

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Р. Е. АЛЕКСЕЕВА»

На правах рукописи



КОПОСОВ АНТОН СЕРГЕЕВИЧ

**СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ С ИТЕРАТИВНЫМ ОБУЧЕНИЕМ ДЛЯ  
СЕТЕВЫХ МУЛЬТИАГЕНТНЫХ СИСТЕМ**

Специальность 2.3.1 – Системный анализ, управление и обработка  
информации, статистика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Научный руководитель:**

доктор физико-математических наук,  
профессор Пакшин Павел Владимирович

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Общая характеристика состояния проблемы</b>	<b>10</b>
<b>2 Управление с итеративным обучением стохастическими сетевыми системами</b>	<b>19</b>
2.1 Описание сетевой системы и постановка задачи . . . . .	19
2.2 Сетевой алгоритм Сааба . . . . .	20
2.3 Сетевое управление на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова . . . . .	26
2.4 Моделирование сетевой системы . . . . .	33
2.5 Выводы по главе 2 . . . . .	38
<b>3 Управление с итеративным обучением стохастическими сетевыми системами при изменении топологии сети</b>	<b>42</b>
3.1 Описание сетевой системы . . . . .	42
3.2 Построение 2D-модели в приращениях переменных . . . . .	45
3.3 Решение на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова	47
3.4 Моделирование сетевой системы . . . . .	49
3.5 Частный случай без учета случайных возмущений . . . . .	58
3.6 Выводы по главе 3 . . . . .	64
<b>4 Управление с итеративным обучением стохастическими сетевыми системами при изменении желаемой траектории выходного сигнала</b>	<b>65</b>
4.1 Описание сетевой системы и постановка задачи . . . . .	65
4.2 Решение задачи . . . . .	67
4.2.1 Управление при фиксированном режиме работы агентов . . . . .	67
4.2.2 Управление в момент переключения режима работы агентов . . . . .	70
4.2.3 Общий закон управления . . . . .	72
4.3 Моделирование сетевой системы . . . . .	73
4.4 Выводы по главе 4 . . . . .	81
<b>5 Управление с итеративным обучением стохастическими сетевыми системами при изменении желаемой траектории выходного сигнала и</b>	

<b>топологии сети</b>	<b>82</b>
5.1 Описание сетевой системы и постановка задачи . . . . .	82
5.2 Построение 2D-модели в приращениях переменных . . . . .	83
5.3 Теорема о сходимости . . . . .	85
5.4 Синтез управления . . . . .	86
5.4.1 Управление при фиксированном режиме агентов и фиксированной топологии сети . . . . .	86
5.4.2 Управление в момент переключения режима работы агентов . . .	87
5.4.3 Управление в момент переключения топологии сети . . . . .	88
5.4.4 Общий закон управления . . . . .	89
5.5 Моделирование сетевой системы . . . . .	91
5.6 Частный случай без учета случайных возмущений . . . . .	96
5.7 Выводы по главе 5 . . . . .	98
<b>Заключение</b>	<b>100</b>
<b>Список литературы</b>	<b>102</b>

# Введение

**Актуальность темы исследования.** Современные процессы быстрых изменений в экономике, цифровизация промышленности и распространение новых высоких технологий связаны с переходом к новой промышленной парадигме, которую именуют «Индустрией 4.0», или четвертой промышленной революцией. В широком смысле данный термин означает внедрение передовых технологий в весь производственный процесс. К таким технологиям причисляют аналитику больших данных, Интернет вещей, искусственный интеллект, автономные роботы и облачные вычисления.

Эта тенденция приводит к появлению интеллектуальных производств [1], которые характеризуются высокой степенью интеграции информационных технологий и гибкостью систем автоматизации производства, что стало мощным движущим фактором в развитии систем группового управления роботами, технологическими машинами и оборудованием. Одним из классов таких систем являются мультиагентные системы, которые представляют собой группу автономных объектов (агентов), взаимодействующих друг с другом через информационную сеть и реализующих принципы интеллектуального управления, принимая решения самостоятельно.

К интеллектуальному управлению относят методы управления, которые используют различные подходы искусственного интеллекта, такие как искусственные нейронные сети, нечёткая логика, эволюционные вычисления, генетические алгоритмы и машинное обучение. Для динамических систем в технике концепция машинного обучения была определена Я. З. Цыпкиным еще в начале 60-х годов прошлого века как процесс получения в системе необходимой реакции на внешние сигналы путем многократных воздействий на нее и внешней корректировки [2]. Метод управления с итеративным обучением (УИО) полностью вписывается в эту концепцию.

УИО появилось в середине 80-х годов прошлого века как инструмент повышения точности выполнения повторяющихся операций роботами-манипуляторами. В настоящее время данный метод получил широкое распространение в многочисленных приложениях и продолжает оставаться предметом существенного интереса исследователей в области теории управления. Он ориентирован на системы, которые многократно повторяют одну и ту же заранее заданную операцию конечной продолжительности (которая обычно задается желаемой траекторией выходного сигнала), всегда возвращаясь в исходную позицию так, что начальные условия остаются одинаковыми на всех повторениях. Идея УИО заключается в том, что управляющее воздействие на каждом

повторении формируется с использованием информации, полученной на предыдущем повторении, что позволяет последовательно улучшать точность или какой-либо другой показатель. В отличие от адаптивного и нейросетевого управления, УИО изменяет вход управления, который является сигналом, а не параметры регулятора, который является системой. В случае с нейросетевым управлением для обучения требуется большой объем данных, и быструю сходимость часто бывает трудно гарантировать, тогда как УИО обычно сходится за несколько повторений.

Распределенный (сетевой) закон УИО обеспечивает управление мультиагентной системой, где только часть агентов имеет прямой доступ к желаемой траектории выходного сигнала, а остальные получают информацию о выходе от соседей. Цель такой стратегии состоит в том, чтобы все агенты следовали траектории синхронно, при этом каждый из них обновляет свой управляющий сигнал на основе имеющейся у него информации. Метод УИО изначально был предложен как эффективный инструмент повышения точности выполнения операций роботами, и его развитие для решения новых задач современных и перспективных роботизированных сетевых систем, в частности для систем интеллектуальных производств, является актуальным.

**Степень разработанности темы исследования.** В интеллектуальном производстве роботы являются элементами исполнительного уровня, и связаны между собой информационной сетью, которая обеспечивает их взаимодействие и передает информацию об изменениях производственной программы. В стандартной постановке УИО предполагается, что целевая задача не меняется от повторения к повторению, а после очередного повторения система всякий раз возвращается в одно и то же начальное состояние. Однако в подобных сетевых системах во время их функционирования может возникнуть острая необходимость в изменении, например, выполняемой операции или конфигурации информационной сети. Это порождает переходную ошибку, которая может снизить точность ниже допустимого уровня в течение нескольких повторений, что ограничивает возможности применения УИО в новых задачах современных роботизированных систем. Кроме того, на практике точность выполняемой операции снижается из-за воздействия на систему случайных внешних возмущений, наличия шумов измерений или неопределенностей модели агентов. Как показывает анализ литературы, задачи, связанные с этими факторами, недостаточно изучены, поэтому существует необходимость в разработке новых методов синтеза и алгоритмов УИО, учитывающих указанные факторы.

**Цель работы** состоит в разработке методов синтеза и алгоритмов УИО современными и перспективными роботизированными сетевыми системами, в частности системами интеллектуальных производств, учитывающих новые особенности их функционирования.

**Задачи работы.** Исходя из цели работы, были поставлены следующие задачи.

1. Разработать алгоритм УИО для стохастических сетевых систем с изменяемой топологией сети с учетом неопределенностей в модели агентов.
2. Развить метод синтеза УИО с переключаемым законом управления для сетевых стохастических систем с изменяемой желаемой траекторией и изменяемыми параметрами агентов, и разработать алгоритм УИО данными системами.
3. Развить дивергентный метод векторных функций Ляпунова для класса стохастических сетевых систем с изменяемой желаемой траекторией, изменяемыми параметрами агентов и изменяемой топологией сети, и разработать алгоритм УИО данными системами.

**Методология и методы исследования.** Синтез управления основан на дивергентном методе векторных функций Ляпунова и его развитии для нового класса систем. В случае с дискретными системами он предполагает использование дискретного аналога дивергенции векторной функции Ляпунова при исследовании устойчивости системы. Данный метод показал свое преимущество в сравнении с другими известными алгоритмами УИО сетевыми системами [3].

Для получения оценки состояния и выходного сигнала в условиях случайных возмущений предлагается использовать фильтр Калмана. Для сетевых систем с изменяемыми параметрами агентов и желаемой траекторией получил развитие подход, который заключается в поиске переключаемого закона управления из решения задачи минимизации отклонения выходных сигналов агентов от доступных им образов желаемой траектории, который ранее был рассмотрен для случая простой стохастической системы [4]. Данный подход был также распространен на случай с подключением агентов к сети.

**Степень достоверности результатов** обеспечивается строгостью математических постановок и доказательств утверждений, корректным использованием математического аппарата, и подтверждением теоретических результатов математическим моделированием.

**Научная новизна** состоит в следующем:

1. Разработан алгоритм УИО стохастическими сетевыми системами с изменяемой топологией сети с учетом неопределенностей модели агентов, обеспечивающий сходимость ошибки обучения и компенсацию переходной ошибки, вызванной подключением новых агентов;
2. Метод синтеза УИО с переключаемым законом управления распространен на класс стохастических сетевых систем с изменяемой желаемой траекторией и изменяемыми параметрами агентов. На этой основе разработан алгоритм УИО такими сетевыми системами, обеспечивающий сходимость ошибки обучения и компенсирующий переходную ошибку, вызванную указанными изменениями;
3. Дивергентный метод векторных функций Ляпунова распространен на класс стохастических сетевых систем с изменяемыми параметрами агентов, изменяемой желаемой траекторией и изменяемой топологией сети. На этой основе разработан алгоритм УИО такими сетевыми системами, обеспечивающий сходимость ошибки обучения и компенсирующий переходную ошибку, вызванную указанными изменениями.

**Практическая значимость работы** состоит в том, что ее результаты могут служить основой программно-алгоритмического обеспечения решения задач в различных областях применения УИО, в том числе для управления роботизированными системами исполнительного уровня интеллектуальных производств.

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности.** В диссертации теоретические основы автоматического управления применены и развиты для разработки новых методов синтеза и алгоритмов УИО сетевыми системами с переключениями. Полученные теоретические результаты подтверждены расчетами и численным моделированием в среде MATLAB (области исследования 1, 2, 4, 5 специальности 2.3.1).

**Апробация полученных результатов.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих научных мероприятиях:

1. 27-я Международная научно-техническая конференция «Информационные системы и технологии» (ИСТ-2021), Нижний Новгород, Россия, НГТУ им. Р. Е. Алексеева, 23-24 апреля, 2021;
2. XVII Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами», Россия, Москва, ИПУ РАН, 6-9 сентября, 2021;

3. 2021 Modeling, Estimation and Control Conference (MECC 2021), Austin, USA, October 24-27, 2021;
4. Всероссийская научно-практическая конференция «Информационные технологии и прикладная математика» имени Л. В. Широкова, Арзамас, Россия, Арзамасский филиал ННГУ, 24-25 марта, 2022;
5. 14th IFAC Workshop on Adaptive and Learning Control Systems (ALCOS 2022), Casablanca, Morocco, June 29–July 1, 2022;
6. XXII Всероссийская молодежная научно-технической конференция «Будущее технической науки», Нижний Новгород, Россия, НГТУ им. Р. Е. Алексеева, 24-26 мая, 2023;
7. Семинар лаборатории №7 «Адаптивных и робастных систем им. Я. З. Цыпкина», Москва, Россия, ИПУ РАН, 10 октября, 2023.

Работа автора [5] вошла в список победителей Всероссийского конкурса научных работ аспирантов по теории управления и ее приложениям 2023 года, организованного Институтом проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН.

**Публикации.** Основное содержание диссертации отражено в 10 научных статьях, 4 из которых входят в издания из перечня ВАК [5–8], 4 – в мировую научную базу данных Web of Science [3, 8–10], 5 – в базу данных Scopus [3, 5, 8–10], и 8 – в базу РИНЦ [3, 5, 7, 8, 11–14].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №19-08-00528 а) и Российского научного фонда (гранты №21-71-00091 и №22-21-00612).

**Структура и объем диссертации.** Диссертация содержит введение, пять глав, заключение, список литературы, включающий 61 наименование. Работа изложена на 108 страницах, содержит 22 рисунка.

**В первой главе** дается общая характеристика состояния проблемы и определены основные понятия.

**Во второй главе** представлено решение задачи синтеза УИО сетевой системой без переключений, агенты которой представляют собой динамические стохастические объекты. В основу решения был положен дивергентный метод векторных функций Ляпунова [15]. Проведен сравнительный анализ полученного алгоритма с сетевой версией

алгоритма Сааба [16] на основе моделирования группы манипуляторов с поворотным гибким звеном.

**В третьей главе** описан алгоритм УИО стохастической сетевой системой с неопределенными параметрами при изменении топологии сети, что подразумевает изменение числа функционирующих агентов и связей между ними. Агенты представляют собой динамические объекты с дискретным временем и аффинными моделями неопределенностей. В случае с подключением агентов возникает дополнительная переходная ошибка, что может нарушить требование к точности выполнения операции. Для компенсации этой ошибки предложен соответствующий алгоритм.

**В четвертой главе** решается задача синтеза УИО сетевой стохастической системой с изменяемым режимом работы, который устанавливает параметры агентов и желаемую траекторию выходного сигнала. Он определяется для всех агентов одинаково и может быть изменен во время функционирования сетевой системы. Поскольку переключение режима влечет за собой дополнительную переходную ошибку, предложен специальный алгоритм переключения закона УИО. Законы управления, компенсирующие переходную ошибку, находятся из решения задачи минимизации отклонения выходного сигнала агента от доступных ему образов желаемой траектории.

**В пятой главе** представлено развитие метода синтеза УИО, описанного в главе 4, на сетевые системы, в которых помимо переключения режима работы агентов предусмотрено переключение топологии сети. Закон УИО, компенсирующий переходную ошибку в момент изменения топологии, так же находится из решения задачи минимизации отклонения выходного сигнала от доступных агенту образов желаемой траектории.

# 1 Общая характеристика состояния проблемы

Современные процессы быстрых изменений в экономике, цифровизация промышленности и активное внедрение новых высоких технологий неразрывно связаны с переходом к новой промышленной парадигме, которую именуют «Индустрией 4.0», или четвертой промышленной революцией. Впервые данный термин появился в национальной стратегии развития Германии на 2011 год, и обозначал отход от примитивной автоматизации производства с ее многочисленными автономными индустриальными роботами к уровню сетевых киберфизических систем. Под последними понимают комплексные системы из вычислительных и физических элементов, взаимодействующих друг с другом для прогнозирования, самонастройки и адаптации к изменениям. Киберфизические системы максимально автоматизированы, что позволяет частично или полностью исключить человека из производственных процессов, тем самым минимизировать влияние человеческого фактора.

Широкое распространение термин «Индустрия 4.0» получил в 2016 году благодаря работе [17] как синоним изложенной в ней концепции четвертой промышленной революции, согласно которой ближайшее будущее будет определяться широким внедрением киберфизических систем в производство и обслуживание человеческих потребностей. Сейчас в широком смысле «Индустрия 4.0» означает интеграцию передовых технологий в весь производственный процесс. К данным технологиям причисляют аналитику больших данных, Интернет вещей, искусственный интеллект, автономные роботы и облачные вычисления. Такой подход приводит к созданию *интеллектуальных производств* [1], которые характеризуются высокой степенью интеграции информационных технологий и гибкостью систем автоматизации производства, что способствует повышению производительности, безопасности процесса производства, качества выпускаемой продукции и конкурентоспособности предприятий, а также обеспечивает быструю адаптацию к частым изменениям спроса и постоянному совершенствованию технологий.

Создание интеллектуальных производств стало одним из движущих факторов в развитии *сетевых систем*, которые в данном случае представляют собой группы взаимосвязанных роботов, технологических машин и различного рода промышленного оборудования. Такие системы позволяют быстро перестроить производство с учетом изменения типа и объёма выпускаемой продукции. В общем же случае под сетевыми системами понимают совокупность подсистем (узлов), объединенных физическими или информационными связями. Помимо интеллектуальных производств, в качестве при-

меров сетевых систем можно упомянуть многопроцессорные системы передачи и обработки информации, транспортные и логистические сети, системы координированного управления групповым движением транспорта и подвижных роботов, распределенные системы управления электрическими сетями.

Широкие возможности практического применения сетевых систем привели к появлению целого ряда новых задач теории управления, сформировав одно из самых быстро развивающихся направлений этой теории. Оно опирается на классическую теорию управления, решая традиционные для нее вопросы управляемости системы, построения достоверной оценки ее состояния, стабилизация системы и многие другие. При этом характер рассматриваемых систем привносит в них новые понятия, такие как архитектура сети, хранилище данных, каналы связи, скорость передачи данных и др. Это в свою очередь приводит к новым математическим моделям и дополнительным вопросам, выходящих за рамки классической теории управления и требующих подключения аппаратов теории информации и теории графов [18].

В литературе по сетевым системам управления к настоящему времени выделились два больших раздела – *управление через коммуникационные сети* (англ. «networked control») и *управление сетями* (англ. «control of networks»). Первый раздел связан с удаленным управлением системами и рассматривает задачи управления при коммуникационных и вычислительных ограничениях, например, влияние на систему управления квантования и дискретизации данных, задержек и потерь данных, ограниченной скорости передачи данных [19–21]. Задачи, рассматриваемые в рамках данной работы, относятся ко второму разделу. Управлению сетями посвящено большое количество работ, и их количество продолжает стремительно расти, о чем свидетельствуют работы [22, 23]. Также оно имеет многочисленные приложения, которые, в частности, включают в себя управление динамикой роботов и транспортных средств [24–26].

Задачи управления сетями часто обозначают терминами «*групповое управление*» или «*мультиагентное управление*». В данном случае объект управления разбивается на автономные подсистемы, реализующие принципы интеллектуального управления, принимая решения и действуя самостоятельно на основе доступной им информации. Информация может быть заранее сохранена в их памяти или получена ими как при помощи собственных датчиков, так и от других подсистем посредством каналов связи. Информационная сеть в такой системе описывается графом, который характеризует связи и взаимодействия между подсистемами, которые в свою очередь происходят со-

гласно установленным в системе правилам, в сетевой теории управления часто называемыми *протоколами*. Такой способ поведения называется *агентным*, узлы называются *агентами*, а вся система – *мультиагентной*. Одной из основных целей управления мультиагентной системой является *синхронизация*, означающая согласованное поведение агентов. Частным случаем задач синхронизации являются *задачи достижения консенсуса*, в которых состояния или выходы агентов должны сойтись к общему значению.

Как отмечалось выше, когда говорят об управлении мультиагентными системами, речь идет об интеллектуальном управлении. К *интеллектуальному управлению* относят методы управления, которые используют различные подходы искусственного интеллекта, такие как искусственные нейронные сети, нечёткая логика, эволюционные вычисления, генетические алгоритмы и машинное обучение. Для динамических систем в технике концепция машинного обучения была определена Я. З. Цыпкиным [2] в начале 60-х годов прошлого века как процесс получения в системе необходимой реакции на внешние сигналы путем многократных воздействий на нее и внешней корректировки. Метод *управления с итеративным обучением (УИО)* полностью вписывается в эту концепцию, поскольку он позволяет повышать точность выполнения операции в системах, функционирующих в повторяющемся режиме, используя для этого информацию с предыдущих повторений.

