют вид*

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j} \log \mathcal{D}_s = \frac{g''(x_i)}{g(x_i)} - \left(\frac{g'(x_i)}{g(x_i)}\right)^2 - \left(\sum_{k\in s\setminus\{i\}} \frac{2}{(x_i - x_k)^2}\right), \quad \{i,j\} \subset s,\ i = j;$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j} \log \mathcal{D}_s = \frac{2}{(x_i - x_j)^2}, \quad \{i,j\} \subset s,\ i \neq j;$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p_i\,\mathrm{d}p_j} \log \mathcal{D}_s = -\frac{1}{p_i^2}, \quad \{i,j\} \subset s,\ i = j.$$

При этом матрица моментов $M_k(y)$ может формально рассматриваться как локализующая матрица $M_{k-d_0}(g_0, y)$, где $g_0(x) = 1$, $d_0 = 0$. Кроме того, в силу структуры $F(y)$,

$$\log\det F(y) = \log\det M_k(y) + \sum_{i=1}^{m} \log\det M_{k-d_i}(g_i, y),$$

так что

$$f^{(i)}(y) = c^{\mathrm{T}}y - \mu^{(i)} \left(\log\det M_k(y) + \sum_{i=1}^{m} \log\det M_{k-d_i}(g_i, y) \right),$$

и величины g_z и $\widetilde{H}_z$, из которых с помощью теоремы 1 находится $\Delta z(z)$, равны значениям следующих функций в точке z:

$$g_z = \nabla_z f^{(i)} = \nabla_z f - \mu^{(i)} \left(\nabla_z \log\det M_k + \sum_{i=1}^{m} \nabla_z \log\det M_{k-d_i}(g_i, y) \right),$$
$$\widetilde{H}_z = \widetilde{\nabla}_z^2 f^{(i)} = -\mu^{(i)} \left(\widetilde{\nabla}_z^2 \log\det M_k + \sum_{i=1}^{m} \widetilde{\nabla}_z^2 \log\det M_{k-d_i}(g_i, y) \right),$$

где $\widetilde{\nabla}_z^2 = \nabla_z^2 - \sum_i (\nabla_z^2 y_i) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_i}$. Чтобы вычислить правые части, необходимо вычислить сами матрицы $M_{k-d_i}(g_i, y(z))$, матрицы Гессе их элементов (в соответствии с теоремой 2), а также $\nabla_z \log\det M_{k-d_i}(g_i, y)$ и $\nabla_z^2 \log\det M_{k-d_i}(g_i, y)$.

Из структуры полученных формул сделан вывод о возможности их редукции: обобщения на случай $r < k+1$. Итоговая версия трансформированной задачи, таким образом, совместима с конфигурациями с $r \leqslant k+1$ и имеет вид

$$f^* = \min_z \sum_{j=1}^{r} p_j f(x_j),$$
$$F_0(z) = \sum_{j=1}^{r} p_j \left(b_k(x_j) b_k(x_j)^{\mathrm{T}} \right) \geqslant 0,$$
$$F_i(z) = \sum_{j=1}^{r} p_j \left(b_{k-d_i}(x_j) b_{k-d_i}(x_j)^{\mathrm{T}} \right) g_i(x_j) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$\nu_z^{\mathrm{T}} z = \sum_{j=1}^{r} p_j = 1.$$

Показано, что итоговые формулы для градиентов и модифицированных матриц Гессе, используемых для вычисления направления спуска, могут быть представлены в следующем виде.

Теорема 8. *Пусть $F = F(x)$ — симметричная вещественная матрица с дважды дифференцируемыми по x элементами, и $F(x_0) > 0$. Пусть*[4]

$$\begin{aligned} &g_x = \nabla \log\det F(x_0),\\ &\widetilde{H}_x = H_x - H_x^y, \quad H_x = \nabla^2 \log\det F(x_0), \quad H_x^y = \sum_{i,j} F_{ij}^{-\mathrm{T}}(x_0)(\nabla^2 F_{ij}(x_0)). \end{aligned}$$

Тогда $\widetilde{H}_x \leqslant 0$, и

$$\begin{aligned} (g_x)_i &= \operatorname{tr}\left(F^{-1}(x_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}F(x_0)\right)\right),\\ (\widetilde{H}_x)_{ij} &= -\operatorname{tr}\left(F^{-1}(x_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i}F(x_0)\right)F^{-1}(x_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}F(x_0)\right)\right). \end{aligned}$$

В пятом параграфе приведено обобщение данных результатов на многомерные задачи ПМН. Отмечено, что, ввиду требований к вычислительной сложности, построение метода, эквивалентного полным иерархиям ЛМН-релаксаций, нецелесообразно; по этой причине рассматриваются только редуцированные методы.

Пространство атомов здесь представлено элементами вида ($x_i \in \mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned} z = {}&\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} & x_{21} & \ldots & x_{rn} & p_1 & p_2 & \ldots & p_r \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \\ &= \begin{bmatrix} x_1^{\mathrm{T}} & x_2^{\mathrm{T}} & \ldots & x_r^{\mathrm{T}} & p_1 & p_2 & \ldots & p_r \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{r\times(n+1)}; \end{aligned}$$

локализующие матрицы имеют вид

$$F_i(z) = \sum_{j=1}^{r} p_j \left(b_{k-d_i}(x_j) b_{k-d_i}(x_j)^{\mathrm{T}}\right) \otimes G_i(x_j).$$

На основе формул для определителя $F_i(z)$ (теорема 9 в тексте диссертации) делается вывод о минимальных порядках ЛМН-релаксаций, которые целесообразно использовать: $k = 1$, $d_0 = 0$ (для матрицы моментов), $d_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Приведены несколько вариантов трансформированной задачи,

[4] Несмотря на использование введённого ранее обозначения H_x^y, вектор y не фигурирует ни в формулировке, ни в доказательстве данной теоремы.

из которых наиболее общий вариант имеет вид

$$
\begin{aligned}
&f^* = \min_z \sum_{j=1}^{r} p_j f(x_j),\\
&\overline{F}_0 = M_0'^{\mathrm{T}} V \operatorname{diag}(p_1, p_2, \ldots, p_r) V^{\mathrm{T}} M_0' \geqslant 0,\\
&F_i = \sum_{j=1}^{r} p_j G_i(x_j) \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m,\\
&\overline{F}_{ij} = p_j G_i(x_j) + \lambda I \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, r,\\
&\sum_{j=1}^{r} p_j = 1,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где $V \in \mathbb{R}^{(n+1)\times r}$ — n-D матрица Вандермонда порядка 1 для векторов x_i:

$$
V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{r1} \\ x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{rn} \end{bmatrix};
$$

$M_0' = \operatorname{diag}([1], M_0)$, где $M_0 \in \mathbb{R}^{n\times(r-1)}$ — матрица, чьи столбцы образуют произвольный ортонормированный базис $(r-1)$-D гиперплоскости, проходящей через все x_i в текущей аппроксимации решения; $\lambda \geqslant 0$ — параметр, значение которого должно изначально быть достаточно большим для выполнения условий $\overline{F}_{ij} \geqslant 0$, а далее, по мере нахождения лучших аппроксимаций решения, должно уменьшаться. Для одноатомных конфигураций ограничение $\overline{F}_0 \geqslant 0$ исключается из задачи.