Впервые концепция УИО была изложена в патенте США [27] в 1971 году. Данная концепция основывалась на «командных сигналах», которые хранились в памяти компьютера и обновлялись на каждом повторении относительно отклонения фактического отклика исполнительного механизма от желаемого отклика. Спустя три года, в 1974 году была опубликована статья [28], в которой были рассмотрены общие характеристики повторяющихся процессов и предложен метод построения их дискретной модели. Дальнейшее развитие данное направление получило в работе [29], опубликованной в 1978 году. Представленный алгоритм корректировки движения манипулятора показал удовлетворительные результаты как в теории, так и на практике.

В 1984 году, после новаторского исследования [30], УИО привлекло наибольшее внимание исследователей различных областей. В данной работе был рассмотрен процесс работы механического робота, при котором каждое новое повторение выполняемой роботом операции улучшается за счет данных с предыдущих повторений. Другими словами, процесс функционирования объекта имеет итеративную структуру обучения, при этом управляющий входной сигнал на каждом новом повторении представляет собой

управляющий сигнал с предыдущего повторения, скорректированный с учетом приращения ошибки, которая в свою очередь определяется как разность между производной траектории движения, полученной на предыдущем повторении, и производной желаемой траектории (далее данный алгоритм будем называть алгоритмом Аримото по имени первого автора данной работы). В данной работе рассмотренный метод именовался как «улучшающий процесс», а термин «управление с итеративным обучением» стал широко использоваться только после работы [31] тех же авторов, датированной также 1984 годом. В русскоязычной литературе по теории управления эти идеи начал развивать профессор А. А. Первозванский в работах [32, 33], датированных 1995 годом, но, несмотря на продемонстрированную эффективность именуемого им «обучаемого управления», они не получили широкого распространения.

Таким образом, метод УИО ориентирован на системы, которые многократно повторяют одну и ту же заранее заданную операцию конечной продолжительности, которая обычно задается желаемой траекторией выходного сигнала. Данный метод позволяет последовательно улучшать точность или какой-либо другой показатель, постепенно уточняя входное воздействие на систему за счет накопления и использования информации, полученной ранее в результате выполнения операции. Другими словами УИО, по сути, реализует простейший механизм обучения для данного класса систем, аналогичный, например, возникающему при выполнении человеком физического упражнения, когда каждое повторение способствует улучшению техники его выполнения. Данный подход позволяет достичь требуемой точности в таких системах в том числе при наличии динамики, точное моделирование которой не представляется возможным.

УИО отличается от других стратегий управления, связанных с обучением, таких как адаптивное управление, нейросетевое управление и повторяющееся управление (ПУ). Главное отличие первых двух стратегий от УИО заключается в том, что они изменяют параметры регулятора, который является системой, тогда как УИО изменяет вход управления, который является сигналом. В случае с нейросетевым управлением для обучения требуется большой объем данных, и быструю сходимость часто бывает трудно гарантировать, тогда как УИО обычно сходится за несколько повторений. Больше всего УИО похоже на ПУ, за исключением того, что ПУ предназначено для непрерывной работы, а УИО – для пошаговой. Это отличие заключается в разной постановке начальных условий для каждого повторения. В ПУ начальные условия устанавливаются на конечные условия предыдущего повторения, а в УИО система возвращается в

исходную позицию после каждого повторения так, что начальные условия остаются одинаковыми на всех повторениях. Разница в установке начальных условий приводит к различным методам анализа и результатам [18].

В настоящее время УИО находит многочисленные практические приложения, прежде всего в производстве и робототехнике. Например, авторы работы [34] предлагают использовать УИО в конвейерной системе высокоточного лазерного напыления металла, где нанесение каждого слоя принимается за итерацию. В микро- и нанопроизводстве при использовании рулонной технологии важно очень точно отслеживать положение и регулировать натяжение полотна, и в [35] решается такая задача с применением УИО. В [36] проводится синтез УИО с экспериментальной проверкой эффективности для портального робота, а в патенте [37] предлагается использовать итеративное обучение в манипуляторах, применяемых в автомобилестроении для выполнения лазерной резки по различным схемам.

В [38] представлен метод отказоустойчивого управления токовой петлей, основанного на УИО, для восстановления работоспособности многофазных приводов с постоянными магнитами в условиях отказа вследствие обрыва цепи. Такой подход требует только измерения крутящего момента, что позволяет избежать необходимости в использовании сложных алгоритмов поиска и диагностики неисправностей. Таким образом, УИО предоставляет исчерпывающую информацию о системе и обеспечивает устойчивость моделирования неопределенностей.

Авторы [39] рассмотрели задачу, когда контроллер системы не имеет непосредственный доступ к желаемой траектории и получает информацию о ней от человека-оператора. Идея состоит в том, чтобы в случае, когда оператор не может добиться точного отслеживания траектории, система сама могла делать выводы о его намерениях и корректировать управляющий сигнал соответствующим образом. Использование УИО в этом случае позволило обучить систему путем многократного повторения оператором действий, направленных на воспроизведение системой желаемой траектории движения, и обеспечило высокую точность отслеживания.

Последнее время наблюдается тенденция эффективного использования УИО в сельском хозяйстве. Так, например, в [40] решалась задача оптимизации коэффициента конверсии корма (отношения количества затраченного корма к единице полученной продукции) для бройлеров, за счет которой удалось снизить количество корма, воды и электроэнергии, необходимых для производства зрелого бройлера. Учитывая

повторяющийся характер производственного процесса, УИО является здесь наиболее очевидным решением. Основных математических моделей процесса роста бройлеров не существует, поэтому в данной работе использовались динамические модели нейронных сетей, которые обеспечили основу для синтеза управления. Конечный коэффициент конверсии корма при убое является одним из основных параметров продуктивности бройлерного производства, и в [40] он минимизируется с помощью модифицированного терминального закона УИО. Имитационная оценка новых методов синтеза управления проводилась с использованием эвристической модели выращивания бройлеров, основанной на знаниях эксперта, и была подтверждена экспериментально на современном бройлерном производстве.

Принцип УИО эффективно используется в задачах улучшения аэродинамической эффективности работы роторных ветровых турбин [41]. В таких задачах он служит для повышения качественных характеристик ветровых турбин, снижения экстремальных нагрузок на рабочие лопасти и сохранения максимальной производительности. Также метод УИО нашел применение в задачах слежения за транспортными потоками, где могут возникать проблемы, связанные с отклонением от заданной траектории или нарушениями в канале передачи информации. Многие авторы для решения этих проблем предлагают использовать УИО, где на текущем пролете по траектории должна использоваться информация, полученная на предыдущем пролете с целью коррекции управления для уменьшения отклонения от желаемой траектории. Так, в работе [42] итеративное обучение используется при управлении беспилотным летательным аппаратом для оптимизации траектории полета и общего пройденного расстояния, а в [43] на основе УИО разработана гибкая схема отслеживания желаемой траектории движения для облачных самоходных колесных роботов, занимающихся транспортировкой груза.

Одна из наиболее интересных и перспективных сфер применения УИО — медицина и здравоохранение. В работе [44] авторы используют УИО при моделировании роботов-тренажеров для реабилитации больных после инсульта. В результате инсульта погибают миллионы нейронов, из-за чего возможен паралич конечностей. Для формирования новых нейронных связей и восстановления подвижности необходимо как можно больше двигаться, однако при параличе это невозможно. В этом случае возможно использование электромеханических роботов, работающих в повторяющемся режиме, которые позволят больному сделать первые движения за счет функциональной электростимуляции. Авторы [44] предлагают использовать УИО для повышения

производительности таких роботов, при этом система будет способна реагировать на физиологические изменения, и при наличии добровольных усилий пациента ослабить электростимуляцию, позволяя пациенту самому совершать движения.

*Распределенный (сетевой) закон УИО* обеспечивает управление мультиагентной системой, где только часть агентов имеет прямой доступ к желаемой траектории выходного сигнала, а остальные получают информацию о выходе от соседей. Цель такой стратегии состоит в том, чтобы все агенты следовали траектории синхронно подобно строю, при этом каждый агент обновляет свой управляющий сигнал на основе информации о своей траектории и траектории соседей с предыдущего повторения.

Идея сетевого УИО впервые была представлена в 2009 году [45], где была доказана устойчивость закона обновления управления, при котором входной сигнал для следующего повторения вычисляется на основе предыдущего входного сигнала и производной ошибки слежения. В статье топология сети описывается графом связей, который в свою очередь представлен в виде направленного остовного дерева. Динамика неоднородных агентов описывается нелинейными моделями с непрерывным временем. В [46] доказательство распространено на произвольные ориентированные графы и упрощен критерий устойчивости для случая однородных агентов.

Работа [47] была одной из первых, где эффективность предложенных сетевых алгоритмов УИО была подтверждена как моделированием, так и экспериментами с группой квадрокоптеров. Результаты [47] получили дальнейшее развитие в [48]. В [49] эффективность предложенных сетевых алгоритмов УИО также подтверждена моделированием и экспериментами с группой мобильных роботов. При этом использовались дискретные модели с дискретными версиями алгоритмов Аримото.

Анализ современного состояния задачи показывает, что в подавляющем большинстве исследований по сетевому УИО для линейных систем использовался алгоритм Аримото или его дискретный аналог, а математический аппарат базировался на методе супервекторов [50]. Для нелинейных систем тот же алгоритм Аримото был объединен с техникой априорных оценок, что давало консервативные результаты. Как правило, степень консерватизма оценить невозможно: приведенные чисто иллюстративные примеры не отражают возможных приложений.

В [51] была предложена конструкция УИО для мультиагентных систем на основе двумерных дискретных моделей (линейные повторяющиеся процессы). Вычислительная сложность алгоритма проектирования была уменьшена за счет использования дву-

мерного аналога теоремы Факса–Мюррея, хорошо известного в теории сетевых систем. Подход [51] был расширен в [3] на стохастические мультиагентные системы. Результаты последней работы с некоторыми уточнениями будут рассмотрены далее в главе 2.

В стандартной постановке УИО предполагается, что целевая задача не меняется от повторения к повторению, а система всякий раз возвращается в одно и то же начальное состояние. Однако, например, в сетевых системах интеллектуальных производств во время функционирования может возникнуть острая необходимость в изменении желаемой траектории, параметров агентов, количества функционирующих агентов или характера обмена информацией между ними. Это порождает переходную ошибку, которая может снизить точность ниже допустимого уровня в течение нескольких повторений, что ограничивает возможности УИО в новых задачах современных роботизированных систем. Кроме того, на практике точность выполняемой операции снижается из-за воздействия на систему случайных внешних возмущений, наличия шумов измерений или неопределенностей модели агентов. Как показывает анализ литературы, задачи, связанные с этими факторами, недостаточно изучены, поэтому существует необходимость в разработке новых алгоритмов УИО, учитывающих указанные факторы.

В [52] рассматривается задача УИО группой систем, выполняющих одну и ту же операцию асинхронно, приступая к работе на разных повторениях, с возможностью отключения по необходимости. Схема УИО использует двухэтапный подход, где на первом повторении система адаптирует управление используя информацию от других систем, а на втором продолжает работу самостоятельно с учетом отклонения от общей модели. Обмен информацией между системами позволил сократить время, необходимое для достижения заданной точности, в особенности для систем, редко выполняющих эксперименты. Метод проверен на нескольких кривошипно-ползунных установках, выполняющих эксперименты в различных последовательностях.

В [53] рассмотрен сценарий реконфигурации управления при заранее определенном изменении желаемой траектории между повторениями. Стохастическая версия того же сценария была рассмотрена в [4] и [54]. В цитируемых работах переходная ошибка компенсировалась алгоритмами УИО на основе соответствующих правил переключения. Также влияние изменения желаемой траектории на процесс обучения исследовались в работах [55] и [56]. Задачи УИО сетевой системой при переключении топологии сети ранее рассматривались, например, в [57] и [58]. В данных работах решается задача достижения консенсуса при изменении информационной структуры, при этом предпо-

лагается, что количество функционирующих агентов фиксированно.

Данная работа посвящена методам синтеза и алгоритмам УИО сетевыми системами, которые учитывают переключения желаемых траекторий, параметров агентов и топологии сети. Такие сценарии возникают, например, когда агенты представляют собой порталные роботы, функционирующие по некоторой программе в интеллектуальном производстве. В начале основной части проводится сравнение двух подходов УИО стохастическими сетевыми системами без переключений. Первый подход предложен в [16] для простых дискретных стохастических систем, и основан на решении задачи минимизации дисперсии ошибок векторов управления, при этом для расчета управляющего сигнала используются ковариационные матрицы ошибок состояния и управления. В [3] он получил развитие на сетевые системы, и в данной работе будет рассматриваться этот алгоритм с учетом некоторых корректировок. Вторым подходом основан на дивергентном методе векторных функций Ляпунова [15] с использованием оценки состояния, полученной с помощью фильтра Калмана. Вторым подходом имеет ряд преимуществ, и в рамках данной работы был развит на системы с переключениями.

Далее рассматриваются три задачи, связанные со стохастическими сетевыми системами с переключениями. Первая из них касается сетевых систем с изменяемой топологией, агенты которой представляют собой дискретные динамические объекты с аффинной моделью неопределенностей. Для компенсации переходной ошибки, росту которой способствует подключение агентов, предложен подход, который заключается в передаче подключаемым агентам управляющих сигналов функционирующих агентов в моменты их подключения к сети.

Затем описывается задача с изменением режима работы агентов, в которой каждый режим определяет свою желаемую траекторию выходного сигнала и параметры агентов. С целью уменьшения переходной ошибки, вызываемой изменением режима, предложено специальное правило переключения закона УИО, которое является развитием результатов работы [4]. Компенсирующие переходные ошибки законы управления находятся из решения задачи минимизации среднеквадратической ошибки и используются только на повторениях, на которых происходит переключение режима.

Последняя из рассмотренных задач касается синтеза УИО для сетевых систем, в которых возможно переключение режима работы агентов и топологии сети. Для компенсации ошибки, возникающей при переключении режимов, используется подход из предыдущей задачи. Он же был распространен на случай подключения агентов.

## 2 Управление с итеративным обучением

### СТОХАСТИЧЕСКИМИ СЕТЕВЫМИ СИСТЕМАМИ

В данной главе рассмотрим задачу УИО сетевой системой, агенты которой представляют собой динамические стохастические объекты. Описаны два метода, в первом из которых решается задача минимизации дисперсии ошибок векторов управления [16], а в основу второго был положен дивергентный метод векторных функций Ляпунова [15]. Проводится их сравнительный анализ на основе моделирования группы манипуляторов с поворотным гибким звеном, связанных информационной сетью.

#### 2.1 Описание сетевой системы и постановка задачи

Рассмотрим сетевую систему, состоящую из  $N$  однотипных агентов, каждый из которых функционирует в повторяющемся режиме. Выполняемая операция одинакова для всех, и по ее окончании агенты возвращаются в исходную позицию. Динамика агента  $i$  на повторении  $k$  описывается следующей дискретной моделью в пространстве состояний:

$$\begin{aligned}x_i(k, p + 1) &= Ax_i(k, p) + Bu_i(k, p) + D\omega_i(k, p), \\y_i(k, p) &= Cx_i(k, p), \\y_{\nu i}(k, p) &= y_i(k, p) + G\nu_i(k, p), \quad i \in \mathcal{I}, k \geq 0, 0 \leq p \leq T - 1,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где  $x_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – вектор состояния,  $u_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_u}$  – вектор входных переменных (вектор управления),  $\omega_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$  – вектор шумов объекта,  $y_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_y}$  – вектор выходных переменных,  $y_{\nu i}(k, p) \in \mathbb{R}^{n_{\nu y}}$  – вектор измеренных выходных переменных,  $\nu_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_\nu}$  – вектор шумов измерений,  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $C$  и  $G$  – постоянные матрицы соответствующих размерностей,  $p$  – дискретное время на повторении  $k$ ,  $T < \infty$  – период повторения, одинаковый для всех  $i$ , и  $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$  – множество всех агентов. Граничные условия  $x_i(k, 0)$  и  $u_i(0, p)$  считаются известными для каждого агента.

Предполагается, что шумы объекта  $\omega_i(k, p)$  и шумы измерений  $\nu_i(k, p)$  представляют собой независимые гауссовские белые шумы с нулевыми математическими ожиданиями, причем такие, что  $S_{\omega i} = E[\omega_i(k, p)\omega_i^\top(k, p)]$  является неотрицательно определенной матрицей,  $S_{\nu i} = E[\nu_i(k, p)\nu_i^\top(k, p)]$  – положительно определенной матрицей для всех  $k$ , где  $E$  – оператор математического ожидания. При этом  $\nu_i(\cdot, \cdot)$  имеет нулевую взаимную корреляцию с  $\omega_i(\cdot, \cdot)$  на любом повторении и в любой момент времени, а  $\omega_i(\cdot, \cdot)$  и

$\nu_i(\cdot, \cdot)$  не коррелируют с  $\omega_j(\cdot, \cdot)$  и  $\nu_j(\cdot, \cdot)$  для двух различных агентов  $i$  и  $j$ . Отметим, что поскольку возмущения считаются гауссовыми процессами, то некоррелированные возмущения эквивалентны независимым возмущениям.

Связи между агентами представим в виде направленного графа

$$\mathcal{G} = (\mathcal{I}, \mathcal{E}), \quad (2.2)$$

где  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{I} \times \mathcal{I}$  – ребра графа. Возможность доступа агента  $i$  к выходным данным агента  $j$  задается ребром, направленным от вершины  $j$  к вершине  $i$ , и обозначается упорядоченной парой  $(j, i) \in \mathcal{E}$ . Элементы матрицы смежности

$$\mathcal{S}(\mathcal{G}) = \mathcal{S} = [s_{ij}]_{i,j=1}^N \quad (2.3)$$

задаются следующим образом:  $s_{ij} > 0$ , если  $(j, i) \in \mathcal{E}$ ,  $s_{ij} = 0$  в противном случае, и  $s_{ii} = 0$ . В простейшем случае значения ненулевых элементов матрицы смежности равны единице. Также вводится матрица Лапласа

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}) = \mathcal{L} = [l_{ij}]_{i,j=1}^N, \quad (2.4)$$

где  $l_{ij} = -s_{ij}$ , если  $i \neq j$ , и  $l_{ii} = \sum_{n=1}^N s_{in}$ .

Обозначим желаемую траекторию за  $y^{ref}(p)$  и будем считать, что непосредственный доступ к ней могут иметь только некоторая подгруппа агентов. Возможность получения агентами информации о желаемой траектории выходного сигнала определяется матрицей

$$\mathcal{R} = \text{diag}[r_i]_{i=1}^N, \quad (2.5)$$

где  $r_i = 1$ , если  $y^{ref}(p)$  доступна агенту  $i$ , и  $r_i = 0$  в противном случае. В рамках данной задачи агентов, для которых  $r_i = 1$ , будем именовать *лидерами*, в противном случае – *ведомыми агентами*. Последние могут получать информацию о траектории выходного сигнала от любых других агентов, т. е. для них существует хотя бы один агент  $j$ , для которого  $s_{ij} > 0$ .

## 2.2 Сетевой алгоритм Сааба

В [16] рассмотрена задача УИО простой дискретной системой с учетом внешних возмущений и шумов измерений. Разработанный авторами алгоритм основан на поиске такого

управления, которое позволит минимизировать дисперсию ошибки вектора управления. Он относится к *алгоритмам D-типа*, которые для построения управления используют аналог производной ошибки обучения. В данном разделе расширим этот подход на случай управления сетевыми системами.

Закон УИО для сетевых систем в общем случае определяется как

$$u_i(k+1, p-1) = u_i(k, p-1) + \Delta u_i(k+1, p-1), \quad (2.6)$$

где  $\Delta u_i(k+1, p-1)$  – корректирующая поправка, которую в рамках данного подхода будем формировать в виде

$$\begin{aligned} \Delta u_i(k+1, p-1) = & \\ = & K_i(k, p-1) \left( r_i \left( (y^{ref}(p) - y^{ref}(p-1)) - (y_{\nu i}(k, p) - y_{\nu i}(k, p-1)) \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{j \in \mathcal{I}} s_{ij} \left( (y_{\nu j}(k, p) - y_{\nu j}(k, p-1)) - (y_{\nu i}(k, p) - y_{\nu i}(k, p-1)) \right) \right), \quad i \in \mathcal{I}, \end{aligned}$$

где  $K_i(k, p-1)$  – матрица усиления,  $r_i$  – диагональный элемент матрицы (2.5),  $s_{ij}$  – элементы матрицы смежности (2.3). Введем ошибку измеренного выходного сигнала агента  $i$  на повторении  $k$

$$e_{\nu i}(k, p) = y^{ref}(p) - y_{\nu i}(k, p), \quad (2.7)$$

относительно которой корректирующая поправка с учетом матрицы (2.4) переписется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta u_i(k+1, p-1) = & K_i(k, p-1) \left( r_i (e_{\nu i}(k, p) - e_{\nu i}(k, p-1)) + \right. \\ & \left. + \sum_{j \in \mathcal{I}} l_{ij} (e_{\nu j}(k, p) - e_{\nu j}(k, p-1)) \right), \quad i \in \mathcal{I}. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Предполагается, что желаемая траектория  $y^{ref}(p)$  является выходным сигналом системы

$$\begin{aligned} x^{ref}(p+1) &= Ax^{ref}(p) + Bu^{ref}(p), \\ y^{ref}(p) &= Cx^{ref}(p), \quad 0 \leq p \leq T-1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

и для любой  $y^{ref}(p)$  и соответствующего начального условия  $x^{ref}(0)$  существует единственное управление  $u^{ref}(p)$ , генерирующее эту траекторию, то есть желаемая траектория реализуема.

Введем векторы ошибок состояния и управления агента  $i$  на повторении  $k$

$$\delta x_i(k, p) = x^{ref}(p) - x_i(k, p), \quad \delta u_i(k, p) = u^{ref}(p) - u_i(k, p), \quad (2.10)$$

и ковариационные матрицы векторов ошибок агентов  $i$  и  $j$

$$P_{ij}^x(k, p) = \mathbb{E}[\delta x_i(k, p)\delta x_j^\top(k, p)], \quad P_{ij}^u(k, p) = \mathbb{E}[\delta u_i(k, p)\delta u_j^\top(k, p)].$$

Начальные векторы  $\delta x_i(k, 0)$  и  $\delta u_i(0, p)$  являются гауссовскими белыми шумами с нулевыми математическими ожиданиями, при этом  $P_{ii}^x(k, 0) = \mathbb{E}[\delta x_i(k, 0)\delta x_i^\top(k, 0)]$  является неотрицательно определенной матрицей, а  $P_{ii}^u(0, p) = \mathbb{E}[\delta u_i(0, p)\delta u_i^\top(0, p)]$  – симметричной положительно определенной матрицей. Более того,  $\delta x_i(k, 0)$  не коррелирует с  $\delta u_i(0, p)$ ,  $\omega_i(k, p)$  и  $\nu_i(k, p)$ . Для двух различных агентов  $i$  и  $j$  начальные векторы  $\delta x_i(k, 0)$  и  $\delta u_i(0, p)$  не коррелированы с  $\delta x_j(k, 0)$ ,  $\delta u_j(0, p)$ ,  $\omega_j(k, p)$  и  $\nu_j(k, p)$ .

Задача состоит в том, чтобы найти такие матрицы усиления  $K_i(k, p)$ , которые позволят минимизировать дисперсии ошибок векторов управления каждого агента сетевой системы. Запишем систему относительно векторов (2.10):

$$\begin{aligned} \delta x_i(k, p+1) &= A\delta x_i(k, p) + B\delta u_i(k, p) - D\omega_i(k, p), \\ \delta u_i(k+1, p) &= (I_{n_u} - r_i K_i(k, p)CB)\delta u_i(k, p) + r_i K_i(k, p)(C - CA)\delta x_i(k, p) + \\ &\quad + r_i K_i(k, p)CD\omega_i(k, p) + r_i K_i(k, p)G(\nu_i(k, p+1) - \nu_i(k, p)) + \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{I}} \left( -l_{ij} K_i(k, p)CB\delta u_j(k, p) + l_{ij} K_i(k, p)(C - CA)\delta x_j(k, p) + \right. \\ &\quad \left. + l_{ij} K_i(k, p)CD\omega_j(k, p) + l_{ij} K_i(k, p)G(\nu_j(k, p+1) - \nu_j(k, p)) \right), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $I_{n_u}$  – единичная матрица размера  $n_u$ .

Введем векторы

$$X_i^+ = \begin{bmatrix} \delta u_i(k+1, p) \\ \delta x_i(k, p+1) \end{bmatrix}, \quad X_i = \begin{bmatrix} \delta u_i(k, p) \\ \delta x_i(k, p) \end{bmatrix}, \quad Y_i = \begin{bmatrix} \omega_i(k, p) \\ \nu_i(k, p+1) - \nu_i(k, p) \end{bmatrix},$$

и матрицы

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \begin{bmatrix} \Phi_{11i} & \Phi_{12i} \\ \Phi_{21i} & \Phi_{22i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n_u} - r_i K_i(k, p) C B & r_i K_i(k, p) (C - C A) \\ B & A \end{bmatrix}, \\ \Gamma_i &= \begin{bmatrix} \Gamma_{11i} & \Gamma_{12i} \\ \Gamma_{21i} & \Gamma_{22i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i K_i(k, p) C D & r_i K_i(k, p) G \\ -D & 0 \end{bmatrix}, \\ \Psi_{ij} &= \begin{bmatrix} \Psi_{11ij} & \Psi_{12ij} \\ \Psi_{21ij} & \Psi_{22ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{ij} K_i(k, p) C B & l_{ij} K_i(k, p) (C - C A) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Lambda_{ij} &= \begin{bmatrix} \Lambda_{11ij} & \Lambda_{12ij} \\ \Lambda_{21ij} & \Lambda_{22ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{ij} K_i(k, p) C D & l_{ij} K_i(k, p) G \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

и перепишем систему (2.11) в виде

$$X_i^+ = \Phi_i X_i + \Gamma_i Y_i + \sum_{j \in \mathcal{I}} (\Psi_{ij} X_j + \Lambda_{ij} Y_j).$$

Будем искать усиление  $K_i(k, p)$  таким образом, чтобы минимизировать след ковариационной матрицы ошибки  $P_i^+ = \mathbb{E}[X_i^+ (X_i^+)^T]$ . Запишем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned}P_i^+ &= \Phi_i \mathbb{E}[X_i X_i^T] \Phi_i^T + \Phi_i \mathbb{E}[X_i Y_i^T] \Gamma_i^T + \Gamma_i \mathbb{E}[Y_i X_i^T] \Phi_i^T + \Gamma_i \mathbb{E}[Y_i Y_i^T] \Gamma_i^T + \\ &+ \sum_{j \in \mathcal{I}} \left( \Phi_i \mathbb{E}[X_i X_j^T] \Psi_{ij}^T + \Phi_i \mathbb{E}[X_i Y_j^T] \Lambda_{ij}^T + \Gamma_i \mathbb{E}[Y_i X_j^T] \Psi_{ij}^T + \Gamma_i \mathbb{E}[Y_i Y_j^T] \Lambda_{ij}^T + \right. \\ &+ \Psi_{ij} \mathbb{E}[X_j X_i^T] \Phi_i^T + \Lambda_{ij} \mathbb{E}[Y_j X_i^T] \Phi_i^T + \Psi_{ij} \mathbb{E}[X_j Y_i^T] \Gamma_i^T + \Lambda_{ij} \mathbb{E}[Y_j Y_i^T] \Gamma_i^T \left. \right) + \\ &+ \sum_{j \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{I}} \left( \Psi_{ij} \mathbb{E}[X_j X_m^T] \Psi_{im}^T + \Psi_{ij} \mathbb{E}[X_j Y_m^T] \Lambda_{im}^T + \Lambda_{ij} \mathbb{E}[Y_j X_m^T] \Psi_{im}^T + \Lambda_{ij} \mathbb{E}[Y_j Y_m^T] \Lambda_{im}^T \right).\end{aligned}$$

Поскольку переменная  $\delta x_i(k, 0)$  не коррелирована с  $\delta u_i(0, p)$ ,  $\omega_i(k, p)$  и  $\nu_i(k, p)$ , а для двух различных агентов  $i$  и  $j$  векторы  $\delta x_i(k, 0)$  и  $\delta u_i(0, p)$  не коррелированы с  $\delta x_j(k, 0)$ ,  $\delta u_j(0, p)$ ,  $\omega_j(k, p)$  и  $\nu_j(k, p)$ , то  $\mathbb{E}[X_i Y_j^T] = \mathbb{E}[Y_i X_j^T] = 0$  для всех  $i$  и  $j$ . Также  $\mathbb{E}[Y_i Y_j^T] = 0$  для двух различных агентов  $i$  и  $j$ , поскольку  $\omega_i(\cdot, \cdot)$  и  $\nu_i(\cdot, \cdot)$  не коррелируют с  $\omega_j(\cdot, \cdot)$  и  $\nu_j(\cdot, \cdot)$ . Тогда

$$\begin{aligned}P_i^+ &= \Phi_i \mathbb{E}[X_i X_i^T] \Phi_i^T + \Gamma_i \mathbb{E}[Y_i Y_i^T] \Gamma_i^T + \Gamma_i \mathbb{E}[Y_i Y_i^T] \Lambda_{ii}^T + \Lambda_{ii} \mathbb{E}[Y_i Y_i^T] \Gamma_i^T + \\ &+ \sum_{j \in \mathcal{I}} \left( \Phi_i \mathbb{E}[X_i X_j^T] \Psi_{ij}^T + \Psi_{ij} \mathbb{E}[X_j X_i^T] \Phi_i^T + \Lambda_{ij} \mathbb{E}[Y_j Y_j^T] \Lambda_{ij}^T \right) + \sum_{j \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{I}} \Psi_{ij} \mathbb{E}[X_j X_m^T] \Psi_{im}^T,\end{aligned}$$

где

$$\mathbb{E}[X_i X_j^\top] = \begin{bmatrix} P_{ij}^u(k, p) & P_{ij}^{ux}(k, p) \\ (P_{ij}^{ux}(k, p))^\top & P_{ij}^x(k, p) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{E}[Y_i Y_i^\top] = \begin{bmatrix} S_{\omega i} & 0 \\ 0 & 2S_{\nu i} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $P_{ij}^{ux}(k, p) = \mathbb{E}[\delta u_i(k, p) \delta x_j^\top(k, p)] = 0$  для всех  $i$  и  $j$ . Доказательство данного утверждения будет опущено, поскольку оно аналогично доказательству в случае с простой системой [16]. Таким образом след  $P_i^+$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \text{tr}(P_i^+) = & \text{tr} \left( \Phi_{11i} P_{ii}^u(k, p) \Phi_{11i}^\top + \Phi_{12i} P_{ii}^x(k, p) \Phi_{12i}^\top + \Phi_{21} P_{ii}^u(k, p) \Phi_{21}^\top + \right. \\ & + \Phi_{22} P_{ii}^x(k, p) \Phi_{22}^\top + \Gamma_{11i} S_{\omega i} \Gamma_{11i}^\top + 2\Gamma_{12i} S_{\nu i} \Gamma_{12i}^\top + \Gamma_{21} S_{\omega i} \Gamma_{21}^\top + \Gamma_{11i} S_{\omega i} \Lambda_{11ii}^\top + \\ & + 2\Gamma_{12i} S_{\nu i} \Lambda_{12ii}^\top + \Lambda_{11ii} S_{\omega i} \Gamma_{11i}^\top + 2\Lambda_{12ii} S_{\nu i} \Gamma_{12i}^\top + \sum_{j \in \mathcal{I}} \left( \Phi_{11i} P_{ij}^u(k, p) \Psi_{11ij}^\top + \right. \\ & + \Phi_{12i} P_{ij}^x(k, p) \Psi_{12ij}^\top + \Psi_{11ij} P_{ji}^u(k, p) \Phi_{11i}^\top + \Psi_{12ij} P_{ji}^x(k, p) \Phi_{12i}^\top + \Lambda_{11ij} S_{\omega j} \Lambda_{11ij}^\top + \\ & \left. + 2\Lambda_{12ij} S_{\nu j} \Lambda_{12ij}^\top \right) + \sum_{j \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{I}} \left( \Psi_{11ij} P_{jm}^u(k, p) \Psi_{11im}^\top + \Psi_{12ij} P_{jm}^x(k, p) \Psi_{12im}^\top \right) \Big). \end{aligned}$$

Подставляя в последнее известные значения, получим

$$\begin{aligned} \text{tr}(P_i^+) = & \text{tr} \left( P_{ii}^u(k, p) - r_i P_{ii}^u(k, p) B^\top C^\top K_i^\top(k, p) - \right. \\ & - r_i K_i(k, p) C B P_{ii}^u(k, p) + r_i^2 K_i(k, p) C B P_{ii}^u(k, p) B^\top C^\top K_i^\top(k, p) + \\ & + r_i^2 K_i(k, p) (C - CA) P_{ii}^x(k, p) (C - CA)^\top K_i^\top(k, p) + B P_{ii}^u(k, p) B^\top + \\ & + A P_{ii}^x(k, p) A^\top + r_i (r_i + 2l_{ii}) K_i(k, p) C D S_{\omega i} D^\top C^\top K_i^\top(k, p) + \\ & + D S_{\omega i} D^\top + 2r_i (r_i + 2l_{ii}) K_i(k, p) G S_{\nu i} G^\top K_i^\top(k, p) - \\ & - \sum_{j \in \mathcal{I}} l_{ij} \left( P_{ij}^u(k, p) B^\top C^\top K_i^\top(k, p) + K_i(k, p) C B P_{ji}^u(k, p) \right) + \\ & + \sum_{j \in \mathcal{I}} l_{ij} r_i \left( K_i(k, p) C B (P_{ij}^u(k, p) + P_{ji}^u(k, p)) B^\top C^\top K_i^\top(k, p) + \right. \\ & + K_i(k, p) (C - CA) (P_{ij}^x(k, p) + P_{ji}^x(k, p)) (C - CA)^\top K_i^\top(k, p) \Big) + \\ & + \sum_{j \in \mathcal{I}} l_{ij}^2 \left( K_i(k, p) C D S_{\omega j} D^\top C^\top K_i^\top(k, p) + 2K_i(k, p) G S_{\nu j} G^\top K_i^\top(k, p) \right) + \\ & + \sum_{j \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{I}} l_{ij} l_{im} \left( K_i(k, p) C B P_{jm}^u(k, p) B^\top C^\top K_i^\top(k, p) + \right. \\ & \left. + K_i(k, p) (C - CA) P_{jm}^x(k, p) (C - CA)^\top K_i^\top(k, p) \right) \Big). \quad (2.12) \end{aligned}$$

Чтобы найти матрицу усиления  $K_i(k, p)$ , минимизирующую след матрицы  $P_i^+$ ,

вычислим производную (2.12) относительно  $K_i(k, p)$  и приравняем ее к нулю:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\text{tr}(P_i^+))}{dK_i(k, p)} = & -2r_i P_{ii}^u(k, p) B^\top C^\top + \\
& + 2r_i^2 K_i(k, p) C B P_{ii}^u(k, p) B^\top C^\top + 2r_i^2 K_i(k, p) (C - CA) P_{ii}^x(k, p) (C - CA)^\top + \\
& + 2r_i (r_i + 2l_{ii}) K_i(k, p) C D S_{\omega i} D^\top C^\top + 4r_i (r_i + 2l_{ii}) K_i(k, p) G S_{\nu i} G^\top - \\
& - 2 \sum_{j \in \mathcal{I}} l_{ij} P_{ij}^u(k, p) B^\top C^\top + 2 \sum_{j \in \mathcal{I}} l_{ij} r_i \left( K_i(k, p) C B (P_{ij}^u(k, p) + P_{ji}^u(k, p)) B^\top C^\top + \right. \\
& + K_i(k, p) (C - CA) (P_{ij}^x(k, p) + P_{ji}^x(k, p)) (C - CA)^\top \left. + \right. \\
& + 2 \sum_{j \in \mathcal{I}} l_{ij}^2 \left( K_i(k, p) C D S_{\omega j} D^\top C^\top + 2K_i(k, p) G S_{\nu j} G^\top \right) + \\
& + 2 \sum_{j \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{I}} l_{ij} l_{im} \left( K_i(k, p) C B P_{jm}^u(k, p) B^\top C^\top + \right. \\
& \left. + K_i(k, p) (C - CA) P_{jm}^x(k, p) (C - CA)^\top \right) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда искомая матрица усиления дается выражением

$$\begin{aligned}
K_i(k, p) = & \left( r_i Z P_{ii}(k, p) M^\top + \sum_{j \in \mathcal{I}} l_{ij} Z P_{ij}(k, p) M^\top \right) \left( r_i^2 M P_{ii}(k, p) M^\top + \right. \\
& + r_i (r_i + 2l_{ii}) H S_i H^\top + \sum_{j \in \mathcal{I}} l_{ij} r_i M (P_{ij}(k, p) + P_{ji}(k, p)) M^\top + \\
& \left. + \sum_{j \in \mathcal{I}} l_{ij}^2 H S_j H^\top + \sum_{j \in \mathcal{I}} \sum_{m \in \mathcal{I}} l_{ij} l_{im} M P_{jm}(k, p) M^\top \right)^{-1}, \quad (2.13)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
P_{ij}(k, p) = & \text{diag} \left[ P_{ij}^u(k, p) \quad P_{ij}^x(k, p) \right], \quad S_i = \text{diag} \left[ S_{\omega i} \quad 2S_{\nu i} \right], \\
M = & \left[ C B \quad (C - CA) \right], \quad H = \left[ C D \quad G \right], \quad Z = \left[ I_{n_u} \quad 0 \right].
\end{aligned}$$

В этом случае ковариационные матрицы ошибки состояния будут определяться уравнениями

$$P_{ii}^x(k, p+1) = A P_{ii}^x(k, p) A^\top + B P_{ii}^u(k, p) B^\top + D S_{\omega i} D^\top, \quad (2.14)$$

$$P_{ij}^x(k, p+1) = A P_{ij}^x(k, p) A^\top + B P_{ij}^u(k, p) B^\top, \quad i \neq j, \quad (2.15)$$

а ковариационные матрицы ошибки управления уравнениями

$$\begin{aligned}
P_{ii}^u(k+1, p) = & ZP_{ii}(k, p)Z^\top - r_i ZP_{ii}(k, p)M^\top K_i^\top(k, p) - \\
& - r_i K_i(k, p)MP_{ii}(k, p)Z^\top + r_i^2 K_i(k, p)MP_{ii}(k, p)M^\top K_i(k, p)^\top + \\
& + r_i(r_i + 2l_{ii})K_i(k, p)HS_iH^\top K_i^\top(k, p) - \\
& - \sum_{m \in \mathcal{I}} l_{im} \left( ZP_{im}(k, p)M^\top K_i^\top(k, p) + K_i(k, p)MP_{mi}(k, p)Z^\top \right) + \\
& + \sum_{m \in \mathcal{I}} r_i l_{im} K_i(k, p)M(P_{im}(k, p) + P_{mi}(k, p))M^\top K_i^\top(k, p) + \\
& + \sum_{m \in \mathcal{I}} l_{im}^2 K_i(k, p)HS_mH^\top K_i^\top(k, p) + \\
& + \sum_{m \in \mathcal{I}} \sum_{n \in \mathcal{I}} l_{im} l_{in} K_i(k, p)MP_{mn}(k, p)M^\top K_i^\top(k, p),
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
P_{ij}^u(k+1, p) = & ZP_{ij}(k, p)Z^\top - r_j ZP_{ij}(k, p)M^\top K_j^\top(k, p) - \\
& - r_i K_i(k, p)MP_{ij}(k, p)Z^\top + r_i r_j K_i(k, p)MP_{ij}(k, p)M^\top K_j(k, p)^\top + \\
& + r_i l_{ji} K_i(k, p)HS_iH^\top K_j^\top(k, p) + r_j l_{ij} K_i(k, p)HS_jH^\top K_j^\top(k, p) - \\
& - \sum_{m \in \mathcal{I}} \left( l_{jm} ZP_{im}(k, p)M^\top K_j^\top(k, p) + l_{im} K_i(k, p)MP_{mj}(k, p)Z^\top \right) + \\
& + \sum_{m \in \mathcal{I}} r_i l_{jm} K_i(k, p)MP_{im}(k, p)M^\top K_j^\top(k, p) + \\
& + \sum_{m \in \mathcal{I}} r_j l_{im} K_i(k, p)MP_{mj}(k, p)M^\top K_j^\top(k, p) + \\
& + \sum_{m \in \mathcal{I}} l_{im} l_{jm} K_i(k, p)HS_mH^\top K_j^\top(k, p) + \\
& + \sum_{m \in \mathcal{I}} \sum_{n \in \mathcal{I}} l_{im} l_{jn} K_i(k, p)MP_{mn}(k, p)M^\top K_j^\top(k, p), \quad i \neq j.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Полученные результаты обобщаются в виде алгоритма 1, который в дальнейшем будем именовать как *сетевой алгоритм Сааба*.