Приведены соотношения, позволяющие находить компоненты вспомогательных целевых функций и направлений спуска в трансформированном методе внутренней точки (который сохраняет ту же общую форму, что и в предыдущем параграфе). В частности, выполняются следующие соотношения.

Теорема 10. *Пусть* $\mathbf{X}$ — $(r-1)$*-мерная гиперплоскость, проходящая через* x_1, x_2, ..., x_r; $P' = \operatorname{diag}([1], P)$; $P = M(M^{\mathrm{T}}M)^{-1}M^{\mathrm{T}}$ — *матрица проекции на пространство столбцов матрицы* M, *образованное произвольным базисом* $\mathbf{X}$ *(например,* $M = \left[\, x_2 - x_1 \,\middle|\, x_3 - x_1 \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, x_r - x_1 \,\right]$*). Обозначим также* $W = \operatorname{diag}(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ *и* $F_0(z) = VWV^{\mathrm{T}}$, *так что* $\bar{F}_0(z) = M_0'^{\mathrm{T}} F_0(z) M_0'$. *Пусть* $U = (P'V)^{-}$ — *произвольная обобщённая* *обратная к $P'V$ матрица, и $G(z) = P'U^{\mathrm{T}}W^{-1}UP'$. Тогда*

$$(\nabla_z \log\det \overline{F}_0(z))_i = \operatorname{tr}\left(G(z)\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_i}F_0(z)\right)\right);$$
$$(\widetilde{\nabla}_z^2 \log\det \overline{F}_0(z))_{ij} = -\operatorname{tr}\left(G(z)\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_i}F_0(z)\right)G(z)\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z_j}F_0(z)\right)\right).$$

Кроме того,

$$\det \overline{F}_0(z) = \left(\prod_{i=1}^{r} p_i\right)\det\left(M^{\mathrm{T}}M\right),$$
$$(\nabla_z \log\det \overline{F}_{ij}(z))_{x_{jk}} = p_j \operatorname{tr}\left(\overline{F}_{ij}^{-1}(z)\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{jk}}G_i(x_j)\right)\right),$$
$$(\nabla_z \log\det \overline{F}_{ij}(z))_{p_j} = \operatorname{tr}\left(\overline{F}_{ij}^{-1}(z)G_i(x_j)\right),$$
$$(\widetilde{\nabla}_z^2 \log\det \overline{F}_{ij}(z))_{x_{jk}x_{jl}} = -p_j^2 \operatorname{tr}\left(\overline{F}_{ij}^{-1}(z)\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{jk}}G_i(x_j)\right)\overline{F}_{ij}^{-1}(z)\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{jl}}G_i(x_j)\right)\right),$$
$$(\widetilde{\nabla}_z^2 \log\det \overline{F}_{ij}(z))_{x_{jk}p_j} = -p_j \operatorname{tr}\left(\overline{F}_{ij}^{-1}(z)\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_{jk}}G_i(x_j)\right)\overline{F}_{ij}^{-1}(z)G_i(x_j)\right),$$
$$(\widetilde{\nabla}_z^2 \log\det \overline{F}_{ij}(z))_{p_jp_j} = -\operatorname{tr}\left(\overline{F}_{ij}^{-1}(z)G_i(x_j)\overline{F}_{ij}^{-1}(z)G_i(x_j)\right);$$

здесь x_{jk} и p_j в качестве нижних индексов обозначают элементы градиента и гессиана, соответствующие данным переменным; все неуказанные элементы равны 0.

Общая структура варианта соответствующего алгоритма, с помощью которого решается большинство примеров, приведённых в данной работе, включает следующую последовательность действий.

1. Сформировать исходную задачу в виде (1).
2. Построить соответствующий трансформированный вариант (6) (данная формулировка задачи может существовать в неявном виде; для дальнейших построений нужны лишь индивидуальные её элементы).
3. Выбрать начальную конфигурацию атомов.
4. Выбрать начальные значения параметров μ (из промежуточных целевых функций $f^{(i)}(z)$) и λ (из (6)).
5. Пока не достигнута требуемая точность результата, повторять следующие шаги.
   - Определить направление поиска $\Delta z(z^{(i)})$ (на основе теорем 1 и 8, а также формул для вычисления левых частей матричных неравенств в (6), градиентов и модифицированных гессианов соответствующих барьерных функций).
   - Определить максимальную величину шага, не выходящего за пределы области поиска.

- Осуществить процедуру спуска, решив соответствующую одномерную задачу оптимизации.

- После каждой серии таких итераций заранее определённой длины обновлять значения μ (умножая на фиксированный коэффициент, например, $1/4$) и λ (определяя минимально возможное неотрицательное значение, при котором ещё выполняются соотношения $\overline{F}_{ij}(z) \geqslant 0$, и систематически приближаясь к нему).

6. Проверить на оптимальность полученные атомы, веса которых существенно отличаются от 0.

Данный алгоритм следует той же фундаментальной логике, что и исходный метод внутренней точки, но с некоторыми оговорками, характеризующими аспекты его вычислительной сложности, в частности:

- Поскольку решаемая задача является намного более общей, известные для задач ЛМН результаты, основанные на теории самосогласованных функций, здесь неприменимы[5], включая характеристики сходимости, оптимальные версии демпфированного спуска и т. д. Одним из следствий этого является необходимость использования полноценного алгоритма одномерной оптимизации для осуществления спуска на каждой итерации.

- Нахождение максимально допустимой величины шага при спуске с полиномиальными ограничениями вида $F(z + t\,\Delta z) \geqslant 0$ требует решения задачи о полиномиальных собственных значениях ($\det F(z + t\,\Delta z) = 0$) или, эквивалентно, обобщённой задачи о собственных значениях пары матриц большего размера.

Тем не менее, никакой из данных факторов не оказывает столь драматического влияния на объём вычислений, как комбинаторный взрыв, избежание которого является основной целью всех данных построений.

В шестом параграфе представлены вспомогательные результаты, на примере задач одномерной оптимизации показывающие возможность построения аналогичных трансформаций для прямых-двойственных форм ЛМН-релаксаций. В частности, показано, что для нередуцированной зада-

[5]Или ограниченно применимы, в какой-либо форме, для отдельных классов задач; это остаётся материалом для дальнейших исследований.

чи, ЛМН-релаксация которой представлена в общем виде ЛМН

$$
\begin{aligned}
&f^* = \min_y f(y) = \min_y c^{\mathrm{T}} y, \\
&F(y) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} F_i y_i \geqslant 0, \\
&y \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}
$$

трансформированная прямая-двойственная форма имеет вид

$$
\begin{aligned}
&h^* = \min\nolimits_{x,Z} \operatorname{tr} F(y(x)) Z, \\
&F(y(x)) \geqslant 0, \\
&Z \geqslant 0, \\
&\left(\nu_x^{\perp} A_x\right) z = \nu_x^{\perp} b_x, \\
&x \in \mathbb{R}^n, \quad Z = Z^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n \times n},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где x и Z — новые неизвестные,

$$
A_x = \left[\operatorname{tr}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} F(y(x))\right) \mathcal{Z}_j\right]_{ij}, \quad b_x = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_i} f(y(x))\right]_i,
$$

$\mathcal{Z}_j$, $j = 1, 2, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}$, — базис пространства симметричных $n \times n$-матриц; вектор $z = [z_i]_i$ — разложение Z по этому базису: $Z = \sum_i \mathcal{Z}_i z_i$; ν_x имеет тот же смысл, что и ранее; а $M^{\perp}$ — произвольная ортогональная к M матрица максимального ранга.