### 2.3 Сетевое управление на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова

Как можно заметить, алгоритм Сааба обладает следующими недостатками. Во-первых, в данном алгоритме расчеты проводятся относительно зашумленных сигналов без фильтрации, а во-вторых, для расчета управления используется аналог производной от ошибки обучения, что только усиливает помехи. Далее приведем подход к УИО

---

**Алгоритм 1.** Сетевой алгоритм Сааба

---

**Вход:** Матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $C$  и  $G$ , номера агентов  $\mathcal{I}$ , ковариационные матрицы  $S_{\omega_i}$  и  $S_{\nu_i}$ , начальные условия  $x_i(k, 0)$ ,  $u_i(0, p)$ ,  $P_{ij}^x(k, 0)$  и  $P_{ij}^u(0, p)$ , желаемая траектория  $y^{ref}(p)$ , матрицы связей  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$ , период повторения  $T$ .

- 1: **Для**  $k = 0, 1, \dots$
  - 2:     **Для**  $p = 0, \dots, T - 1$
  - 3:         **Для всех**  $i \in \mathcal{I}$
  - 4:             **Если**  $p = 0$
  - 5:                 Вычислить  $y_{\nu_i}(k, p)$  из (2.1).
  - 6:                 Вычислить  $e_{\nu_i}(k, p)$  как (2.7).
  - 7:             **Конец Если**
  - 8:             Вычислить  $x_i(k, p + 1)$  и  $y_{\nu_i}(k, p + 1)$  из (2.1).
  - 9:             Вычислить  $e_{\nu_i}(k, p + 1)$  как (2.7).
  - 10:             Вычислить  $P_{ij}^x(k, p + 1)$  как (2.14), если  $i = j$ , и (2.15) в противном случае.
  - 11:             Вычислить  $K_i(k, p)$  как (2.13).
  - 12:             Вычислить  $u_i(k + 1, p)$  как (2.6) с учетом (2.8).
  - 13:             Вычислить  $P_{ij}^u(k + 1, p)$  как (2.16), если  $i = j$ , и (2.17) в противном случае.
  - 14:         **Конец Для**
  - 15:     **Конец Для**
  - 16: **Конец Для**
- Выход:** Измеренные выходы  $y_{\nu_i}(k, p)$ .
- 

стохастическими сетевыми системами, основанный на дивергентном методе векторных функций Ляпунова, который лишен данных недостатков.

В данном случае будем непосредственно использовать желаемую траекторию, без рассмотрения вспомогательной системы (2.9). Поскольку фактический выходной сигнал  $y_i(k, p)$  недоступен наблюдению, то вместо ошибки обучения вида

$$e_i(k, p) = y^{ref}(p) - y_i(k, p), \quad (2.18)$$

ведем в рассмотрение

$$\hat{e}_i(k, p) = y^{ref}(p) - \hat{y}_i(k, p), \quad (2.19)$$

где  $\hat{y}_i(k, p) = C\hat{x}_i(k, p)$ , и  $\hat{x}_i(k, p)$  – оценка вектора состояния, полученная с использованием фильтра Калмана

$$\hat{x}_i(k, p + 1) = A\hat{x}_i(k, p) + Bu_i(k, p) + F_i(y_{\nu_i}(k, p) - C\hat{x}_i(k, p)), \quad i \in \mathcal{I}, \quad (2.20)$$

с начальным условием  $\hat{x}_i(k, 0) = F_i y_{\nu_i}(k, 0)$ , где

$$F_i = AS_i C^\top (CS_i C^\top + GS_{\nu_i} G^\top)^{-1},$$

и  $S_i$  – решение алгебраического уравнения Риккати

$$S_i = AS_iA^\top - AS_iC^\top(CS_iC^\top + GS_{\nu_i}G^\top)^{-1}CS_iA^\top + DS_{\omega_i}D^\top, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Задача заключается в поиске такого управления (протокола)  $u_i(k, p)$ , которое позволит достичь консенсуса в следующем смысле:

$$\mathbb{E}[\|\hat{e}_i(k, p)\|^2] \leq \kappa \varrho^k + \beta, \quad \kappa > 0, 0 < \varrho < 1, \beta > 0, \quad (2.21)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\|u_i(k, p)\|^2] = \mathbb{E}[\|u_i(\infty, p)\|] < \infty, \quad i \in \mathcal{I}, 0 \leq p \leq T - 1. \quad (2.22)$$

Предельное значение  $u_i(\infty, p)$  обычно называют *обученным управлением*.

Закон УИО будем формировать в виде (2.6) с корректирующей поправкой

$$\begin{aligned} \Delta u_i(k+1, p-1) = & K_1(\hat{x}_i(k+1, p-1) - \hat{x}_i(k, p-1)) + \\ & + K_2 \left( r_i(y^{ref}(p) - \hat{y}_i(k, p)) + \sum_{j \in \mathcal{I}} s_{ij}(\hat{y}_j(k, p) - \hat{y}_i(k, p)) \right), \quad i \in \mathcal{I}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где  $K_1$  и  $K_2$  – матрицы протокола. Заметим, что в отличие от алгоритма Сааба, здесь непосредственно используется ошибка обучения. Такие алгоритмы относятся к *алгоритмам Р-типа*.

При такой структуре закона управления задача сводится к поиску матриц  $K_1$  и  $K_2$ , при которых данный закон гарантирует выполнение условий сходимости (2.21)-(2.22). Для этого вначале запишем динамику сетевой системы в виде 2D-модели относительно приращений переменных. Введем ошибку оценивания

$$\tilde{x}_i(k, p) = x_i(k, p) - \hat{x}_i(k, p), \quad (2.24)$$

и векторы приращений оценки и ошибки оценивания за один шаг по переменной  $k$

$$\hat{\eta}_i(k+1, p+1) = \hat{x}_i(k+1, p) - \hat{x}_i(k, p), \quad (2.25)$$

$$\tilde{\eta}_i(k+1, p+1) = \tilde{x}_i(k+1, p) - \tilde{x}_i(k, p) \quad (2.26)$$

соответственно. Перепишем динамику (2.1) относительно (2.19), (2.25) и (2.26) следующие

щим образом:

$$\begin{aligned}
\tilde{\eta}_i(k+1, p+1) &= (A - F_i C)\tilde{\eta}_i(k+1, p) + \\
&\quad + D\Delta\omega_i(k+1, p-1) - F_i G\Delta\nu_i(k+1, p-1), \\
\hat{\eta}_i(k+1, p+1) &= F_i C\tilde{\eta}_i(k+1, p) + A\hat{\eta}_i(k+1, p) + \\
&\quad + B\Delta u_i(k+1, p-1) + F_i G\Delta\nu_i(k+1, p-1), \\
\hat{e}_i(k+1, p) &= -CF_i C\tilde{\eta}_i(k+1, p) - CA\hat{\eta}_i(k+1, p) + \hat{e}_i(k, p) - \\
&\quad - CB\Delta u_i(k+1, p-1) - CF_i G\Delta\nu_i(k+1, p-1),
\end{aligned} \tag{2.27}$$

где

$$\Delta\omega_i(k+1, p-1) = \omega_i(k+1, p-1) - \omega_i(k, p-1), \tag{2.28}$$

$$\Delta\nu_i(k+1, p-1) = \nu_i(k+1, p-1) - \nu_i(k, p-1). \tag{2.29}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}_i(k+1, p) &= \left[ \tilde{\eta}_i^\top(k+1, p) \quad \hat{\eta}_i^\top(k+1, p) \right]^\top, \quad \bar{u}_i(k+1, p) = \Delta u_i(k+1, p-1), \\
\bar{\omega}_i(k+1, p) &= \left[ \Delta\omega_i^\top(k+1, p-1) \quad \Delta\nu_i^\top(k+1, p-1) \right]^\top,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

и перепишем (2.27) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\bar{\eta}_i(k+1, p+1) &= A_{11i}\bar{\eta}_i(k+1, p) + A_{12}\hat{e}_i(k, p) + B_1\bar{u}_i(k+1, p) + D_{1i}\bar{\omega}_i(k+1, p), \\
\hat{e}_i(k+1, p) &= A_{21i}\bar{\eta}_i(k+1, p) + A_{22}\hat{e}_i(k, p) + B_2\bar{u}_i(k+1, p) + D_{2i}\bar{\omega}_i(k+1, p),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{11i} &= \begin{bmatrix} A - F_i C & 0 \\ F_i C & A \end{bmatrix}, \quad A_{12} = 0, \quad A_{21i} = \begin{bmatrix} -CF_i C & -CA \end{bmatrix}, \quad A_{22} = I_{n_y}, \\
B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad B_2 = -CB, \quad D_{1i} = \begin{bmatrix} D & -F_i G \\ 0 & F_i G \end{bmatrix}, \quad D_{2i} = \begin{bmatrix} 0 & -CF_i G \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Данная система записана в стандартной форме дискретного повторяющегося процесса, которая представляет собой частный случай *2D-моделей* [59]. Ее особенность заключается в том, что она, по сути, описывает два процесса: процесс изменения переменных на каждом повторении и процесс перехода от одного повторения к другому.

Выразим корректирующую поправку (2.23) в терминах (2.19), (2.25) и с учетом

матрицы (2.4):

$$\bar{u}_i(k+1, p) = K_1 \hat{\eta}_i(k+1, p) + K_2 \left( r_i \hat{e}_i(k, p) + \sum_{j \in \mathcal{I}} l_{ij} \hat{e}_j(k, p) \right), \quad i \in \mathcal{I}. \quad (2.31)$$

Тогда, вводя расширенные векторы

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(k, p) &= \left[ \bar{\eta}_1^\top(k, p) \quad \dots \quad \bar{\eta}_N^\top(k, p) \right]^\top, \quad \hat{e}(k, p) = \left[ \hat{e}_1^\top(k, p) \quad \dots \quad \hat{e}_N^\top(k, p) \right]^\top, \\ \bar{\omega}(k, p) &= \left[ \bar{\omega}_1^\top(k, p) \quad \dots \quad \bar{\omega}_N^\top(k, p) \right]^\top, \end{aligned}$$

окончательно запишем сетевую 2D-модель в виде

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(k+1, p+1) &= \Phi_{11} \bar{\eta}(k+1, p) + \Phi_{12} \hat{e}(k, p) + D_1 \bar{\omega}(k+1, p), \\ \hat{e}(k+1, p) &= \Phi_{21} \bar{\eta}(k+1, p) + \Phi_{22} \hat{e}(k, p) + D_2 \bar{\omega}(k+1, p), \end{aligned} \quad (2.32)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \text{diag}[A_{11i} + B_1 K_1 H]_{i=1}^N, \quad \Phi_{12} = (\mathcal{L} + \mathcal{R}) \otimes B_1 K_2, \quad \Phi_{21} = \text{diag}[A_{21i} + B_2 K_1 H]_{i=1}^N, \\ \Phi_{22} &= I_{Nn_y} + (\mathcal{L} + \mathcal{R}) \otimes B_2 K_2, \quad D_1 = \text{diag}[D_{1i}]_{i=1}^N, \quad D_2 = \text{diag}[D_{2i}]_{i=1}^N, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_x} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

и  $\otimes$  – символ произведения Кронекера.

Для решения воспользуемся дивергентным методом векторных функций Ляпунова [15]. Введем в рассмотрение векторную функцию Ляпунова

$$V(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} V_1(\xi) \\ V_2(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{2n_x}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}^{n_y}, \quad (2.33)$$

где  $V_1(\xi) > 0$ ,  $\xi \neq 0$ ,  $V_2(\epsilon) > 0$ ,  $\epsilon \neq 0$ ,  $V_1(0) = 0$  и  $V_2(0) = 0$ . Стохастический аналог дивергенции этой функции вдоль траекторий системы (2.32) запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}V(\xi, \epsilon) &= \mathbb{E} \left[ V_1(\bar{\eta}(k+1, p+1)) | \bar{\eta}(k+1, p) = \xi, \hat{e}(k, p) = \epsilon \right] - \\ &\quad - V_1(\xi) + \mathbb{E} \left[ V_2(\hat{e}(k+1, p)) | \bar{\eta}(k+1, p) = \xi, \hat{e}(k, p) = \epsilon \right] - V_2(\epsilon). \end{aligned}$$

**Теорема 2.1.** [15] Пусть существуют векторная функция  $V(\xi, \epsilon)$  вида (2.33) и положительные постоянные  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  и  $\gamma$  такие, что на траекториях системы (2.32) выпол-

няются неравенства

$$\begin{aligned} c_1 \|\xi\|^2 &\leq V_1(\xi) \leq c_2 \|\xi\|^2, \\ c_1 \|\epsilon\|^2 &\leq V_2(\epsilon) \leq c_2 \|\epsilon\|^2, \\ \mathcal{D}V(\xi, \epsilon) &\leq \gamma - c_3(\|\xi\|^2 + \|\epsilon\|^2). \end{aligned}$$

Тогда закон управления (2.6) с корректирующей поправкой (2.23) обеспечит выполнение условия сходимости ошибки (2.21).

Поскольку система (2.32) линейна, выберем компоненты векторной функции Ляпунова (2.33) в виде квадратичных форм

$$V_1(\xi) = \xi^\top \bar{P}_1 \xi, \quad V_2(\epsilon) = \epsilon^\top \bar{P}_2 \epsilon, \quad (2.34)$$

где  $\bar{P}_1 = I_N \otimes P_1$ ,  $\bar{P}_2 = I_N \otimes P_2$ , и потребуем выполнения неравенства

$$\mathcal{D}V(\xi, \epsilon) \leq \gamma - (\xi^\top \bar{Q}_1 \xi + \epsilon^\top \bar{Q}_2 \epsilon + v^\top \bar{R} v),$$

где  $\bar{Q}_1 = I_N \otimes Q_1$ ,  $Q_1 \succ 0$ ,  $\bar{Q}_2 = I_N \otimes Q_2$ ,  $Q_2 \succ 0$ ,  $\bar{R} = I_N \otimes R$ ,  $R \succ 0$ , и  $v = \bar{K}_1 \xi + \bar{K}_2 \epsilon$  с матрицами  $\bar{K}_1 = I_N \otimes K_1 H$  и  $\bar{K}_2 = (\mathcal{L} + \mathcal{R}) \otimes K_2$  представляет собой корректирующую поправку (2.31) относительно расширенных векторов  $\bar{\eta}(k+1, p) = \xi$  и  $\hat{e}(k, p) = \epsilon$ . Вычисляя дивергенцию функции (2.33) с учетом (2.34), получим

$$\mathcal{D}V(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix}^\top (\Phi^\top \bar{P} \Phi - \bar{P}) \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix} + 2(\text{tr}[\bar{P}_1 S_1] + \text{tr}[\bar{P}_2 S_2]),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \text{diag} \left[ \bar{P}_1 \quad \bar{P}_2 \right], \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}, \quad S_1 = \text{diag}[S_{1i}]_{i=1}^N, \quad S_2 = \text{diag}[S_{2i}]_{i=1}^N, \\ S_{1i} &= \begin{bmatrix} DS_{\omega i} D^\top & F_i G S_{\nu i} G^\top F_i^\top \\ 0 & F_i G S_{\nu i} G^\top F_i^\top \end{bmatrix}, \quad S_{2i} = C F_i G S_{\nu i} G^\top F_i^\top C^\top. \end{aligned}$$

Пологая  $\gamma = 2(\text{tr}[\bar{P}_1 S_1] + \text{tr}[\bar{P}_2 S_2])$ , получим, что условия теоремы 2.1 будут вы-

полнены, если неравенство

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix}^\top \left( \Phi^\top \bar{P} \Phi - \bar{P} + \bar{Q} + \bar{K}^\top \bar{R} \bar{K} \right) \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq 0,$$

где  $\bar{Q} = \text{diag} [\bar{Q}_1 \quad \bar{Q}_2]$  и  $\bar{K} = [\bar{K}_1 \quad \bar{K}_2]$ , разрешимо относительно положительно определенной матрицы  $\bar{P}$ . Это эквивалентно следующим неравенствам:

$$\Phi^\top \bar{P} \Phi - \bar{P} + \bar{Q} + \bar{K}^\top \bar{R} \bar{K} \preceq 0, \quad \bar{P} \succ 0. \quad (2.35)$$

Относительно переменных  $\bar{P}$  и  $\bar{K}$  первое неравенство (2.35) является нелинейными. Сведем его к линейному с помощью эквивалентных преобразований и вспомогательных переменных. Используя лемму Шура о дополнении, перепишем его в виде

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & \Phi^\top & I_{N(2n_x+n_y)} & \bar{K}^\top \\ \Phi & \bar{P}^{-1} & 0 & 0 \\ I_{N(2n_x+n_y)} & 0 & \bar{Q}^{-1} & 0 \\ \bar{K} & 0 & 0 & \bar{R}^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0.$$

Обозначим  $\bar{X} = \text{diag} [\bar{X}_1 \quad \bar{X}_2] = \bar{P}^{-1}$ ,  $\bar{X}_1 = I_N \otimes X_1$ ,  $\bar{X}_2 = I_N \otimes X_2$  и введем переменные  $Y_1 = K_1 Z$ ,  $Y_2 = K_2 X_2$  и переменную  $Z$  как решение линейного матричного уравнения  $H X_1 = Z H$ . Тогда после дополнительных преобразований получим следующую систему линейных матричных уравнений и неравенств относительно  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  и  $Z$ :

$$\begin{bmatrix} \bar{X} & (\bar{\Phi}_1 \bar{X} + \bar{\Phi}_2 \bar{Y} \bar{\Phi}_3)^\top & \bar{X} & \bar{\Phi}_3^\top \bar{Y}^\top \\ \bar{\Phi}_1 \bar{X} + \bar{\Phi}_2 \bar{Y} \bar{\Phi}_3 & \bar{X} & 0 & 0 \\ \bar{X} & 0 & \bar{Q}^{-1} & 0 \\ \bar{Y} \bar{\Phi}_3 & 0 & 0 & \bar{R}^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \bar{X} \succ 0, \quad H X_1 = Z H, \quad (2.36)$$

где

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 & \bar{Y}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{Y}_1 = I_N \otimes Y_1, \quad \bar{Y}_2 = I_N \otimes Y_2, \quad \bar{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \text{diag}[A_{11i}]_{i=1}^N & 0 \\ \text{diag}[A_{21i}]_{i=1}^N & I_{N n_y} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} I_N \otimes B_1 \\ I_N \otimes B_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Phi}_3 = \text{diag} [I_N \otimes H \quad (\mathcal{L} + \mathcal{R}) \otimes I_{n_y}].$$

Полученные результаты обобщим в виде следующей теоремы и алгоритма.

**Теорема 2.2.** *Закон УИО (2.6) с корректирующей поправкой (2.23) обеспечивает достижение консенсуса в смысле условий (2.21)-(2.22), если система матричных уравнений и неравенств (2.36) разрешима относительно переменных  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  и  $Z$ .*

*При этом матрицы протокола определяются как  $K_1 = Y_1 Z^{-1}$  и  $K_2 = Y_2 X_2^{-1}$*

---

**Алгоритм 2.** Алгоритм УИО на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова для стохастических сетевых систем

---

**Вход:** Матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $C$  и  $G$ , номера агентов  $\mathcal{I}$ , ковариационные матрицы  $S_{\omega_i}$  и  $S_{\nu_i}$ , начальные условия  $x_i(k, 0)$  и  $u_i(0, p)$ , желаемая траектория  $y^{ref}(p)$ , матрицы связей  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$ , период повторения  $T$ , весовые матрицы  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $R$ .

- 1: Решить систему (2.36) относительно  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  и  $Z$ .
- 2: Вычислить  $K_1 = Y_1 Z^{-1}$  и  $K_2 = Y_2 X_2^{-1}$ .
- 3: **Для**  $k = 0, 1, \dots$
- 4:     **Для**  $p = 0, \dots, T - 1$
- 5:         **Для всех**  $i \in \mathcal{I}$
- 6:             **Если**  $k > 0$
- 7:                 Вычислить  $u_i(k, p)$  согласно (2.6) с учетом (2.23).
- 8:             **Конец Если**
- 9:             Получить  $y_{\nu_i}(k, p)$  из (2.1).
- 10:             Вычислить  $\hat{x}_i(k, p + 1)$  как (2.20) и  $\hat{y}_i(k, p) = C\hat{x}_i(k, p)$ .
- 11:         **Конец Для**
- 12:     **Конец Для**
- 13: **Конец Для**

**Выход:** Измеренные выходы  $y_{\nu_i}(k, p)$ .

---

Матрицы  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $R$  здесь аналогичны весовым матрицам в теории линейно-квадратичного регулятора, изменяя которые можно корректировать управляющий сигнал и достичь желаемых характеристик. Также отметим, что доказательство выполнения условия ограниченности управления (2.22) выполняется по одной и той же схеме для всех рассмотренных в работе случаев. Детально оно приведено при доказательстве теоремы 5.2 для самого общего случая.

## 2.4 Моделирование сетевой системы

В среде MATLAB с использованием пакетов YALMIP и SeDuMi было проведено численное моделирование сетевой системы, состоящей из одинаковых манипуляторов с поворотным гибким звеном (рисунок 1), управление которой в одном случае происходит согласно сетевому алгоритму Сааба, а во втором – алгоритму на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова. Каждый манипулятор представляет собой

гибкое звено, закрепленное одним концом на двигателе постоянного тока, который вращает звено из одного конца в другой в горизонтальной плоскости. Отклонение другого конца звена определяется тензодатчиком и выводится в виде аналогового сигнала, пропорционального отклонению. Динамика движения каждого манипулятора описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}(t) &= -\frac{B_{eq}}{J_{eq}}\dot{\theta}(t) + \frac{K_s}{J_{eq}}\alpha(t) + \frac{1}{J_{eq}}\tau(t), \\ \ddot{\alpha}(t) &= \frac{B_{eq}}{J_{eq}}\dot{\theta}(t) - K_s \left( \frac{J_l + J_{eq}}{J_{eq}J_l} \right) \alpha(t) - \frac{1}{J_{eq}}\tau(t),\end{aligned}$$

где  $\theta(t)$  – угол поворота сервопривода,  $\alpha(t)$  – угол отклонения звена,  $\tau(t)$  – крутящий момент на силовом редукторе сервопривода, приводящем звено в движение,  $K_s$  – жесткость звена,  $J_{eq}$  – момент инерции сервопривода,  $B_{eq}$  – коэффициент вязкого трения сервопривода,  $J_l$  – момент инерции звена относительно центра масс [60].

Определив векторы состояния, управления и выходных переменных как  $x = [\theta \ \alpha \ \dot{\theta} \ \dot{\alpha}]^\top$ ,  $u = \tau$  и  $y = \theta$  соответственно, и учитывая внешние возмущения и шумы измерений, перепишем данные уравнения в виде модели в пространстве состояний с непрерывным временем:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(k, t) &= A^{cont}x_i(k, t) + B^{cont}(u_i(k, t) + \mu_i(k, t)), \\ y_i(k, t) &= C^{cont}x_i(k, t), \\ y_{\varsigma_i}(k, t) &= y_i(k, t) + \varsigma_i(k, t),\end{aligned}\tag{2.37}$$

где

$$A^{cont} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_s}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{K_s(J_l + J_{eq})}{J_{eq}J_l} & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{cont} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \\ -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad C^{cont} = [1 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$\mu_i(k, t)$  и  $\varsigma_i(k, t)$  – независимые непрерывные гауссовские белые шумы с постоянными интенсивностями  $Q_n$  и  $R_n$  соответственно.

Взяв во внимание эксперименты, описанные в [60], параметры манипуляторов бы-

ли заданы следующими:

$$\begin{aligned} K_s &= 1,3 \text{ Н} \cdot \text{м/рад}, & J_{eq} &= 2,08 \times 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ B_{eq} &= 0,004 \text{ Н} \cdot \text{м/(рад/с)}, & Q_n &= 10^{-7}, & R_n &= 10^{-4} \end{aligned} \quad (2.38)$$

и  $J_l = 0,0038 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Продолжительность повторения составляет 3 с, и желаемая траектория выходного сигнала задана уравнением

$$y^{ref}(t) = \pi \left( \frac{t^2}{6} - \frac{t^3}{27} \right), \quad t \in [0, 3], \quad (2.39)$$

график которого представлен на рисунке 2.



Рис. 1 – Манипулятор с поворотным гибким звеном

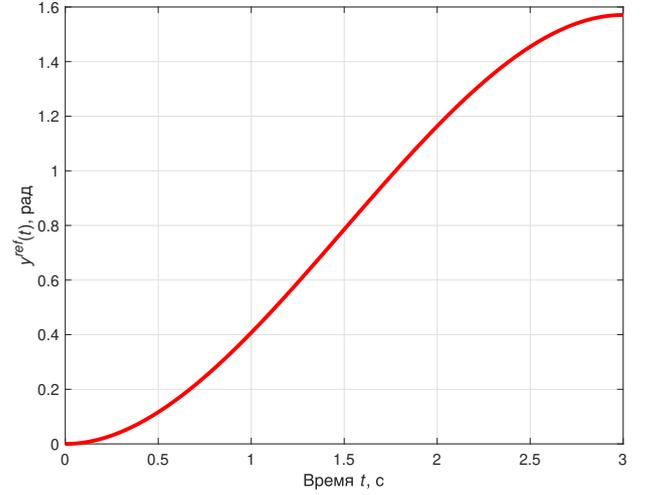


Рис. 2 – Желаемая траектория выходного сигнала

Перейдем от модели (2.37) к эквивалентной дискретной модели вида (2.1), в которой матрицы определяются соотношениями

$$\begin{aligned} A &= \exp(A^{cont} T_s), & B &= \int_0^{T_s} \exp(A^{cont} \tau) B^{cont} d\tau, & C &= C^{cont}, \\ D &= \left[ \int_0^{T_s} \exp(A^{cont} \tau) B^{cont} Q_n (B^{cont})^\top (\exp(A^{cont} \tau))^\top d\tau \right]^{\frac{1}{2}}, & G &= \left( \frac{R_n}{T_s} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

и  $\omega_i(k, p)$  и  $\nu_i(k, p)$  имеют единичные ковариации  $S_{\omega_i} = I_{n_x}$  и  $S_{\nu_i} = 1$  соответственно. Здесь  $T_s$  – период дискретизации, который выбран равным 0,01 с.

В качестве демонстрационного примера рассмотрим сетевую систему из трех одинаковых манипуляторов данного типа, среди которых выделен один лидер ( $i = 1$ ), и первый ведомый агент ( $i = 2$ ) получает информацию от лидера, а второй ( $i = 3$ ) – от

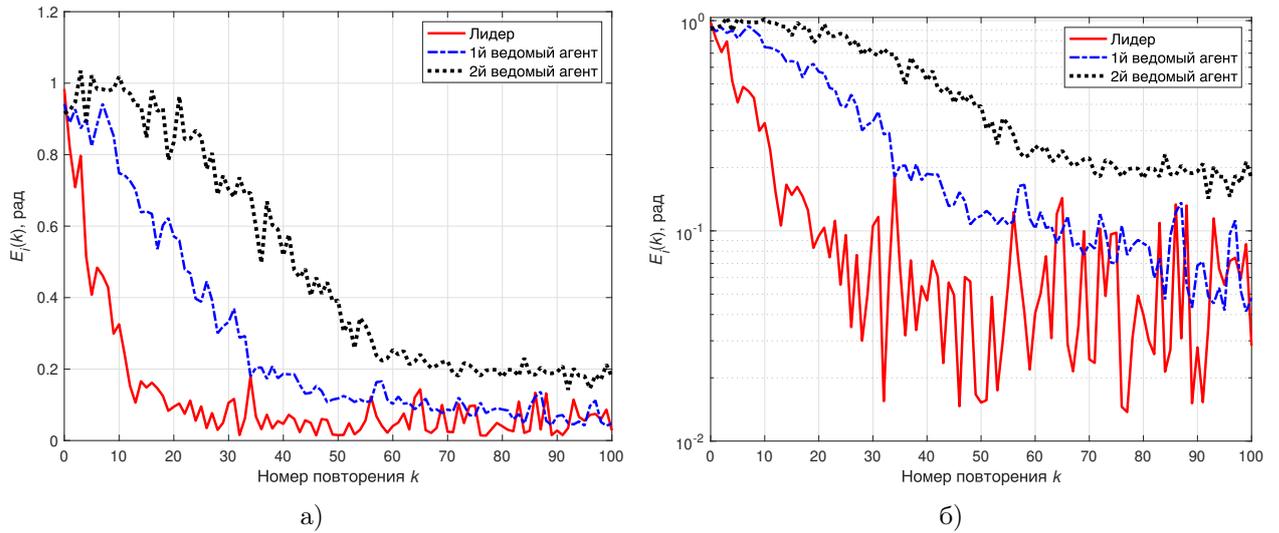


Рис. 3 – Выборочные среднеквадратические ошибки обучения, полученные в результате моделирования сетевого алгоритма Сааба: а) линейный масштаб; б) логарифмический масштаб

первого ведомого. Данная топология определяется следующими матрицами:

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Для оценки эффективности алгоритма введем выборочную среднеквадратическую ошибку обучения

$$E_i(k) = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{p=0}^{T-1} \|e_i(k, p)\|^2}, \quad (2.41)$$

где  $e_i(k, p)$  определяется выражением (2.18).

Графики выборочных среднеквадратических ошибок обучения при применении сетевого алгоритма Сааба представлены на рисунке 3. В этом алгоритме нет параметров, кроме начальных условий, за счет которых можно изменять показатели процесса обучения. Для всех агентов были приняты нулевые начальные значения состояния и управления, а также следующие начальные значения ковариационных матриц ошибки состояния и ошибки управления:  $P_{ij}^x(k, 0) = 0, 1 \cdot I_{n_x}$ ,  $P_{ij}^u(0, p) = 0, 1$  для всех пар  $i$  и  $j$ .

На рисунке 4 представлены графики выборочных среднеквадратических ошибок обучения, полученные при использовании алгоритма, основанного на дивергентном методе векторных функций Ляпунова. Для фильтра Калмана была получена следующая

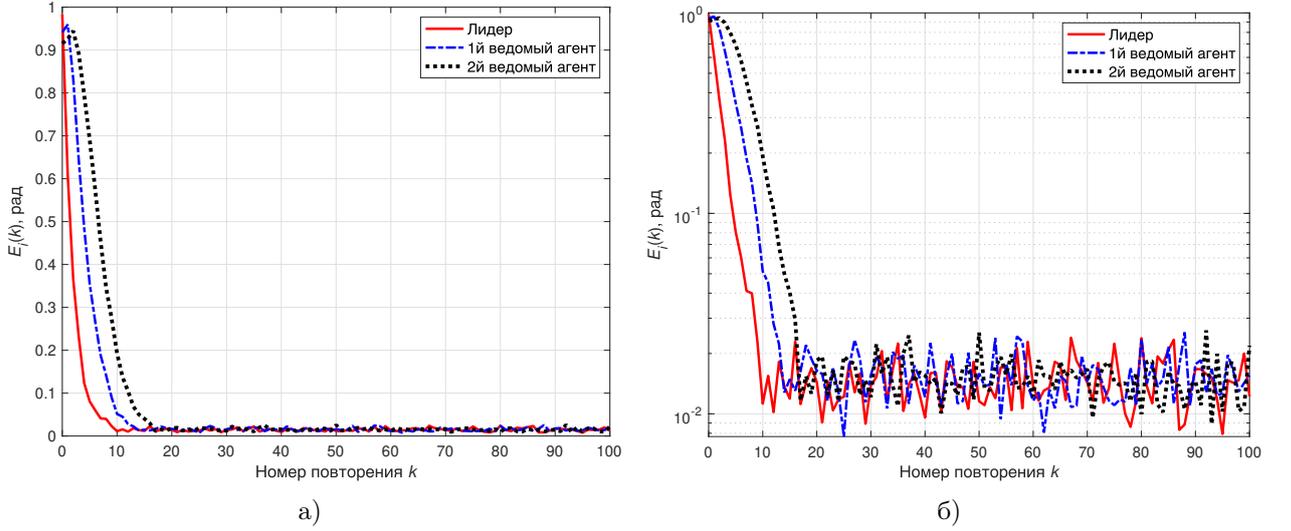


Рис. 4 – Выборочные среднеквадратические ошибки обучения, полученные в результате моделирования сетевого алгоритма на основе дивергентного метода векторной функции Ляпунова: а) линейный масштаб; б) логарифмический масштаб

матрица усиления:

$$F_i = \begin{bmatrix} 0,0269 & -0,0005 & 0,0318 & 0,0045 \end{bmatrix}.$$

Начальные условия состояния и управления нулевые. Исходя из (2.6) и (2.23), законы управления агентами определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} u_1(k+1, p-1) &= u_1(k, p-1) + \\ &\quad + K_1(\hat{x}_1(k+1, p-1) - \hat{x}_1(k, p-1)) + K_2(y^{ref}(p) - \hat{y}_1(k, p)), \\ u_2(k+1, p-1) &= u_2(k, p-1) + \\ &\quad + K_1(\hat{x}_2(k+1, p-1) - \hat{x}_2(k, p-1)) + K_2(\hat{y}_1(k, p) - \hat{y}_2(k, p)), \\ u_3(k+1, p-1) &= u_3(k, p-1) + \\ &\quad + K_1(\hat{x}_3(k+1, p-1) - \hat{x}_3(k, p-1)) + K_2(\hat{y}_2(k, p) - \hat{y}_3(k, p)). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Решая задачу максимизации следа матрицы  $\bar{X}$  при ограничениях (2.36) и весовых матрицах  $Q_1 = 10^{-5} \cdot I_{2n_x}$ ,  $Q_2 = 10^5$  и  $R = 10^{-3}$ , были получены следующие матрицы протокола для (2.42):

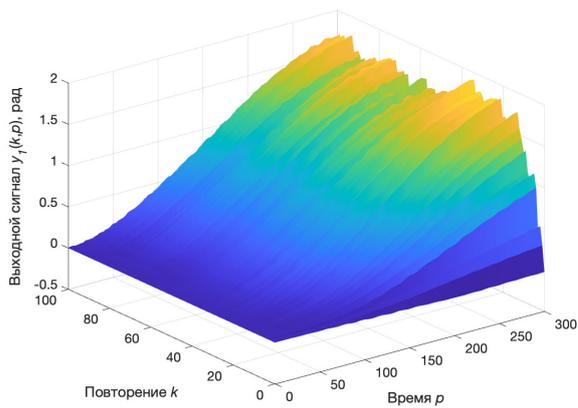
$$K_1 = \begin{bmatrix} -42,0166 & -1,2998 & -0,4166 & -0,0044 \end{bmatrix}, \quad K_2 = 16,0004.$$

Для наглядности на рисунках 5-7 представлены графики сигналов агентов, полученные при применении описанных алгоритмов. Результаты моделирования позволяют

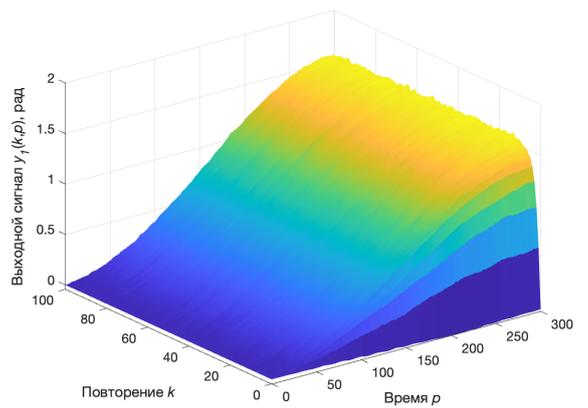
наглядно оценить эффективность подхода на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова в сравнении с сетевым алгоритмом Сааба. При использовании сетевого алгоритма Сааба ошибки обучения стабилизировались в смысле нулевого тренда в среднем в 3 раза медленнее, чем при использовании второго алгоритма, и из-за отсутствия фильтрации траектории выборочных среднеквадратических ошибок существенно отличаются от монотонных, что является весьма нежелательным эффектом.

## 2.5 Выводы по главе 2

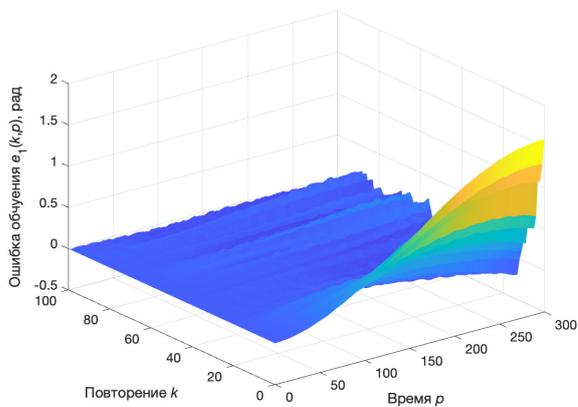
В данной главе рассмотрены два алгоритма УИО сетевыми стохастическими системами. Первый – сетевой алгоритм Сааба – основан на решении задачи минимизации дисперсий ошибок управления, и является расширением результатов работы [16] на случай сетевых систем. Во втором для синтеза закона управления используется дивергентный метод векторных функций Ляпунова [15], который заключается в поиске управления из условий устойчивости повторяющегося процесса с использованием векторной функции Ляпунова и аналога ее дивергенции. Первый алгоритм относится к алгоритмам D-типа, которые используют аналог производной ошибки выходного сигнала, что является их основным недостатком, поскольку приводит к увеличению дисперсии ошибки. Такое же влияние оказывает использование измеренного выходного сигнала с шумами. Второй алгоритм относится к алгоритмам P-типа, которые непосредственно используют ошибку выходного сигнала. Помимо этого, в нем предусмотрена фильтрация сигналов системы, что позволило достичь лучшего качества процесса обучения. Поэтому данный алгоритм получил дальнейшее развитие в следующих главах.