Представлена альтернативная форма A_x и b_x, позволяющая вычислять их по информации лишь об одном атоме.

Теорема 11. *Пусть x_0 — произвольный атом, а y_0 — соответствующий вектор моментов: $y_0(x_0) = \left[x_0^j\right]_j$, $j = 0, \ldots, 2k+1$. Для нередуцированной прямой-двойственной формы* (7) *подпространство $\{z \mid \left(\nu_x^{\perp} A_x\right) z = \nu_x^{\perp} b_x\}$ совпадает с подпространством $\{z \mid \overline{A}_x(x_0) z = \overline{b}_x(x_0)\}$, где*

$$
\begin{aligned}
&\overline{A}_x(x_0) = \left[\operatorname{tr}\left(\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x_0^i} F(y_0(x_0))\right) \mathcal{Z}_j\right]_{ij}, \\
&\overline{b}_x(x_0) = \left[\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x_0^i} f(y_0(x_0))\right]_i, \\
&i = 1, \ldots, 2k, \quad j = 1, \ldots, n_z,
\end{aligned}
$$

где n_z — размерность вектора z.

На основе этого результата представлены редуцированные (имеющие меньшее количество атомов) версии прямых-двойственных задач. Также рассмотрена возможность понижения порядка задачи с помощью усечения разложений в ряды Тейлора функций $f(x)$ и $G_i(x)$ в окрестностях атомов. Рассмотрены возможности и ограничения данного подхода в решении задач оценки качества нахождения экстремумов.

В **третьей главе** представлены методы применения перехода к двойственным формам в различных задачах теории управления с целью их решения или получения условий разрешимости. В большинстве случаев целью преобразований является получение задач ПМН, совместимых с методом, описанным во второй главе. Основные публикации, содержащие материалы данной главы: [1–4; 7–12; 14].

Рассмотрены три класса задач в порядке увеличения сложности.

Первый класс задач связан с установлением разрешимости систем неравенств Ляпунова

$$P > 0, \quad A_i^{\mathrm{T}} P + P A_i < 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{8}$$

аналитическими методами. Показано, что, сведя с помощью перехода к двойственным формам данную задачу к задаче о неразрешимости системы

$$Q_0 \geqslant 0, \ldots, Q_m \geqslant 0, \quad Q_0 = \sum_{i=1}^{m} (Q_i A_i^{\mathrm{T}} + A_i Q_i),$$

где Q_0, …, Q_m — неизвестные симметричные матрицы, мы можем далее преобразовать задачу к следующему виду. Потребуем, чтобы все A_i были устойчивы, что позволяет нам положить $Q_0 = 0$. Представим остальные Q_i в виде $Q_i = q_i q_i^{\mathrm{T}} = q_{i1} q_{i1}^{\mathrm{T}} + \ldots + q_{ir_i} q_{ir_i}^{\mathrm{T}}$, $q_i \in \mathbb{R}^{n \times r_i}$, где $r_i = \operatorname{rank} Q_i$, и q_{ij} — j-й столбец q_i. Обозначим как x_k, где $k = 1, \ldots, r$ и $r = \sum_{i=1}^{m} r_i$, векторы q_{11}, q_{12}, …, q_{1r_1}, q_{21}, …, q_{mr_m}; пусть векторы y_k равны соответствующим $A_1 q_{11}$, …, $A_m q_{mr_m}$. Тогда разрешимость новой формы эквивалентна разрешимости уравнения

$$\sum_{i=1}^{m} (Q_i A_i^{\mathrm{T}} + A_i Q_i) = \sum_{k=1}^{r} (x_k y_k^{\mathrm{T}} + y_k x_k^{\mathrm{T}}) = 0. \tag{9}$$

На основе свойств данного уравнения, позволяющих трансформировать системы векторов x_k и y_k, сохраняя равную нулю правую часть (леммы 3 и 4 в тексте диссертации), выводятся критерии существования его решений с различными сочетаниями рангов r_i. В частности, для суммарного ранга $r = 2$ приведена следующая теорема.

Теорема 13. *Если* $m = 2$ *и (9) имеет решение с* $\operatorname{rank} Q_1 = \operatorname{rank} Q_2 = 1$*, так что* $Q_1 = x_1 x_1^{\mathrm{T}}$ *и* $Q_2 = x_2 x_2^{\mathrm{T}}$*, данное решение может быть найдено из системы*

$$\det \begin{bmatrix} c_1 E & c_2 E \\ -c_2 A_1 & c_1 A_2 \end{bmatrix} = \det(c_1^2 A_2 + c_2^2 A_1) = 0, \quad \begin{bmatrix} c_1 E & c_2 E \\ -c_2 A_1 & c_1 A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

или же из

$$\det \begin{bmatrix} c_1 A_1 & c_2 E \\ -c_2 E & c_1 A_2 \end{bmatrix} = \det A_2 \det(c_1^2 A_1 + c_2^2 A_2^{-1}) = 0, \quad \begin{bmatrix} c_1 A_1 & c_2 E \\ -c_2 E & c_1 A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

где $c_1 \neq 0$ *и* $c_2 \neq 0$*. Из существования такого решения следует неразрешимость исходной системы (8).*

Данная теорема является обобщением известного результата, сводящего несуществование решений системы двух неравенств Ляпунова определённого вида к вырожденности некоторых пучков матриц. Новый подход, представленный в диссертационной работе, позволяет формулировать аналогичные критерии для более сложных конфигураций рангов. В работе также приводится критерий разрешимости для суммарного ранга $r = 3$ (теорема 14 в тексте диссертации).

Во втором параграфе рассматриваются задачи об устойчивости и нормах систем с параметрической неопределённостью, которые в контексте данной работы представляются как

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(r)x(t) + B(r)u(t), \\ y(t) &= C(r)x(t) + D(r)u(t), \end{aligned}$$

где x — состояние, u — управление, y — выход, $r(t) \in \mathcal{U}$ — параметр, формирующий неопределённость, $\mathcal{U} = \{r \mid U(r) \geqslant 0\}$, где U — симметричный матричный полином; A, B, C и D — матричные полиномы совместимых размеров.

Следует отметить, что существует довольно большое количество моделей неопределённостей, детально рассмотренных в литературе. Выбор именно такой модели обусловлен следующими факторами:

- она является достаточно общей и включает ряд более простых моделей как частные случаи;
- она естественным образом ассоциируется с задачами ПМН;
- рассматриваемые далее задачи, связанные с 2D-системами, а именно, задачи об устойчивости и $\mathcal{H}_\infty$-норме, можно интерпретировать как развитие задач анализа данной модели.

Задачи об устойчивости и поиске $\mathcal{H}_\infty$- и $\mathcal{H}_2$-норм такой системы представимы в виде задач ЛМН с параметром:

$$\begin{aligned}
&c^* = \min_r \max_{P,c} c,\\
&P - cI \geqslant 0,\\
&-A(r)^{\mathrm{T}}P - PA(r) - cI \geqslant 0,\\
&U(r) \geqslant 0,\\
&\operatorname{tr} P = 1;\\
&c^* > 0
\end{aligned} \tag{10}$$

для задачи об устойчивости,

$$\begin{aligned}
&\gamma_\infty = \max_r \min_{P,\gamma} \gamma,\\
&P \geqslant 0,\\
&Q(r,P,\gamma) \leqslant 0,\\
&U(r) \geqslant 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(r,P,\gamma) = &\begin{bmatrix} A(r)^{\mathrm{T}}P + PA(r) & PB(r)\\ B(r)^{\mathrm{T}}P & -\gamma I \end{bmatrix} +\\
&+ \begin{bmatrix} C(r)^{\mathrm{T}}C(r) & C(r)^{\mathrm{T}}D(r)\\ D(r)^{\mathrm{T}}C(r) & D(r)^{\mathrm{T}}D(r) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

для поиска $\mathcal{H}_\infty$-нормы, которая в данном случае равна $\sqrt{\gamma_\infty}$, и

$$\begin{aligned}
&\gamma_2 = \max_r \min_P \operatorname{tr} B(r)^{\mathrm{T}}PB(r),\\
&P \geqslant 0,\\
&A(r)^{\mathrm{T}}P + PA(r) + C(r)^{\mathrm{T}}C(r) \leqslant 0,\\
&U(r) \geqslant 0
\end{aligned}$$

(при стандартном дополнительном ограничении $D(r) \equiv 0$) для поиска $\mathcal{H}_2$-нормы (равной $\sqrt{\gamma_2}$). Каждая из данных задач представляет собой адаптацию соответствующей задачи ЛМН, с помощью которой решается та же задача для динамической системы без неопределённости. Интерпретируя последнюю как «подзадачу для фиксированного r» и заменив данные подзадачи на их двойственные формы, получаем задачи ПМН:

$$
\begin{aligned}
&c^* = \max_{Z,c,r} c,\\
&Z - cI \geqslant 0,\\
&A(r)Z + ZA(r)^{\mathrm{T}} - cI \geqslant 0,\\
&U(r) \geqslant 0,\\
&\operatorname{tr} Z = 1;\\
&c^* \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

для задачи об устойчивости,

$$
\begin{aligned}
&\gamma_\infty = \max_{Z,r} \operatorname{tr} \begin{bmatrix} C(r)^{\mathrm{T}}C(r) & C(r)^{\mathrm{T}}D(r) \\ D(r)^{\mathrm{T}}C(r) & D(r)^{\mathrm{T}}D(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^{\mathrm{T}} & Z_{22} \end{bmatrix},\\
&Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^{\mathrm{T}} & Z_{22} \end{bmatrix} = Z^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\\
&\operatorname{tr} Z_{22} = 1,\\
&A(r)Z_{11} + Z_{11}A(r)^{\mathrm{T}} + Z_{12}B(r)^{\mathrm{T}} + B(r)Z_{12}^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\\
&U(r) \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

для задачи о поиске $\mathcal{H}_\infty$-нормы (построение необходимой для данного перехода двойственной формы подзадачи с фиксированным r приведено в теореме 15 в тексте диссертации) и

$$
\begin{aligned}
&\gamma_2 = \max_{Q,r} \operatorname{tr} C(r)QC(r)^{\mathrm{T}},\\
&A(r)Q + QA(r)^{\mathrm{T}} + B(r)B(r)^{\mathrm{T}} \geqslant 0,\\
&Q \geqslant 0,\\
&U(r) \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{13}
$$

для задачи о поиске $\mathcal{H}_2$-нормы.

Переход к двойственным формам несколько меняет свойства указанных задач. В частности, разрешимость (11) эквивалентна неразрешимости (10) (и, следовательно, неустойчивости динамической системы); субоптимальные решения (12) и (13) описывают нижние границы норм (а не верхние, как в классических ЛМН для поиска $\mathcal{H}_\infty$- и $\mathcal{H}_2$-норм).

С точки зрения методов решения данных задач, необходимость и достаточность условия устойчивости и точность нахождения норм зависят от того, способен ли выбранный метод решения найти глобальные экстремумы. При использовании неглобальных методов решения данные задачи приводят к получению достаточных условий неустойчивости (эквивалентно, необходимых условий устойчивости) и нижних границ норм.

Третий параграф посвящён задачам, представляющим наибольший интерес в контексте данной работы, — задачам об устойчивости и нормах 2D-систем. Основное внимание уделяется смешанным непрерывно-дискретным процессам, также рассматриваются дважды-дискретные системы, методы анализа которых аналогичны.

Решение задач об устойчивости и $\mathcal{H}_\infty$-норме 2D-систем во многом схоже с соответствующими результатами для робастной устойчивости и $\mathcal{H}_\infty$-нормы. Рассмотрим непрерывно-дискретный процесс

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_c(t,k) &= A_{cc}x_c(t,k) + A_{cd}x_d(t,k) + B_c u(t,k), \\ x_d(t,k+1) &= A_{dc}x_c(t,k) + A_{dd}x_d(t,k) + B_d u(t,k), \\ y(t,k) &= C_c x_c(t,k) + C_d x_d(t,k) + Du(t,k), \end{aligned} \tag{14}$$

где $t \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{N}_0$ — непрерывная и дискретная переменные, $x_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ и $x_d \in \mathbb{R}^{n_d}$ — непрерывное и дискретное состояния, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ — входные переменные, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ — выходные переменные, A_{cc}, A_{cd}, A_{dc}, A_{dd}, B_c, B_d, C_c, C_d и D — заданные матрицы соответствующего размера.

Поставим задачу определения её экспоненциальной устойчивости (в незамкнутом виде), определяемой как существование таких $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, что

$$\left\| \begin{pmatrix} x_c(t,k) \\ x_d(t,k) \end{pmatrix} \right\|_2 \leqslant \beta\rho \mathrm{e}^{-\gamma \min\{t,k\}},$$

$$\rho = \max\{\sup_{t \geqslant 0} \|x_d(t,0)\|_2, \sup_{k \geqslant 0} \|x_c(0,k)\|_2\},$$

для всех начальных условий $x_c(0,k) \in \mathbb{R}^{n_c}$ и $x_d(t,0) \in \mathbb{R}^{n_d}$ для всех $t \geqslant 0$ и $k \geqslant 0$. Из работ G. Chesi, R. H. Middleton известно, что данное условие эквивалентно разрешимости задачи

$$\begin{aligned} &\forall \omega \in \mathbb{R}: \\ &P(\omega) \geqslant cI, \\ &P(\omega) - F(j\omega)^H P(\omega) F(j\omega) \geqslant cI, \\ &c > 0, \end{aligned} \tag{15}$$

где j — мнимая единица; $P(\omega) \in \mathbb{C}^{n_d \times n_d}$ — эрмитова матричная функция (которая может быть найдена в виде полинома степени не выше $2n_c n_d^2$), и $F(s) = A_{dc}(sI - A_{cc})^{-1}A_{cd} + A_{dd}$.

В диссертационной работе предлагается представить данную задачу в виде

$$
\begin{aligned}
&c^* = \min_{\omega} \max_{P,c} c,\\
&P - cI \geqslant 0,\\
&P - F(j\omega)^H P F(j\omega) - cI \geqslant 0,\\
&\operatorname{tr} P = 1;\\
&c^* > 0
\end{aligned}
\tag{16}
$$

и воспользоваться переходом к двойственной форме в подзадаче о разрешимости базового неравенства Ляпунова $P - F(j\omega)^H P F(j\omega) > 0$, получив (комплексную) задачу ПМН

$$
\begin{aligned}
&c^* = \max_{Z,c,\omega} c,\\
&Z - cI \geqslant 0,\\
&F(j\omega) Z F(j\omega)^H - Z - cI \geqslant 0,\\
&\operatorname{tr} Z = 1,\\
&Z = Z^H \in \mathbb{C}^{n_d \times n_d},\ c \in \mathbb{R},\ \omega \in \mathbb{R};\\
&c^* \geqslant 0,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

разрешимость которой эквивалентна неразрешимости (16) (и неустойчивости 2D-системы).