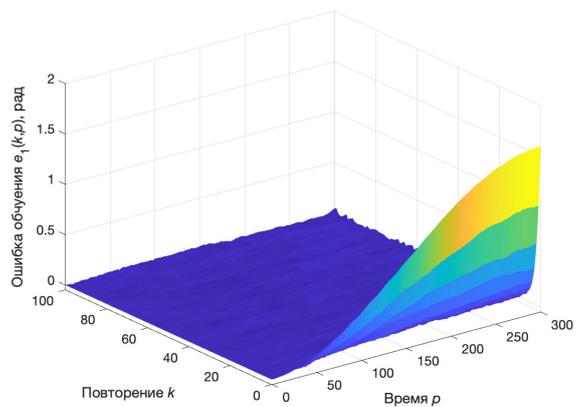
а)



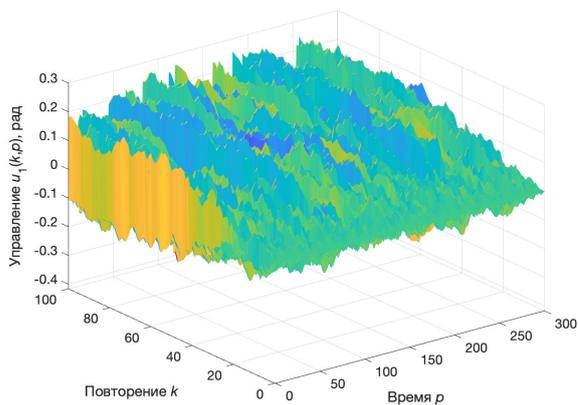
б)



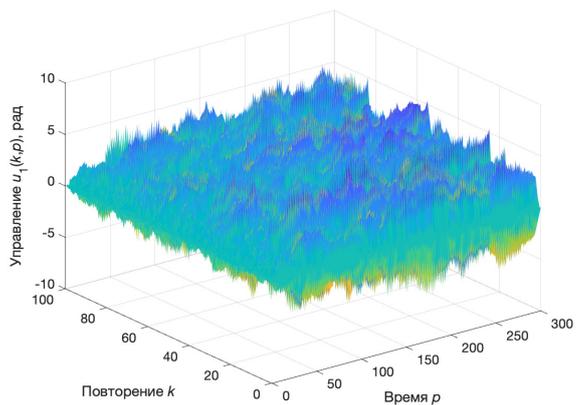
в)



г)

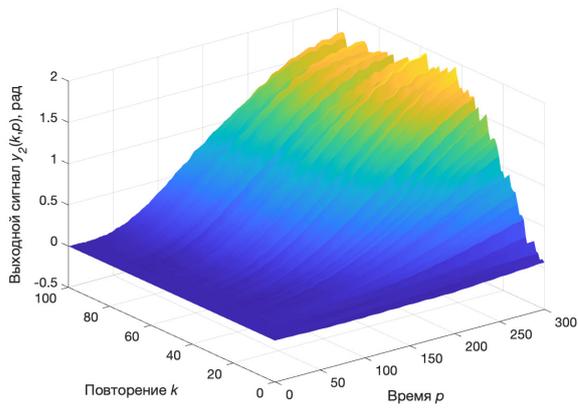


д)

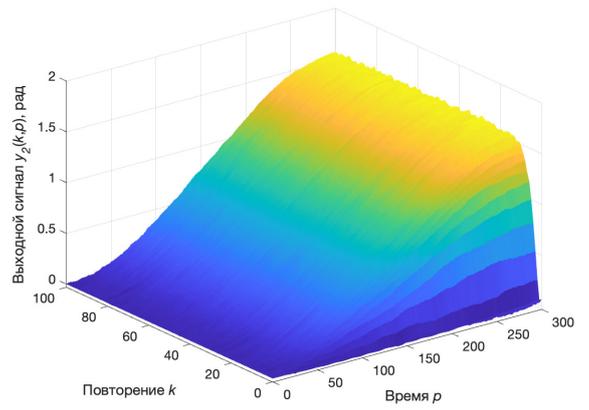


е)

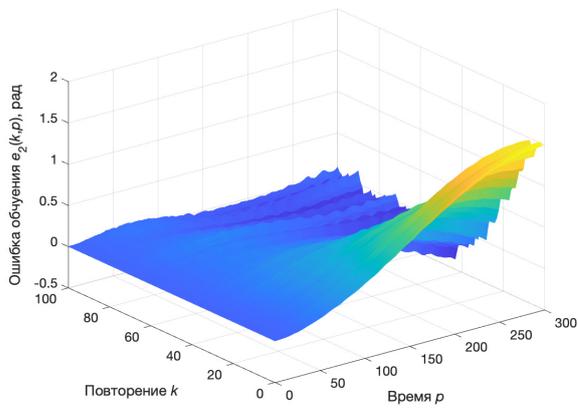
Рис. 5 – Сигналы лидера: а) выходной сигнал (сетевой алгоритм Сааба); б) выходной сигнал (алгоритм на основе дивергентного метода векторной функции Ляпунова); в) ошибка обучения (сетевой алгоритм Сааба); г) ошибка обучения (алгоритм на основе дивергентного метода векторной функции Ляпунова); д) управление (сетевой алгоритм Сааба); е) управление (алгоритм на основе дивергентного метода векторной функции Ляпунова)



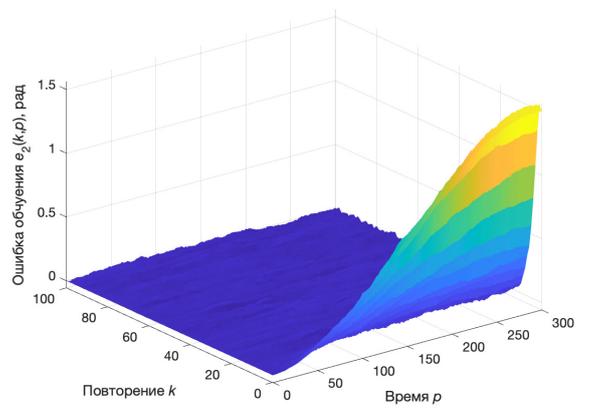
а)



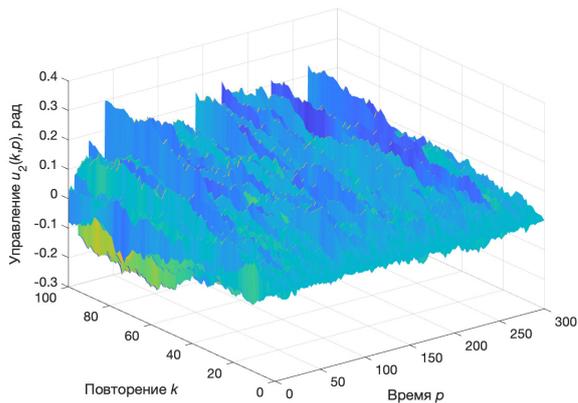
б)



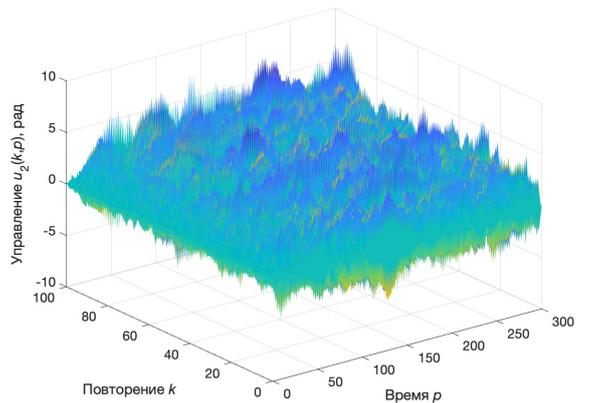
в)



г)

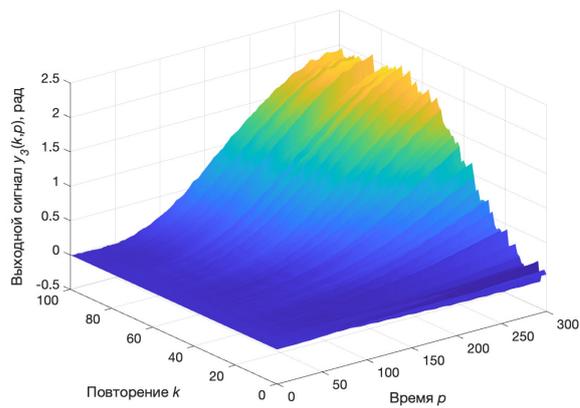


д)

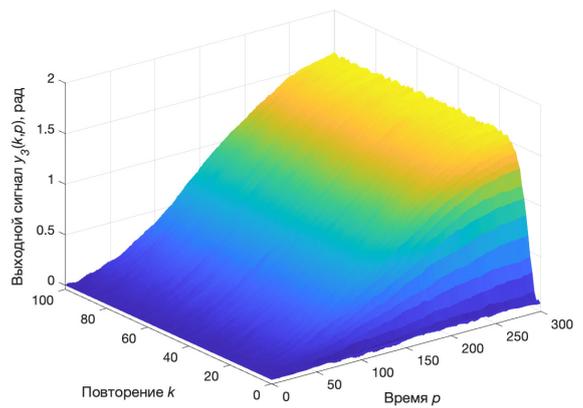


е)

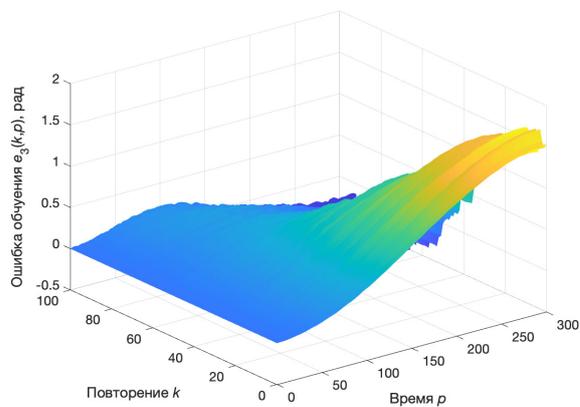
Рис. 6 – Сигналы 1-го ведомого агента: а) выходной сигнал (сетевой алгоритм Сааба); б) выходной сигнал (алгоритм на основе дивергентного метода векторной функции Ляпунова); в) ошибка обучения (сетевой алгоритм Сааба); г) ошибка обучения (алгоритм на основе дивергентного метода векторной функции Ляпунова); д) управление (сетевой алгоритм Сааба); е) управление (алгоритм на основе дивергентного метода векторной функции Ляпунова)



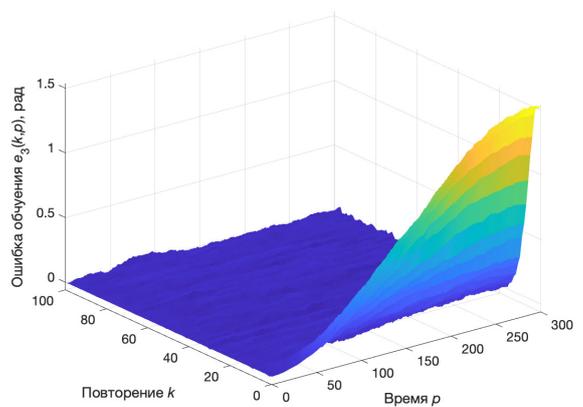
а)



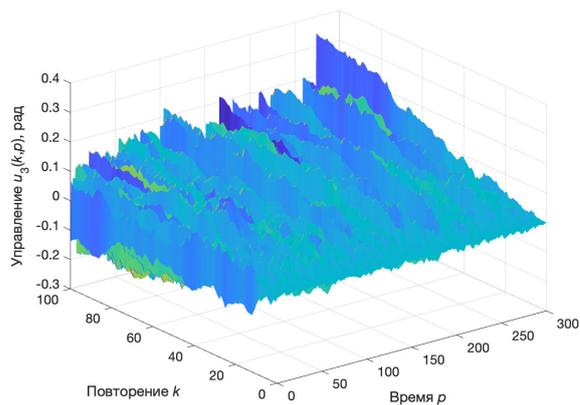
б)



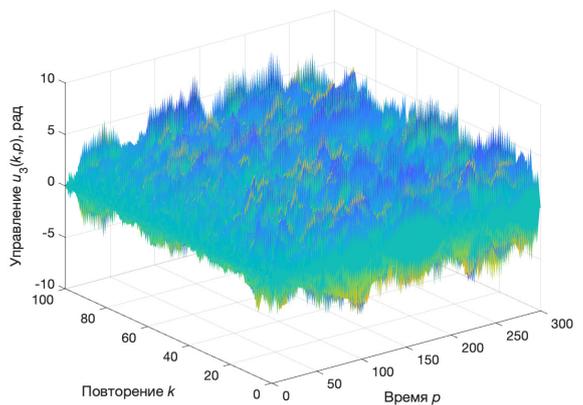
в)



г)



д)



е)

Рис. 7 – Сигналы 2-го ведомого агента: а) выходной сигнал (сетевой алгоритм Сааба); б) выходной сигнал (алгоритм на основе дивергентного метода векторной функции Ляпунова); в) ошибка обучения (сетевой алгоритм Сааба); г) ошибка обучения (алгоритм на основе дивергентного метода векторной функции Ляпунова); д) управление (сетевой алгоритм Сааба); е) управление (алгоритм на основе дивергентного метода векторной функции Ляпунова)

### 3 Управление с итеративным обучением стохастическими сетевыми системами при изменении топологии сети

В данной главе рассмотрим задачу УИО сетевой системой при изменении топологии сети. Агенты представляют собой линейные динамические объекты с дискретным временем и аффинными моделями неопределенностей. Изменение топологии, помимо изменения характера связей, подразумевает, что агенты могут отключаться от сети и подключаться обратно. В последнем случае наблюдается появление дополнительной переходной ошибки, в связи с чем требование к точности выполнения операции может быть нарушено. Для предотвращения данного эффекта предусмотрена передача подключаемым агентам управляющих сигналов функционирующих агентов.

#### 3.1 Описание сетевой системы

Рассмотрим систему из  $N$  агентов, связанных между собой информационной сетью, топология которой может изменяться между повторениями. Смена топологии подразумевает изменение состава подгруппы функционирующих агентов и характер связей между ними. Агенты работают в повторяющемся режиме, и их динамика описывается следующей дискретной моделью:

$$\begin{aligned} x_i(k, p+1) &= A(\delta_i(p))x_i(k, p) + B(\delta_i(p))u_i(k, p) + D\omega_i(k, p), \\ y_i(k, p) &= Cx_i(k, p), \\ y_{\nu_i}(k, p) &= y_i(k, p) + G\nu_i(k, p), \quad i \in \mathcal{I}, k \geq 0, 0 \leq p \leq T-1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Граничные условия  $x_i(k, 0)$  и  $u_i(0, p)$  считаются известными, и модель неопределенностей задается в виде

$$\begin{aligned} A(\delta_i(p)) &= A + A_a(\delta_i(p)) = A + \sum_{n=1}^l \delta_{in}(p)A_n, \\ B(\delta_i(p)) &= B + B_a(\delta_i(p)) = B + \sum_{n=1}^l \delta_{in}(p)B_n, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где  $A$  и  $B$  – матрицы номинальной модели,  $A_n$  и  $B_n$  – постоянные матрицы соответствующих размеров. Множество неопределенных параметров  $\delta_i(p)$  агента  $i$  определя-

ется как

$$\Delta_i = \left\{ \delta_i = \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \dots & \delta_{il} \end{bmatrix}^\top : \delta_{in} \in [\underline{\delta}_{in}, \bar{\delta}_{in}], n = 1, 2, \dots, l \right\},$$

а конечное множество вершин многогранника ограничений агента  $i$ , содержащее  $2^l$  элементов, как

$$\Delta_{vi} = \left\{ \delta_i = \begin{bmatrix} \delta_{i1} & \dots & \delta_{il} \end{bmatrix}^\top : \delta_{in} \in \{\underline{\delta}_{in}, \bar{\delta}_{in}\}, n = 1, 2, \dots, l \right\}.$$

Предполагается, что шумы объекта  $\omega_i(k, p)$  и шумы измерений  $\nu_i(k, p)$  представляют собой независимые гауссовские белые шумы с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационными матрицами  $S_{\omega_i} = E[\omega_i(k, p)\omega_i^\top(k, p)]$  и  $S_{\nu_i} = E[\nu_i(k, p)\nu_i^\top(k, p)]$  соответственно. Для оценки векторов состояния и выходного сигнала используем фильтр Калмана (2.20) с матрицами номинальной модели  $A$  и  $B$ .

Сигнал  $\rho(k)$  задает топологию сети на повторении  $k$ , и представляет собой кусочно-постоянную функцию, отображающую  $\mathbb{Z}_+$  в  $\{1, 2, \dots, c\}$ , где  $c$  – количество топологий, точки разрыва которой будем называть моментами переключения топологии.

Каждая топология определяется рядом параметров. Множество функционирующих агентов

$$\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{i_n\}_{n=1}^{N_{\rho(k)}} \subseteq \mathcal{I} \quad (3.3)$$

представляет собой набор их номеров, где  $N_{\rho(k)} \leq N$  – количество агентов, функционирующих при топологии  $\rho(k)$ . Связи между ними представляются в виде направленного графа

$$\mathcal{G}_{\rho(k)} = (\mathcal{I}_{\rho(k)}, \mathcal{E}_{\rho(k)}), \quad (3.4)$$

где  $\mathcal{E}_{\rho(k)} \subseteq \mathcal{I}_{\rho(k)} \times \mathcal{I}_{\rho(k)}$  – ребра графа. Возможность доступа агента  $i$  к выходным данным агента  $j$  ( $i, j \in \mathcal{I}_{\rho(k)}$ ) задается ребром, направленным от вершины  $j$  к вершине  $i$  и обозначается упорядоченной парой  $(j, i) \in \mathcal{E}_{\rho(k)}$ . Элементы матрицы смежности

$$\mathcal{S}(\mathcal{G}_{\rho(k)}) = \mathcal{S}_{\rho(k)} = [s_{inim}]_{n,m=1}^{N_{\rho(k)}} \quad (3.5)$$

задаются следующим образом:  $s_{inim} > 0$ , если  $(i_m, i_n) \in \mathcal{E}_{\rho(k)}$ ,  $s_{inim} = 0$  в противном случае, и  $s_{inim} = 0$ . Также вводятся матрица Лапласа

$$\mathcal{L}(\mathcal{G}_{\rho(k)}) = \mathcal{L}_{\rho(k)} = [l_{inim}]_{n,m=1}^{N_{\rho(k)}}, \quad (3.6)$$

где  $l_{i_n i_m} = -s_{i_n i_m}$ , если  $i_n \neq i_m$ , и  $l_{i_n i_n} = \sum_{j \in \mathcal{I}_{\rho(k)}} s_{i_n j}$ , и матрица

$$\mathcal{R}_{\rho(k)} = \text{diag}[r_{i_n}]_{n=1}^{N_{\rho(k)}}, \quad (3.7)$$

определяющая возможность доступа агентов к информации о желаемой траектории  $y^{ref}(p)$ , где  $r_{i_n} = 1$ , если агент  $i_n$  имеет к ней доступ (лидер), и  $r_{i_n} = 0$  в противном случае (ведомый агент).

Будем рассматривать ошибку обучения в виде (2.19). Задача заключается в поиске такого протокола  $u_i(k, p)$ , который позволит достичь консенсуса в смысле (2.21)-(2.22).

Введем множество  $\mathcal{F}_{\rho(k+1)} = \mathcal{I}_{\rho(k+1)} \cap \mathcal{I}_{\rho(k)}$ , которое представляет собой множество агентов, функционирующих на повторении  $k$  и продолжающих работу на повторении  $k + 1$ . Закон УИО для агента  $i \in \mathcal{F}_{\rho(k+1)}$  определим в виде (2.6) с корректирующей поправкой

$$\begin{aligned} \Delta u_i(k+1, p-1) = & K_{1\rho(k+1)}(\hat{x}_i(k+1, p-1) - \hat{x}_i(k, p-1)) + \\ & + K_{2\rho(k+1)} \left( r_i(y^{ref}(p) - \hat{y}_i(k, p)) + \sum_{j \in \mathcal{I}_{\rho(k+1)}} s_{ij}(\hat{y}_j(k, p) - \hat{y}_i(k, p)) \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $K_{1\rho(k+1)}$  и  $K_{2\rho(k+1)}$  – матрицы протокола при топологии  $\rho(k+1)$ ,  $r_i$  и  $s_{ij}$  – элементы матриц  $\mathcal{R}_{\rho(k+1)}$  и  $\mathcal{S}_{\rho(k+1)}$  соответственно.