Аналогичные построения применимы и к дважды-дискретной системе (модели Роессера)

$$
\begin{gathered}
\begin{bmatrix} x_h(i+1,k) \\ x_v(i,k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{hh} & A_{hv} \\ A_{vh} & A_{vv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h(i,k) \\ x_v(i,k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_h \\ B_v \end{bmatrix} u(i,k),\\
y(i,k) = \begin{bmatrix} C_h & C_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_h(i,k) \\ x_v(i,k) \end{bmatrix} + Du(i,k),
\end{gathered}
$$

где $i \in \mathbb{N}_0$ и $k \in \mathbb{N}_0$ — дискретные временные переменные, $x_h \in \mathbb{R}^{n_h}$ и $x_v \in \mathbb{R}^{n_v}$ — «горизонтальная» и «вертикальная» компоненты состояния, а остальные обозначения имеют ту же семантику, что и ранее. Прямая задача приобретает вид

$$
\begin{aligned}
&\forall \omega \in [0; 2\pi] :\\
&F(\mathrm{e}^{j\omega})^H P(\mathrm{e}^{j\omega}) F(\mathrm{e}^{j\omega}) - P(\mathrm{e}^{j\omega}) < 0,\\
&P(\mathrm{e}^{j\omega}) > 0,\\
&\operatorname{tr} P(\mathrm{e}^{j\omega}) = 1,
\end{aligned}
$$

после чего двойственный переход в фундаментальной подзадаче приводит к системе

$$
\begin{aligned}
&c^* = \max_{Z,c,\omega} c,\\
&Z - cI \geqslant 0,\\
&F(\mathrm{e}^{j\omega}) Z F(\mathrm{e}^{j\omega})^H - Z - cI \geqslant 0,\\
&\operatorname{tr} Z = 1,\\
&Z = Z^H \in \mathbb{C}^{n_h \times n_h},\ c \in \mathbb{R},\ \omega \in [0; 2\pi];\\
&c^* \geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Новая задача не является задачей ПМН, поэтому метод на основе ЛМН-релаксаций здесь неприменим. С другой стороны, атомная оптимизация совместима и с такими задачами. Её промежуточные целевые функции и формула для вычисления направления спуска остаются корректными и могут быть использованы как есть. Единственная часть, которая становится сложнее — вычисление верхней границы величины шага в подзадачах одномерного спуска, поскольку соответствующие уравнения более не сводятся к относительно несложным задачам о собственных значениях.

Другой подход к решению (18) — преобразование её в полиномиальную форму заменой $\mathrm{e}^{j\omega}$, $\omega \in [0; 2\pi]$, на подходящую параметризацию единичной окружности. Отметим, что, по построению, здесь достаточно рассмотреть полуокружность с $\omega \in [0; \pi]$; подойдет любая параметризация, представляющая данную кривую (и не имеющая на ней особых точек): например, $\mathrm{e}^{j\omega} = j\frac{j-\omega'}{j+\omega'} = j\frac{(1+j\omega')^2}{1+\omega'^2}$, $\omega' \in [-1; 1]$. После такой замены (18) становится задачей с рациональными матричными неравенствами и может быть преобразована к форме ПМН умножением на квадрат общего знаменателя. Полученная в итоге задача ПМН может быть решена теми же методами, что и ранее.

$\mathcal{H}_\infty$-норма системы (14) определяется как

$$
\gamma_\infty = \sup_{\omega,\theta} \left\| Q(e^{j\theta}, j\omega) \right\|_2,
$$

где $\theta, \omega \in \mathbb{R}$ (в силу периодичности $e^{j\theta}$ также можно положить $\theta \in [0; 2\pi)$ или $\theta \in [-\pi; \pi)$); $\|\cdot\|_2$ — спектральная норма матрицы; $Q(z, s) \in \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ — передаточная функция, связывающая преобразования Лапласа-Z $u(t, k)$ и

$y(t,k)$:

$$
\begin{aligned}
&Q(z,s) = F_3(s)(zI - F_1(s))^{-1}F_2(s) + F_4(s),\\
&F_1(s) = A_{dc}(sI - A_{cc})^{-1}A_{cd} + A_{dd},\\
&F_2(s) = A_{dc}(sI - A_{cc})^{-1}B_c + B_d,\\
&F_3(s) = C_c(sI - A_{cc})^{-1}A_{cd} + C_d,\\
&F_4(s) = C_c(sI - A_{cc})^{-1}B_c + D.
\end{aligned}
$$

Рассматривая $j\omega$ как параметр, мы можем вычислить $\mathcal{H}_\infty$-норму дискретной системы, полученной фиксированием ω, после чего найти максимальное из таких значений (здесь $\mathcal{H}_\infty$-норма равна $\sqrt{f^*}$):

$$
\begin{aligned}
&f^* = \max_{\omega}\min_{\lambda,P}\lambda,\\
&\begin{bmatrix} P(\omega) & A(j\omega)P(\omega) & B(j\omega) & 0\\ P(\omega)A(j\omega)^H & P(\omega) & 0 & P(\omega)C(j\omega)^H\\ B(j\omega)^H & 0 & I & D(j\omega)^H\\ 0 & C(j\omega)P(\omega) & D(j\omega) & \lambda(\omega)I \end{bmatrix} \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Для преобразования данной задачи к форме ПМН необходимо перейти к двойственной форме подзадачи о поиске минимума (теорема 16 в тексте диссертации), что приводит к следующему результату:

$$
\begin{aligned}
&g^* = \max_{Z,\omega}\operatorname{tr}\begin{bmatrix} C(j\omega)^H C(j\omega) & C(j\omega)^H D(j\omega)\\ D(j\omega)^H C(j\omega) & D(j\omega)^H D(j\omega)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{12}^H & Z_{22}\end{bmatrix},\\
&Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{12}^H & Z_{22}\end{bmatrix} = Z^H \geqslant 0,\\
&\operatorname{tr} Z_{22} = 1,\\
&A(j\omega)Z_{11}A(j\omega)^H - Z_{11} + A(j\omega)Z_{12}B(j\omega)^H +\\
&\quad + B(j\omega)Z_{12}^H A(j\omega)^H + B(j\omega)Z_{22}B(j\omega)^H \geqslant 0.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Все полученные таким образом задачи: (17), (18), (19) — являются комплексными. Для применения рассмотренных в данной работе методов решения необходимо предварительно преобразовать их в вещественную форму заменой всех комплексных неравенств вида $M \geqslant 0$ на

$$
\begin{bmatrix} \operatorname{Re} M & \operatorname{Im} M\\ -\operatorname{Im} M & \operatorname{Re} M\end{bmatrix} \geqslant 0.
$$

Как и для систем с неопределённостью, полученные результаты сами по себе приводят к необходимым и достаточным условиям устойчивости и точным значениям $\mathcal{H}_\infty$-норм. В зависимости от того, находит ли численный метод решения полученных задач истинный (глобальный) экстремум, данные характеристики или сохраняются, или ослабляются до достаточных условий неустойчивости и нижних границ $\mathcal{H}_\infty$-норм.