Также введем множество  $\mathcal{C}_{\rho(k+1)} = \mathcal{I}_{\rho(k+1)} \setminus \mathcal{I}_{\rho(k)}$ , которое представляет собой множество агентов, подключаемых к сети на повторении  $k + 1$ . Агенту  $i \in \mathcal{C}_{\rho(k+1)}$  будем передавать управляющий сигнал от агента, функционирующего на предыдущем повторении и продолжающего работать, т. е.

$$u_i(k+1, p-1) = u_j(k, p-1) + \Delta u_j(k+1, p-1), \quad i \in \mathcal{C}_{\rho(k+1)}, j \in \mathcal{F}_{\rho(k+1)}. \quad (3.9)$$

Топологию сети, при которой управление хотя бы одним агентом происходит согласно закону (3.9), назовем *переходной топологией*, в противном случае – *стандартной топологией*. После переходной топологии происходит переключение на стандартную топологию с учетом новых агентов.

## 3.2 Построение 2D-модели в приращениях переменных

Найдем матрицы протокола  $K_{1\rho(k)}$  и  $K_{2\rho(k)}$ , при которых законы управления (2.6) и (3.9) с поправкой (3.8) обеспечат выполнение условий сходимости, определенных при постановке задачи. Вначале запишем уравнения динамики сетевой системы относительно приращения оценки состояния (2.25), приращения ошибки оценивания (2.26) и ошибки (2.19). Динамика агента  $i \in \mathcal{C}_{\rho(k+1)}$  в этом случае описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_i(k+1, p+1) &= (A(\delta_i) - F_i C) \tilde{\eta}_i(k+1, p) + A_a(\delta_i) \hat{\eta}_i(k+1, p) + \\ &\quad + B_a(\delta_i) \Delta u_j(k+1, p-1) + D \Delta \omega_i(k+1, p-1) - F_i G \Delta \nu_i(k+1, p-1), \\ \hat{\eta}_i(k+1, p+1) &= F_i C \tilde{\eta}_i(k+1, p) + A \hat{\eta}_i(k+1, p) + \\ &\quad + B \Delta u_j(k+1, p-1) + F_i G \Delta \nu_i(k+1, p-1), \\ \hat{e}_i(k+1, p) &= -C F_i C \tilde{\eta}_i(k+1, p) - C A \hat{\eta}_i(k+1, p) + \hat{e}_i(k, p) - \\ &\quad - C B \Delta u_j(k+1, p-1) - C F_i G \Delta \nu_i(k+1, p-1),\end{aligned}$$

где  $F_i$  – матрица усиления фильтра (2.20),  $\Delta \omega_i(k+1, p-1)$  и  $\Delta \nu_i(k+1, p-1)$  определяются как (2.28) и (2.29) соответственно, и  $j \in \mathcal{F}_{\rho(k+1)}$ , уравнения динамики которого в свою очередь имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_j(k+1, p+1) &= (A(\delta_j) - F_j C) \tilde{\eta}_j(k+1, p) + A_a(\delta_j) \hat{\eta}_j(k+1, p) + \\ &\quad + B_a(\delta_j) \Delta u_j(k+1, p-1) + D \Delta \omega_j(k+1, p-1) - F_j G \Delta \nu_j(k+1, p-1), \\ \hat{\eta}_j(k+1, p+1) &= F_j C \tilde{\eta}_j(k+1, p) + A \hat{\eta}_j(k+1, p) + \\ &\quad + B \Delta u_j(k+1, p-1) + F_j G \Delta \nu_j(k+1, p-1), \\ \hat{e}_j(k+1, p) &= -C F_j C \tilde{\eta}_j(k+1, p) - C A \hat{\eta}_j(k+1, p) + \hat{e}_j(k, p) - \\ &\quad - C B \Delta u_j(k+1, p-1) - C F_j G \Delta \nu_j(k+1, p-1).\end{aligned}$$

Относительно векторов (2.30) данные системы примут вид

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_i(k+1, p+1) &= A_{11i}(\delta_i) \bar{\eta}_i(k+1, p) + A_{12} \hat{e}_i(k, p) + \\ &\quad + B_1(\delta_i) \bar{u}_j(k+1, p) + D_{1i} \bar{\omega}_i(k+1, p), \quad (3.10) \\ \hat{e}_i(k+1, p) &= A_{21i} \bar{\eta}_i(k+1, p) + A_{22} \hat{e}_i(k, p) + B_2 \bar{u}_j(k+1, p-1) + D_{2i} \bar{\omega}_i(k+1, p),\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_j(k+1, p+1) = & A_{11j}(\delta_j)\bar{\eta}_j(k+1, p) + A_{12}\hat{e}_j(k, p) + \\ & + B_1(\delta_j)\bar{u}_j(k+1, p-1) + D_{1j}\bar{\omega}_j(k+1, p), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\hat{e}_j(k+1, p) = A_{21j}\bar{\eta}_j(k+1, p) + A_{22}\hat{e}_j(k, p) + B_2\bar{u}_j(k+1, p-1) + D_{2j}\bar{\omega}_j(k+1, p)$$

соответственно, где

$$\begin{aligned} A_{11i}(\delta_i) &= \begin{bmatrix} A(\delta_i) - F_i C & A_a(\delta_i) \\ F_i C & A \end{bmatrix}, \quad A_{12} = 0, \quad A_{21i} = \begin{bmatrix} -C F_i C & -C A \end{bmatrix}, \quad A_{22} = I_{n_y}, \\ B_1(\delta_i) &= \begin{bmatrix} B_a(\delta_i) \\ B \end{bmatrix}, \quad B_2 = -C B, \quad D_{1i} = \begin{bmatrix} D & -F_i G \\ 0 & F_i G \end{bmatrix}, \quad D_{2i} = \begin{bmatrix} 0 & -C F_i G \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Объединим системы (3.10) и (3.11) относительно расширенных векторов

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(k, p) &= \begin{bmatrix} \bar{\eta}_{i_1}^\top(k, p) & \dots & \bar{\eta}_{i_{N_\rho}}^\top(k, p) \end{bmatrix}^\top, \quad \hat{e}(k, p) = \begin{bmatrix} \hat{e}_{i_1}^\top(k, p) & \dots & \hat{e}_{i_{N_\rho}}^\top(k, p) \end{bmatrix}^\top \\ \bar{\omega}(k, p) &= \begin{bmatrix} \bar{\omega}_{i_1}^\top(k, p) & \dots & \bar{\omega}_{i_{N_\rho}}^\top(k, p) \end{bmatrix}^\top \end{aligned}$$

с учетом (3.8) в следующую 2D-модель:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}(k+1, p+1) &= (\bar{A}_{11\rho}(\boldsymbol{\delta}) + \bar{B}_{1\rho}(\boldsymbol{\delta})\bar{K}_{1\rho}\bar{C}_{0\rho}\bar{\mathcal{H}}_{1\rho})\bar{\eta}(k+1, p) + \\ &+ (\bar{A}_{12\rho} + \bar{B}_{1\rho}(\boldsymbol{\delta})\bar{K}_{2\rho}\bar{\mathcal{H}}_{2\rho})\hat{e}(k, p) + \bar{D}_{1\rho}\bar{\omega}(k+1, p), \\ \hat{e}(k+1, p) &= (\bar{A}_{21\rho} + \bar{B}_{2\rho}\bar{K}_{1\rho}\bar{C}_{0\rho}\bar{\mathcal{H}}_{1\rho})\bar{\eta}(k+1, p) + \\ &+ (\bar{A}_{22\rho} + \bar{B}_{2\rho}\bar{K}_{2\rho}\bar{\mathcal{H}}_{2\rho})\hat{e}(k, p) + \bar{D}_{2\rho}\bar{\omega}(k+1, p), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11\rho}(\boldsymbol{\delta}) &= \text{diag}[A_{11i_n}(\delta_{i_n})]_{n=1}^{N_\rho}, \quad \bar{A}_{12\rho} = I_{N_\rho} \otimes A_{12}, \quad \bar{A}_{21\rho} = \text{diag}[A_{21i_n}]_{n=1}^{N_\rho}, \\ \bar{A}_{22\rho} &= I_{N_\rho} \otimes A_{22}, \quad \bar{B}_{1\rho}(\boldsymbol{\delta}) = \text{diag}[B_1(\delta_{i_n})]_{n=1}^{N_\rho}, \quad \bar{B}_{2\rho} = I_{N_\rho} \otimes B_2, \quad \bar{K}_{1\rho} = I_{N_\rho} \otimes K_{1\rho}, \\ \bar{K}_{2\rho} &= I_{N_\rho} \otimes K_{2\rho}, \quad \bar{C}_{0\rho} = I_{N_\rho} \otimes C_0, \quad C_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_x} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{H}}_{1\rho} = \mathcal{H}_\rho \otimes I_{2n_x}, \\ \bar{\mathcal{H}}_{2\rho} &= \mathcal{H}_\rho(\mathcal{L}_\rho + \mathcal{R}_\rho) \otimes I_{n_y}, \quad \bar{D}_{1\rho} = \text{diag}[D_{1i_n}]_{n=1}^{N_\rho}, \quad \bar{D}_{2\rho} = \text{diag}[D_{2i_n}]_{n=1}^{N_\rho}, \end{aligned}$$

и  $\rho = \rho(k+1)$ . Здесь  $\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \delta_{i_1}^\top & \dots & \delta_{i_{N_\rho(k+1)}}^\top \end{bmatrix}^\top$  – расширенный вектор неопределенных параметров. При этом множество неопределенных параметров и конечное множество его  $2^{lN_\rho(k+1)}$  вершин определяются как  $\boldsymbol{\Delta} = \cup_{i \in \mathcal{I}_\rho(k+1)} \Delta_i$  и  $\boldsymbol{\Delta}_v = \cup_{i \in \mathcal{I}_\rho(k+1)} \Delta_{vi}$  соответ-

ственно.

Матрица  $\mathcal{H}_{\rho(k)} = [h_{i_n i_m}]_{n,m=1}^{N_{\rho(k)}}$ , определяет тип топологии (стандартная или переходная) и задается следующим образом:  $h_{i_n i_n} = 1 \ \forall i_n \in \mathcal{F}_{\rho(k)}$ ,  $h_{i_n i_m} \in \{0, 1\} \ \forall i_n, i_m : i_n \in \mathcal{C}_{\rho(k)}, i_m \in \mathcal{F}_{\rho(k)}, (i_m, i_n) \in \mathcal{E}_{\rho(k)}$ , и  $h_{i_n i_m} = 0$  в остальных случаях, при этом  $\sum_{n=1}^{N_{\rho(k)}} h_{j i_n} = 1 \ \forall j \in \mathcal{I}_{\rho(k)}$ . Для стандартной топологии эта матрица равна единичной. В случае с переходной топологией строка матрицы, соответствующая подключаемому агенту, определяет, какой из его локальных лидеров передает свой управляющий сигнал, причем это может быть только один из локальных лидеров, функционирующих на предыдущем повторении.

### 3.3 Решение на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова

Дальнейший анализ будет основан на теории устойчивости стохастических повторяющихся процессов с переключениями [61]. В данном случае будем рассматривать векторную функцию Ляпунова в виде

$$V_{\rho}(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} V_{1\rho}(\xi) \\ V_{2\rho}(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{2n_x}, \epsilon \in \mathbb{R}^{n_y}, \quad (3.13)$$

где  $V_{1\rho}(\xi) > 0$ ,  $\xi \neq 0$ ,  $V_{2\rho}(\epsilon) > 0$ ,  $\epsilon \neq 0$ ,  $V_{1\rho}(0) = 0$  и  $V_{2\rho}(0) = 0$ . Здесь и далее по разделу для краткости будем использовать обозначение  $\rho = \rho(k+1)$ . Стохастический аналог дивергенции этой функции вдоль траекторий системы (3.12) запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{D}V_{\rho}(\xi, \epsilon) &= \mathbb{E} \left[ V_{1\rho}(\bar{\eta}(k+1, p+1)) | \bar{\eta}(k+1, p) = \xi, \hat{\epsilon}(k, p) = \epsilon \right] - \\ &\quad - V_{1\rho}(\xi) + \mathbb{E} \left[ V_{2\rho}(\hat{\epsilon}(k+1, p)) | \bar{\eta}(k+1, p) = \xi, \hat{\epsilon}(k, p) = \epsilon \right] - V_{2\rho}(\epsilon). \end{aligned}$$

**Теорема 3.1.** [61] Пусть существуют векторная функция  $V_{\rho}(\xi, \epsilon)$  вида (3.13) и положительные постоянные  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  и  $\gamma$  такие, что для всех  $\rho$  на траекториях системы (3.12) выполняются неравенства

$$\begin{aligned} c_1 \|\xi\|^2 &\leq V_{1\rho}(\xi) \leq c_2 \|\xi\|^2, \\ c_1 \|\epsilon\|^2 &\leq V_{2\rho}(\epsilon) \leq c_2 \|\epsilon\|^2, \\ \mathcal{D}V_{\rho}(\xi, \epsilon) &\leq \gamma - c_3 (\|\xi\|^2 + \|\epsilon\|^2). \end{aligned}$$

Тогда закон управления (2.6) и (3.9) с корректирующей поправкой (3.8) обеспечит выполнение условия сходимости ошибки (2.21).

Выберем компоненты векторной функции Ляпунова (3.13) в виде квадратичных форм

$$V_{1\rho}(\xi) = \xi^\top \bar{P}_{1\rho} \xi, \quad V_{2\rho}(\epsilon) = \epsilon^\top \bar{P}_{2\rho} \epsilon,$$

где  $\bar{P}_{1\rho} = I_{N\rho} \otimes P_{1\rho}$ ,  $\bar{P}_{2\rho} = I_{N\rho} \otimes P_{2\rho}$ , и потребуем выполнения неравенства

$$DV_\rho(\xi, \epsilon) \leq \gamma - (\xi^\top \bar{Q}_{1\rho} \xi + \epsilon^\top \bar{Q}_{2\rho} \epsilon + v^\top \bar{R}_\rho v), \quad (3.14)$$

где  $Q_{1\rho} \succ 0$ ,  $Q_{2\rho} \succ 0$  и  $R_\rho \succ 0$  – весовые матрицы для топологии  $\rho$ , относительно которых  $\bar{Q}_{1\rho} = I_{N\rho} \otimes Q_{1\rho}$ ,  $\bar{Q}_{2\rho} = I_{N\rho} \otimes Q_{2\rho}$ , и  $\bar{R}_\rho = I_{N\rho} \otimes R$ , а  $v = \bar{K}_{1\rho} \bar{C}_{0\rho} \bar{\mathcal{H}}_{1\rho} \xi + \bar{K}_{2\rho} \bar{\mathcal{H}}_{2\rho} \epsilon$  представляет собой корректирующую поправку (3.8) относительно расширенных векторов  $\bar{\eta}(k+1, p) = \xi$  и  $\hat{e}(k, p) = \epsilon$ . Вычисляя дивергенцию функции (3.13) с выбранными компонентами, получим

$$DV_\rho(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix}^\top \left( (\bar{A}_\rho(\boldsymbol{\delta}) + \bar{B}_\rho(\boldsymbol{\delta}) \bar{K}_\rho \bar{C}_\rho \bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \bar{P}_\rho (\bar{A}_\rho(\boldsymbol{\delta}) + \bar{B}_\rho(\boldsymbol{\delta}) \bar{K}_\rho \bar{C}_\rho \bar{\mathcal{H}}_\rho) - \right. \\ \left. - \bar{P}_\rho \right) \begin{bmatrix} \xi \\ \epsilon \end{bmatrix} + 2(\text{tr}[\bar{P}_{1\rho} S_{1\rho}] + \text{tr}[\bar{P}_{2\rho} S_{2\rho}]), \quad (3.15)$$

где

$$\bar{A}_\rho(\boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11\rho}(\boldsymbol{\delta}) & \bar{A}_{12\rho} \\ \bar{A}_{21\rho} & \bar{A}_{22\rho} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_\rho(\boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} \bar{B}_{1\rho}(\boldsymbol{\delta}) \\ \bar{B}_{2\rho} \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_\rho = \begin{bmatrix} \bar{K}_{1\rho} & \bar{K}_{2\rho} \end{bmatrix}, \\ \bar{C}_\rho = \text{diag}[\bar{C}_{0\rho} \quad I_{N\rho} \otimes I_{n_y}], \quad \bar{\mathcal{H}}_\rho = \text{diag}[\bar{\mathcal{H}}_{1\rho} \quad \bar{\mathcal{H}}_{2\rho}], \quad \bar{P}_\rho = \text{diag}[\bar{P}_{1\rho} \quad \bar{P}_{2\rho}], \\ S_{1\rho} = \text{diag}[S_{1i_n}]_{n=1}^{N_\rho}, \quad S_{2\rho} = \text{diag}[S_{2i_n}]_{n=1}^{N_\rho}, \quad S_{1i} = \begin{bmatrix} DS_{\omega i} D^\top & F_i G S_{\nu i} G^\top F_i^\top \\ 0 & F_i G S_{\nu i} G^\top F_i^\top \end{bmatrix}, \\ S_{2i} = C F_i G S_{\nu i} G^\top F_i^\top C^\top.$$

Предполагая, что  $\gamma = 2(\text{tr}[\bar{P}_{1\rho} S_{1\rho}] + \text{tr}[\bar{P}_{2\rho} S_{2\rho}])$ , то из (3.14) и (3.15) получим, что

условия теоремы 3.1 будут выполнены, если матричные неравенства

$$\begin{aligned} & (\bar{A}_\rho(\boldsymbol{\delta}) + \bar{B}_\rho(\boldsymbol{\delta})\bar{K}_\rho\bar{C}_\rho\bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \bar{P}_\rho (\bar{A}_\rho(\boldsymbol{\delta}) + \bar{B}_\rho(\boldsymbol{\delta})\bar{K}_\rho\bar{C}_\rho\bar{\mathcal{H}}_\rho) - \\ & - \bar{P}_\rho + \bar{Q}_\rho + (\bar{K}_\rho\bar{C}_\rho\bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \bar{R}\bar{K}_\rho\bar{C}_\rho\bar{\mathcal{H}}_\rho \preceq 0, \quad \bar{P}_\rho \succ 0, \end{aligned}$$

где  $\bar{Q}_\rho = \text{diag} [\bar{Q}_{1\rho} \quad \bar{Q}_{2\rho}]$ , разрешимы относительно  $\bar{P}_\rho$ . Применяя преобразования, аналогичные рассмотренным в разделе 2.3, данные неравенства переищутся в виде следующей системы матричных уравнений и неравенств:

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_\rho & (\bar{A}_\rho(\boldsymbol{\delta})\bar{X}_\rho + \bar{B}_\rho(\boldsymbol{\delta})\bar{C}_\rho\bar{Y}_\rho\bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top & \bar{X}_\rho & (\bar{Y}_\rho\bar{C}_\rho\bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \\ \bar{A}_\rho(\boldsymbol{\delta})\bar{X}_\rho + \bar{B}_\rho(\boldsymbol{\delta})\bar{C}_\rho\bar{Y}_\rho\bar{\mathcal{H}}_\rho & \bar{X}_\rho & 0 & 0 \\ \bar{X}_\rho & 0 & \bar{Q}_\rho^{-1} & 0 \\ \bar{Y}_\rho\bar{C}_\rho\bar{\mathcal{H}}_\rho & 0 & 0 & \bar{R}_\rho^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \bar{X}_\rho \succ 0, \quad \bar{C}_\rho\bar{\mathcal{H}}_\rho\bar{X}_\rho = \bar{Z}_\rho\bar{C}_\rho\bar{\mathcal{H}}_\rho, \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{X}_\rho &= \text{diag} [\bar{X}_{1\rho} \quad \bar{X}_{2\rho}], \quad \bar{X}_{1\rho} = I_{N_\rho} \otimes X_{1\rho}, \quad \bar{X}_{2\rho} = I_{N_\rho} \otimes X_{2\rho}, \quad \bar{Y}_\rho = [\bar{Y}_{1\rho} \quad \bar{Y}_{2\rho}], \\ \bar{Y}_{1\rho} &= I_{N_\rho} \otimes Y_{1\rho}, \quad \bar{Y}_{2\rho} = I_{N_\rho} \otimes Y_{2\rho}, \quad \bar{Z}_\rho = \text{diag} [\bar{Z}_{1\rho} \quad \bar{Z}_{2\rho}], \quad \bar{Z}_{1\rho} = I_{N_\rho} \otimes Z_{1\rho}, \quad \bar{Z}_{2\rho} = I_{N_\rho} \otimes Z_{2\rho}. \end{aligned}$$

Таким образом доказан следующий результат.