Для задачи поиска $\mathcal{H}_2$-норм 2D-систем (14) предложен существенно иной подход. Обозначив данную норму как γ_2, с учётом теоремы Парсеваля имеем:

$$\begin{aligned}\gamma_2^2 &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{tr} F(j\omega, e^{j\theta})^H F(j\omega, e^{j\theta})\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{tr} f(j\omega,k)^H f(j\omega,k)\right)\mathrm{d}\omega,\end{aligned}$$

где $F(s,z) = C(s)(zI - A(s))^{-1}B(s) + D(s)$ — передаточная функция системы,

$$\begin{aligned}A(s) &= A_{dc}(sI - A_{cc})^{-1}A_{cd} + A_{dd},\\ B(s) &= A_{dc}(sI - A_{cc})^{-1}B_c + B_d,\\ C(s) &= C_c(sI - A_{cc})^{-1}A_{cd} + C_d,\\ D(s) &= C_c(sI - A_{cc})^{-1}B_c + D,\end{aligned}$$

$f(s,k) = \mathcal{Z}_z^{-1}\{F(s,z)\}$, $s = j\omega$, — оригинал $F(s,z)$ по второму аргументу при условии, что s считается независимым параметром ($\mathcal{Z}\{f\}$ и $\mathcal{Z}^{-1}\{F\}$ здесь обозначают прямое и обратное Z-преобразование). Необходимым условием сходимости данного выражения является $\lim_{\omega\to\infty} F(j\omega, e^{j\theta}) \equiv 0$. Для вычисления $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(s,k)^H f(s,k)$ подходят (с небольшими изменениями) классические формулы, используемые при нахождении $\mathcal{H}_2$-нормы дискретной системы.

Теорема 17. *Пусть $F(s,z)$ — передаточная функция (устойчивой) системы*

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(s)x(k) + B(s)u(k),\\ y(k) &= C(s)x(k) + D(s)u(k),\end{aligned}$$

где s — комплексный параметр, а $x \in \mathbb{R}^{n_x}$, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ и матрицы коэффициентов имеют традиционную семантику. Пусть $H(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(s,k)^H f(s,k)$, $f(s,k) = \mathcal{Z}_z^{-1}\{F(s,z)\}$. Тогда $H(s) = B(s)^H G(s) B(s) + D(s)^H D(s)$, где $G(s)$ — решение уравнения

$$A(s)^H G(s) A(s) - G(s) + C(s)^H C(s) = 0.$$

Примечание 1. Найденное таким образом выражение для $H(s)$ включает как s, так и $\bar{s}$. Процесс вычислений можно немного упростить, учтя, что нас интересуют исключительно s на мнимой оси, для которых $\overline{s} = -s$. Тогда эквивалентная (для $s = j\omega$) форма $H'(s)$ может быть найдена из

$$\begin{aligned} &H'(s) = B(-s)^{\mathrm{T}} G(s) B(s) + D(-s)^{\mathrm{T}} D(s), \\ &A(-s)^{\mathrm{T}} G(s) A(s) - G(s) + C(-s)^{\mathrm{T}} C(s) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Таким образом, предлагаемая процедура нахождения $\mathcal{H}_2$-нормы системы включает следующие шаги: нахождение $H'(s)$ из (20) (или $H(s)$ из условия теоремы 17); непосредственное вычисление γ_2 как $\sqrt{\frac{1}{2\pi}\operatorname{tr}\int_{-\infty}^{\infty} H'(j\omega)\,\mathrm{d}\omega}$ (или $\sqrt{\frac{1}{2\pi}\operatorname{tr}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)\,\mathrm{d}\omega}$).

В **четвёртой главе** представлены примеры использования полученных методов и сравнение с существующими методами, где это применимо.

Для наглядности приведем один из примеров, связанных с материалом второй главы. Рассмотрим следующую задачу, иллюстрирующую работу метода атомной оптимизации с несвязными областями поиска:

$$\begin{aligned} &f^* = \min_x f(x) = \min_x (x_2 + 0{,}1)^2, \\ &g_1(x) = 1 - 2x_1 - 2(x_2^2 - 1)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

На рис. 1 показана область поиска $g_1(x) \geqslant 0$ и отмечены локальные экстремумы $f(x)$ в данной области, из которых нижний является глобальным.

Решим данную задачу, используя конфигурации с числом атомов $r = 1$, $r = 2$ и $r = 3$ применительно к форме (6) и прямому методу внутренней точки. Выберем случайные начальные позиции атомов в окрестности точки $(-0{,}5; 1)$. Будем делать серию из 15 шагов с $\mu = 1$, а после нее — 5 серий по 5 шагов, уменьшая μ в 4 раза в каждой новой серии. Положим также $\lambda = 1000$ (так что компоненты барьерных функций, соответствующие неравенствам $\bar{F}_{ij}(z) \geqslant 0$, не будут оказывать заметного влияния на решение).

Для $r = 1$ действие алгоритма эквивалентно локальному поиску с логарифмическими барьерными функциями и ньютоновским выбором направления с использованием модифицированной матрицы Гессе: рис. 2.

Для $r = 2$ и $r = 3$ отдельные атомы получают возможность переходить из одной компоненты связности в другую за счет временного уменьшения веса, позволяющего матрицам $F_i(z)$ оставаться положительно определёнными: рис. 3 и рис. 4. Это позволяет одному из атомов найти глобальный минимум; положение остальных атомов впоследствии может стать произвольным, поскольку их веса стремятся к 0.

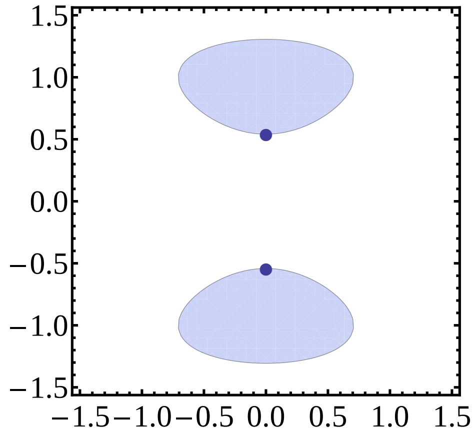

Рис. 1. Область поиска и экстремумы.

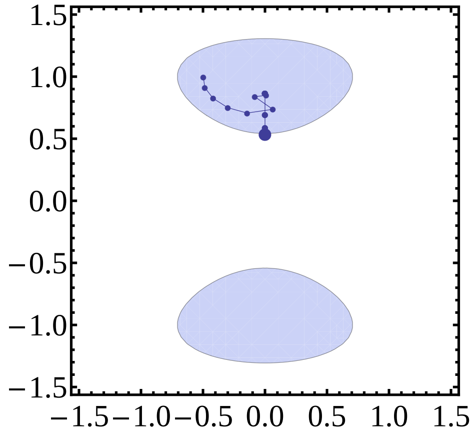

Рис. 2. График x для $r = 1$.

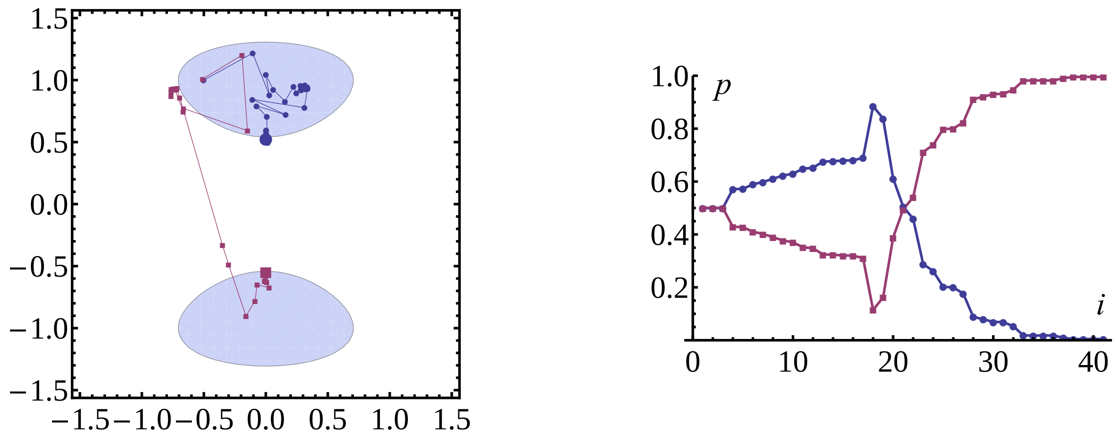

Рис. 3. Графики x и p для $r = 2$.

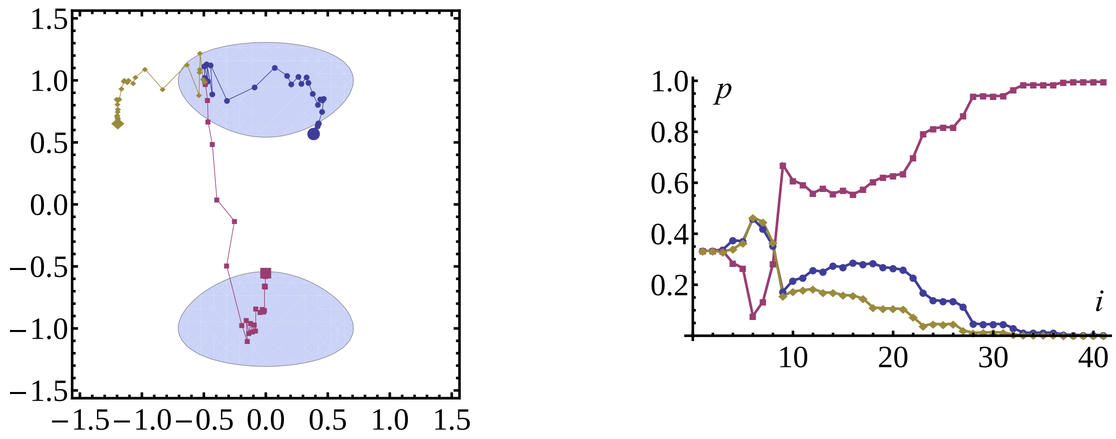

Рис. 4. Графики x и p для $r = 3$.

Дальнейшее увеличение количества атомов в рамках изложенного подхода для данной задачи невозможно, поскольку мы рассматриваем только конфигурации с $r \leqslant n+1$, где n — размерность пространства поиска.

В примерах к третьей главе отмечены следующие особенности новых методов решения задач об устойчивости и поиске $\mathcal{H}_\infty$- и $\mathcal{H}_2$-норм 2D-систем по сравнению с другими известными работами, нетривиальным образом сводящими данные задачи к задачам ЛМН потенциально большого размера.

- Для задач об устойчивости и $\mathcal{H}_\infty$-нормах предложенный метод дуализации подзадач формирует существенно более компактные задачи ПМН, для которых можно находить адекватные решения методом атомной оптимизации с небольшим количеством атомов.
- Для задачи об $\mathcal{H}_2$-норме предложенный метод не содержит сколько-нибудь нетривиальных преобразований задачи и позволяет сразу найти точный результат — в то время как сравниваемый с ним ранее известный метод использует намного более сложные построения и находит лишь консервативные верхние границы нормы.

Задача об устойчивости рассмотрена на примере непрерывно-дискретной системы с матрицами $A_{cc}, A_{cd}, A_{dc}, A_{dd} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. При решении задачи известными методами, основанными на сведении её к задаче ЛМН, число неизвестных в последней может достигать десятков тысяч в случае, когда система неустойчива. В отличие от этого, предложенный в данной работе метод формирует задачу ПМН, включающую 11 скалярных неизвестных: c, ω, шесть вещественных и три мнимых части элементов матрицы

$$Z = Z^H = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12}+jv_{12} & u_{13}+jv_{13} \\ u_{12}-jv_{12} & u_{22} & u_{23}+jv_{23} \\ u_{13}-jv_{13} & u_{23}-jv_{23} & u_{33} \end{bmatrix};$$

данная задача решается с адекватной точностью в т. ч. методом атомной оптимизации с небольшим количеством атомов и приводит к тем же выводам за не более чем десятки итераций основного алгоритма. Для неустойчивой системы полученное решение включает сертификат неустойчивости в виде величины ω, делающей систему (15) неразрешимой.

Задача об $\mathcal{H}_\infty$-норме рассмотрена на примере непрерывно-дискретной системы с матрицами $A_{cc}, A_{cd}, A_{dc}, A_{dd} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B_c, B_d \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, $C_c, C_d \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, $D \in \mathbb{R}$. При сведении её к задаче ЛМН число неизвестных варьируется от сотен до тысяч в зависимости от ожидаемого порядка полинома $P(\omega)$. Предложенный в данной работе метод формирует задачу ПМН, включающую 9 неизвестных (ω, три вещественных и одну мнимую часть в Z_{11}, две вещественные и мнимые части в Z_{12}; кроме того, $Z_{22}=1$), которая также решается с достаточной точностью методом атомной оптимизации с небольшим количеством атомов и приводит к тем же результатам за не более чем десятки итераций основного алгоритма.

Задача об $\mathcal{H}_2$-норме рассмотрена на примере непрерывно-дискретной системы с матрицами $A_{cc}, A_{cd}, A_{dc}, A_{dd}, B_c, B_d, C_c, C_d, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Предложенный способ решения сводит данную задачу к решению (20), откуда находится $\operatorname{tr} H'(s)$ в виде рациональной функции от s, и интегрирование стандартными методами позволяет непосредственно получить точный результат.

В заключении диссертации подведены итоги проведённых исследований и сформулированы возможные направления дальнейшей работы.

Приложение к диссертации содержит копии свидетельств о регистрации программ для ЭВМ, реализующих представленные в диссертации новые методы решения задач.

Заключение

В результате проведённых исследований была достигнута цель работы и решены все поставленные задачи. Получены следующие новые научные результаты.

- Предложена новая концепция решения задач теории управления с участием параметризованных матричных неравенств.
- В рамках предложенной концепции разработана следующая группа методов.
  - Для задач ПМН разработан метод оптимизации, основанный на сочетании аналогов ЛМН-релаксаций в трансформированном пространстве поиска с модификацией метода внутренней точки для решения полученных задач. Метод занимает промежуточное положение между локальной и глобальной оптимизацией и спроектирован таким образом, чтобы эффективно справляться с характером невыпуклости, характерным для задач ПМН, возникающих в теории управления.

    Представлено несколько вариантов данного метода, ориентированных на разные типы исходных задач и формы представления промежуточных задач.
  - Методы приведения к форме ПМН задач об анализе устойчивости и поиске $\mathcal{H}_\infty$-нормы 2D-систем.
  - Методы приведения к форме ПМН задач об анализе устойчивости

и поиске $\mathcal{H}_\infty$- и $\mathcal{H}_2$-норм систем с параметрической неопределённостью.

- Получены результаты, связанные с тематикой работы и воплощающие отдельные элементы предложенной концепции.
  - Метод нахождения $\mathcal{H}_2$-норм 2D-систем, требующий значительно меньших вычислительных ресурсов по сравнению с существующими аналогами и дающий более точный результат.
  - Аналитические критерии разрешимости систем неравенств Ляпунова.

Полученные численные методы основаны на более простых преобразованиях задач по сравнению с существующими аналогами и обеспечивают значительно улучшенную масштабируемость метода решения при росте количественных характеристик задач. Данные выводы основаны как на сравнении формальных аспектов решения задач, так и на результатах решения контрольных примеров.

Список публикаций по теме диссертации

Публикации в изданиях, входящих в список ВАК и/или мировые индексы цитирования (Web of Science, Scopus)

1. *Поздяев В. В.* Задачи вычисления норм 2D-систем [Текст] / В. В. Поздяев // Доклады Академии Наук. — 2017. — Т. 475, № 4. — С. 382–385.
2. *Поздяев В. В.* О вычислении норм 2D-систем [Текст] / В. В. Поздяев // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 3. — С. 3–20.
3. *Поздяев В. В.* Об аналитическом решении систем матричных неравенств, двойственных к системам неравенств Ляпунова [Текст] / В. В. Поздяев // Управление большими системами. — 2010. — № 28. — С. 58–74.
4. *Поздяев В. В.* Параметризованные матричные неравенства в задачах анализа линейных динамических систем [Текст] / В. В. Поздяев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2018. — Т. 58, № 6. — С. 934–944.
5. *Поздяев В. В.* Прямые и двойственные формы в методе атомной оптимизации для одномерных задач [Текст] / В. В. Поздяев // Динамика сложных систем — XXI век. — 2014. — № 1. — С. 53–58.

6. *Поздяев В. В.* Редукция двойственных форм в методе атомной оптимизации [Текст] / В. В. Поздяев // Управление большими системами. — 2015. — № 54. — С. 66–85.

7. *Pozdyaev V.* Analytical criteria of Lyapunov inequality systems' feasibility [Текст] / V. Pozdyaev // IFAC Proceedings Volumes. — 2009. — Vol. 42, no. 13. — Pp. 467–470.

8. *Pozdyayev V.* 2D system analysis via dual problems and polynomial matrix inequalities [Текст] / V. Pozdyayev // Numerical Algebra, Control and Optimization. — 2016. — Vol. 6, no. 4. — Pp. 491–504.

9. *Pozdyayev V.* Necessary conditions for 2D systems' stability [Электронный ресурс] / V. Pozdyayev // IFAC-PapersOnLine. — 2015. — Vol. 48, no. 11. — Pp. 790–795.

10. *Pozdyayev V.* Necessary conditions for robust stability of linear systems [Электронный ресурс] / V. Pozdyayev // IFAC-PapersOnLine. — 2015. — Vol. 48, no. 14. — Pp. 31–36.

11. *Pozdyayev V.* On evaluating H_∞ and H_2 performance of uncertain systems [Текст] / V. Pozdyayev // Proc. 21st International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR). — Miedzyzdroje, Poland, 2016. — Pp. 1217–1222.

12. *Pozdyayev V.* On H_∞ and H_2 performance of 2D systems [Электронный ресурс] / V. Pozdyayev // IFAC-PapersOnLine. — 2016. — Vol. 49, no. 13. — Pp. 42–47.

13. *Pozdyayev V.* Primal-dual forms of LMI relaxations in the atomic optimization method [Текст] / V. Pozdyayev // ICIC Express Letters. — 2015. — Vol. 9, no. 8. — Pp. 2347–2352.

14. *Pozdyayev V.* Static output feedback stabilization of 2D systems via dual problems [Электронный ресурс] / V. Pozdyayev // IFAC-PapersOnLine. — 2017. — Vol. 50, no. 1. — Pp. 15536–15541.

15. *Pozdyayev V. V.* Atomic optimization. I. Search space transformation and one-dimensional problems [Текст] / V. V. Pozdyayev // Automation and Remote Control. — 2013. — Vol. 74, no. 12. — Pp. 2069–2092.

16. *Pozdyayev V. V.* Atomic optimization. II. Multidimensional problems and polynomial matrix inequalities [Текст] / V. V. Pozdyayev // Automation and Remote Control. — 2014. — Vol. 75, no. 6. — Pp. 1155–1171.

Свидетельства о регистрации программного обеспечения

17. *Поздяев В. В.* Атомная оптимизация для задач с участием полиномиальных матричных неравенств / В. В. Поздяев // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013660619. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 12.11.2013.

18. *Поздяев В. В.* Построение и решение двойственных форм матричных неравенств в методе атомной оптимизации / В. В. Поздяев // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014662962. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 12.12.2014.

Прочие публикации

19. *Поздяев В. В.* Атомная оптимизация: системы полиномиальных матричных неравенств и трансформация пространств поиска [Текст] / В. В. Поздяев // Моделирование, управление и устойчивость (MCS-2012): межд. конф. — Севастополь, 2012. — С. 182–183.

20. *Поздяев В. В.* Атомная оптимизация: трансформация пространств поиска в задачах нелинейного программирования [Электронный ресурс] / В. В. Поздяев // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Труды. CD-ROM. — М. : ИПУ РАН, 2014. — С. 2352–2363.

21. *Поздяев В. В.* О необходимых условиях разрешимости параметризованных неравенств Ляпунова [Электронный ресурс] / В. В. Поздяев // XXI международная научно-техническая конференция «Информационные системы и технологии» ИСТ-2015. Материалы конференции. CD-ROM. — Н.Новгород, 2015. — С. 274.

22. *Поздяев В. В.* Об аналитическом решении систем матричных неравенств, двойственных к системам неравенств Ляпунова [Текст] / В. В. Поздяев // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов XI Международного семинара им. Е. С. Пятницкого. — М. : ИПУ РАН, 2010. — С. 326–328.

23. *Поздяев В. В.* Особенности реализации и применения метода атомной оптимизации в задачах теории управления [Электронный ресурс] / В. В. Поздяев // XIX международная научно-техническая конференция «Информационные системы и технологии» ИСТ-2013. Материалы конференции. CD-ROM. — Н.Новгород, 2013. — С. 325.

24. *Поздяев В. В.* Прямые и двойственные формы линейных релаксаций в методе атомной оптимизации [Электронный ресурс] / В. В. Поздяев // XX международная научно-техническая конференция «Информационные системы и технологии» ИСТ-2014. Материалы конференции. CD-ROM. — Н.Новгород, 2014. — С. 321.

25. *Поздяев В. В.* Трансформация пространства поиска в прямых и двойственных системах матричных неравенств [Текст] / В. В. Поздяев // Управление большими системами (УБС'2014): Материалы XI Всерос. школы-конференции молодых ученых. — М. : ИПУ РАН, 2014. — С. 312–329.

Подписано в печать __.__.2018. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл.-изд. л. 2,0. Тираж ____ экз. Заказ ______.

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева
Типография НГТУ. 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, 24