**Теорема 3.2.** *Законы управления (2.6) и (3.9) с корректирующей поправкой (3.8) обеспечивают достижение консенсуса в смысле условий (2.21)-(2.22), если система (3.16) разрешима относительно переменных  $X_{1\rho}$ ,  $X_{2\rho}$ ,  $Y_{1\rho}$ ,  $Y_{2\rho}$ ,  $Z_{1\rho}$  и  $Z_{2\rho}$  для  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta_v$ . При этом матрицы протокола определяются как  $K_{1\rho} = Y_{1\rho}Z_{1\rho}^{-1}$  и  $K_{2\rho} = Y_{2\rho}Z_{2\rho}^{-1}$ .*

Управление, удовлетворяющее теореме 3.2 обеспечивает сходимость выходного сигнала к желаемой траектории при любых значениях неопределенных параметров, удовлетворяющих (3.2), т. е. является робастным по отношению к заданным неопределенностям. Укрупнено этапы вычислений представлены в алгоритме 3.

### 3.4 Моделирование сетевой системы

При моделировании в качестве агентов сетевой системы были рассмотрены манипуляторы с поворотным гибким звеном, описанные в разделе 2.4. С учетом неопределенностей

---

**Алгоритм 3.** Алгоритм УИО на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова для стохастических сетевых систем с изменяемой топологией сети

---

**Вход:** Матрицы  $A(\delta_i)$ ,  $B(\delta_i)$ ,  $D$ ,  $C$  и  $G$ , множества  $\Delta_{\nu_i}$ , ковариационные матрицы  $S_{\omega_i}$  и  $S_{\nu_i}$ , начальные условия  $x_i(k, 0)$  и  $u_i(0, p)$ , желаемая траектория  $y^{ref}(p)$ , множества  $\mathcal{I}_{\rho(k)}$ , матрицы связей  $\mathcal{L}_{\rho(k)}$ ,  $\mathcal{R}_{\rho(k)}$  и  $\mathcal{H}_{\rho(k)}$ , период повторения  $T$ , весовые матрицы  $Q_{1\rho(k)}$ ,  $Q_{2\rho(k)}$  и  $R_{\rho(k)}$ , переключающий сигнал  $\rho(k)$ .

- 1: **Для всех**  $\rho \in \{1, 2, \dots, c\}$
  - 2:     Решить систему (3.16) относительно  $X_{1\rho}$ ,  $X_{2\rho}$ ,  $Y_{1\rho}$ ,  $Y_{2\rho}$ ,  $Z_{1\rho}$  и  $Z_{2\rho}$  для  $\delta \in \Delta_v$ .
  - 3:     Вычислить  $K_{1\rho} = Y_{1\rho}Z_{1\rho}^{-1}$  и  $K_{2\rho} = Y_{2\rho}Z_{2\rho}^{-1}$ .
  - 4: **Конец Для**
  - 5: **Для**  $k = 0, 1, \dots$
  - 6:     **Для**  $p = 0, \dots, T - 1$
  - 7:         **Для всех**  $i \in \mathcal{I}_{\rho(k)}$
  - 8:             **Если**  $k > 0$
  - 9:                 **Если**  $i \in \mathcal{F}_{\rho(k)}$                      // *Функционировал на повторении  $k - 1$*
  - 10:                     Вычислить  $u_i(k, p)$  согласно (2.6) с учетом (3.8).
  - 11:                 **Иначе Если**  $i \in \mathcal{C}_{\rho(k)}$              // *Не функционировал на повторении  $k - 1$*
  - 12:                     Вычислить  $u_i(k, p)$  согласно (3.9) для  $i, j : h_{ij} = 1$ , где  $h_{ij}$  – элемент матрицы  $\mathcal{H}_{\rho(k)}$ .
  - 13:                 **Конец Если**
  - 14:             **Конец Если**
  - 15:             Получить  $y_{\nu_i}(k, p)$  из (3.1).
  - 16:             Вычислить  $\hat{x}_i(k, p+1)$  как (2.20) с матрицами  $A$  и  $B$  и  $\hat{y}_i(k, p) = C\hat{x}_i(k, p)$ .
  - 17:         **Конец Для**
  - 18:     **Конец Для**
  - 19: **Конец Для**
- Выход:** Измеренные выходы  $y_{\nu_i}(k, p)$ .
- 

динамика агента описывается следующей моделью:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i(k, t) &= A^{cont}(\delta_i)x_i(k, t) + B^{cont}(u_i(k, t) + \mu_i(k, t)), \\
 y_i(k, t) &= C^{cont}x_i(k, t), \\
 y_{\varsigma_i}(k, t) &= y_i(k, t) + \varsigma_i(k, t),
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

где

$$A^{cont}(\delta_i) = A^{cont} + A_a^{cont}(\delta_i) = A^{cont} + \delta_{i1}A_1,$$

$$A^{cont} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_s}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{K_s(J_l + J_{eq})}{J_{eq}J_l} & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\delta_{i1} \in \left[ \frac{K_s(J_l + J_{eq})}{J_{eq}J_l} - \frac{K_s(\underline{J}_l + J_{eq})}{J_{eq}\underline{J}_l}, \frac{K_s(J_l + J_{eq})}{J_{eq}J_l} - \frac{K_s(\bar{J}_l + J_{eq})}{J_{eq}\bar{J}_l} \right],$$

$$B^{cont} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{J_{eq}} & -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}^\top, \quad C^{cont} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и  $\underline{J}_l = J_l + \Delta\underline{J}_l$  и  $\bar{J}_l = J_l + \Delta\bar{J}_l$  – нижняя и верхняя границы момента инерции звена относительно центра масс соответственно.

Параметры манипуляторов и интенсивности шумов были установлены в значения (2.38), а номинальное значение момента инерции звена  $J_l$  принято равным  $0,0038 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ , при этом возможное отклонение составляло 13%, т. е.  $\Delta\underline{J}_l = -0,13J_l$  и  $\Delta\bar{J}_l = 0,13J_l$ . Желаемая траектория выходного сигнала определялась уравнением (2.39), и продолжительность повторения составляла 3 с. Для оценки результатов была введена требуемая точность  $e^* = 0,05$  рад.

При переходе к дискретной модели для решения задачи синтеза использовался метод Эйлера с шагом  $T_s = 0,01$  с. Разработанная теория предполагает, что  $CB \neq 0$ , однако в данном примере это условие не выполняется, поэтому необходимо обойти это ограничение. Будем использовать наблюдатель полного порядка для системы (3.17) с номинальными параметрами:

$$\frac{d\hat{x}_i(k, t)}{dt} = A^{cont}\hat{x}_i(k, t) + B^{cont}u_i(k, t) + F_i^{cont}(y_{\varsigma_i}(k, t) - C^{cont}\hat{x}_i(k, t)),$$

$$\hat{y}_i(k, t) = C^{cont}\hat{x}_i(k, t),$$

где  $\hat{x}_i(k, t) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – оценка вектора состояния,  $\hat{y}_i(k, t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  – оценка выходного сигнала,  $F_i^{cont}$  – матрица усиления наблюдателя. Для данного примера  $\dot{y}_i(k, t) = C_1^{cont}x_i(k, t)$ ,  $\dot{y}_{\varsigma_i}(k, t) = C_1^{cont}x_i(k, t) + \dot{\varsigma}_i(k, t)$  и  $\dot{\hat{y}}_i(k, t) = C_1^{cont}\hat{x}_i(k, t)$ , где  $C_1^{cont} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Тогда, используя метод Эйлера, для поиска матриц протокола будем использовать дискретную модель в пространстве состояний

$$x_i(k, p + 1) = A(\delta_i)x_i(k, p) + Bu_i(k, p) + D\mu_i(k, p),$$

$$y_i(k, p + 1) = C_1x_i(k, p),$$

$$y_{\varsigma_i}(k, p + 1) = C_1x_i(k, p) + G\varsigma_i(k, p + 1),$$

и наблюдатель

$$\begin{aligned}\hat{x}_i(k, p+1) &= A\hat{x}_i(k, p) + Bu_i(k, p) + F_i(y_{\rho i}(k, p) - C\hat{x}_i(k, p)), \\ \hat{y}_i(k, p+1) &= C_1\hat{x}_i(k, p),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}A(\delta_i) &= T_s A^{cont}(\delta_i) + I_{n_x}, \quad A = T_s A^{cont} + I_{n_x}, \quad B = D = T_s B^{cont}, \\ C &= C^{cont}, \quad C_1 = T_s C_1^{cont} + C^{cont}, \quad G = 1, \quad F_i = T_s F_i^{cont}.\end{aligned}$$

В данном случае введем ошибку обучения как  $\hat{\varepsilon}_i(k, p) = y^{ref}(p+1) - \hat{y}_i(k, p+1)$ , и будем рассматривать закон управления в виде (2.6) и (3.9) с корректирующей поправкой

$$\begin{aligned}\Delta u_i(k+1, p-1) &= K_{1\rho(k+1)}(\hat{x}_i(k+1, p-1) - \hat{x}_i(k, p-1)) + \\ &+ K_{2\rho(k+1)}\left(r_i \hat{\varepsilon}_i(k, p) + \sum_{j \in \mathcal{I}_{\rho(k+1)}} s_{ij}(\hat{\varepsilon}_i(k, p) - \hat{\varepsilon}_j(k, p))\right), \quad i \in \mathcal{I}_{\rho(k+1)}.\end{aligned}$$

В результате матрицы протокола находятся из решения системы матричных уравнений и неравенств (3.16) с матрицами

$$\begin{aligned}A_{11i}(\delta_i) &= \begin{bmatrix} A(\delta_i) - F_i C & A_a(\delta_i) \\ F_i C & A \end{bmatrix}, \quad A_{12} = 0, \quad A_{21i} = \begin{bmatrix} -C_1 F_i C & -C_1 A \end{bmatrix}, \\ A_{22} &= I_{n_y}, \quad B_1(\delta_i) = \begin{bmatrix} 0 & B^\top \end{bmatrix}^\top, \quad B_2 = -C_1 B.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Будем рассматривать сетевую систему из трех агентов с одним лидером и двумя ведомыми, получающими от лидера информацию о желаемом выходном сигнале. Неопределенный параметр лидера задан номинальным значением, а параметры 1-го и 2-го ведомых агентов находятся на нижней и верхней границах соответственно. Рассмотрим последовательное и одновременное подключение агентов. Такие сценарии соответствуют производственной системе с изменением объема производства. Когда объем производства увеличивается, происходит подключение новых агентов, при уменьшении – отключение лишних.

При последовательном подключении сценарий работы сетевой системы определяется следующими топологиями:

1. работает только лидер:

$$\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{1\}, \mathcal{L}_{\rho(k)} = 0, \mathcal{R}_{\rho(k)} = 1, \mathcal{H}_{\rho(k)} = 1$$

при  $\rho(k) = 1$ ;

2. подключается 1-й ведомый агент и получает управляющий сигнал от лидера:

$$\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{1, 2\}, \mathcal{L}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{R}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{H}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

при  $\rho(k) = 2$ ;

3. лидер и 1-й ведомый агент работают самостоятельно, получая доступную им информацию о выходном сигнале:

$$\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{1, 2\}, \mathcal{L}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{R}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{H}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

при  $\rho(k) = 3$ ;

4. подключается 2-й ведомый агент и получает управляющий сигнал от лидера:

$$\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{1, 2, 3\}, \mathcal{L}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{R}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{H}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

при  $\rho(k) = 4$ ;

5. все агенты работают самостоятельно, получая доступную им информацию о выходном сигнале:

$$\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{1, 2, 3\}, \mathcal{L}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{R}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{H}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

при  $\rho(k) = 5$ .

Здесь топологии 2 и 4 являются переходными, остальные – стандартными. На переходных топологиях сетевая система работает не больше одного повторения, после чего

происходит переход на следующую, стандартную топологию.

Для данного сценария путем решения задачи максимизации  $\text{tr}[\bar{X}_{\rho(k)}]$  при ограничениях (3.16) с учетом матриц (3.18),  $2^{lN_{\rho(k)}}$  комбинаций параметров  $\delta_{i1}$ , и весовых матриц  $Q_{1\rho(k)} = 10^{-5}I_{2n_x}$ ,  $Q_{2\rho(k)} = 10^5$  и  $R_{\rho(k)} = 10$  для всех  $\rho(k)$  были получены следующие матрицы протокола:

$$\begin{aligned} K_{1\rho(k)} &= \begin{bmatrix} -15,9727 & -0,8767 & -0,3711 & -0,0253 \end{bmatrix}, K_{2\rho(k)} = 8,7899 \text{ при } \rho(k) = 1, \\ K_{1\rho(k)} &= \begin{bmatrix} -0,1376 & -0,0535 & -0,0115 & -0,0038 \end{bmatrix}, K_{2\rho(k)} = 0,0347 \text{ при } \rho(k) = 2, \\ K_{1\rho(k)} &= \begin{bmatrix} -18,8105 & -0,9889 & -0,4091 & -0,0304 \end{bmatrix}, K_{2\rho(k)} = 6,8661 \text{ при } \rho(k) = 3, \\ K_{1\rho(k)} &= \begin{bmatrix} -0,1122 & -0,0567 & -0,0135 & -0,005 \end{bmatrix}, K_{2\rho(k)} = 0,0007 \text{ при } \rho(k) = 4, \\ K_{1\rho(k)} &= \begin{bmatrix} -20,9184 & -1,1087 & -0,4372 & -0,0371 \end{bmatrix}, K_{2\rho(k)} = 6,5078 \text{ при } \rho(k) = 5. \end{aligned}$$

На рисунках 8 и 9 представлены графики изменения выборочных среднеквадратических ошибок выходных сигналов (2.41). Переключающий сигнал задан следующим образом:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k < 20, \\ 2, & k = 20, \\ 3, & 20 < k < 40, \\ 4, & k = 40, \\ 5, & k > 40, \end{cases}$$

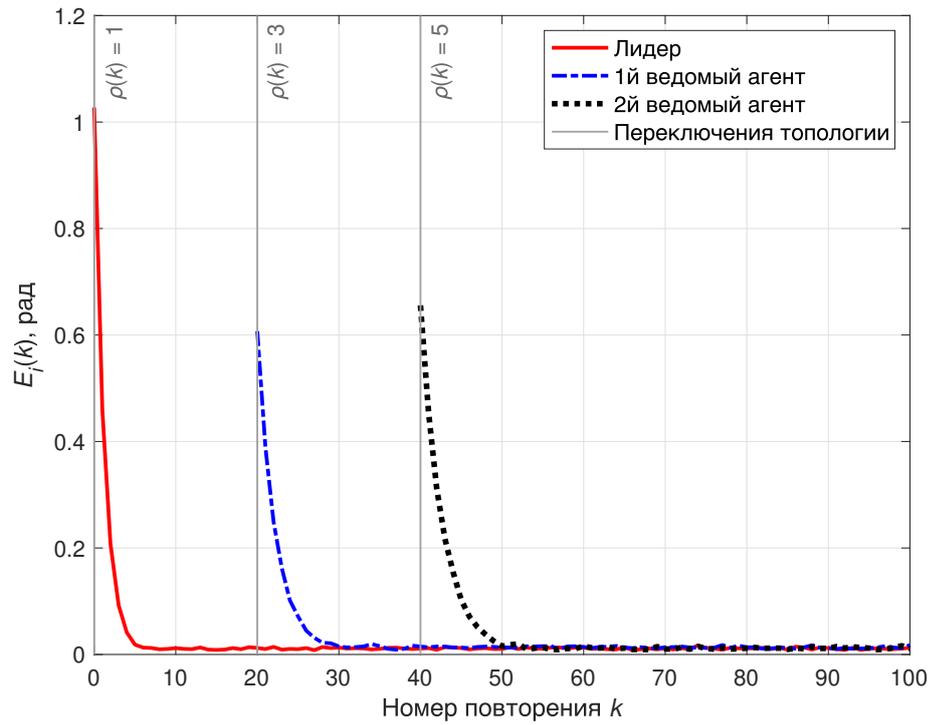
то есть подключение ведомых агентов происходит на повторениях 20 и 40.

Из данных результатов видно, что предложенный подход к управлению позволяет снизить величину ошибок подключаемых агентов в момент смены топологии, благодаря чему они быстрее достигли требуемую точность выполнения операции (первый ведомый на 4 повторения быстрее, а второй – на 5 повторений). Также видно, что это оказало влияние на функционирующих агентов, но их ошибка не превысила требуемого значения.

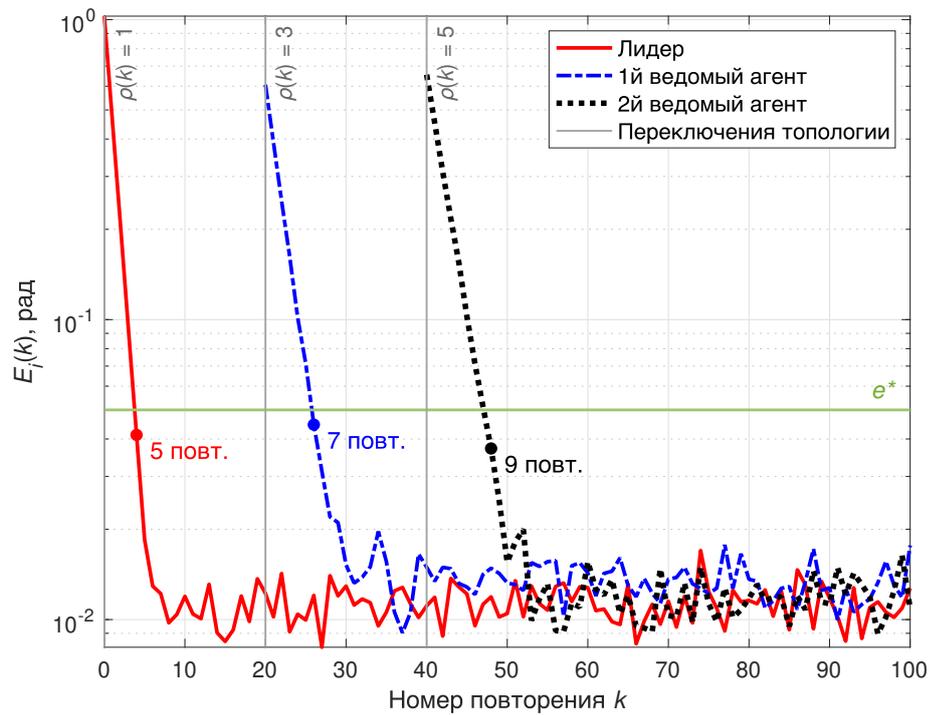
Топологии при одновременном подключении:

1. работает только лидер:

$$\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{1\}, \mathcal{L}_{\rho(k)} = 0, \mathcal{R}_{\rho(k)} = 1, \mathcal{H}_{\rho(k)} = 1$$

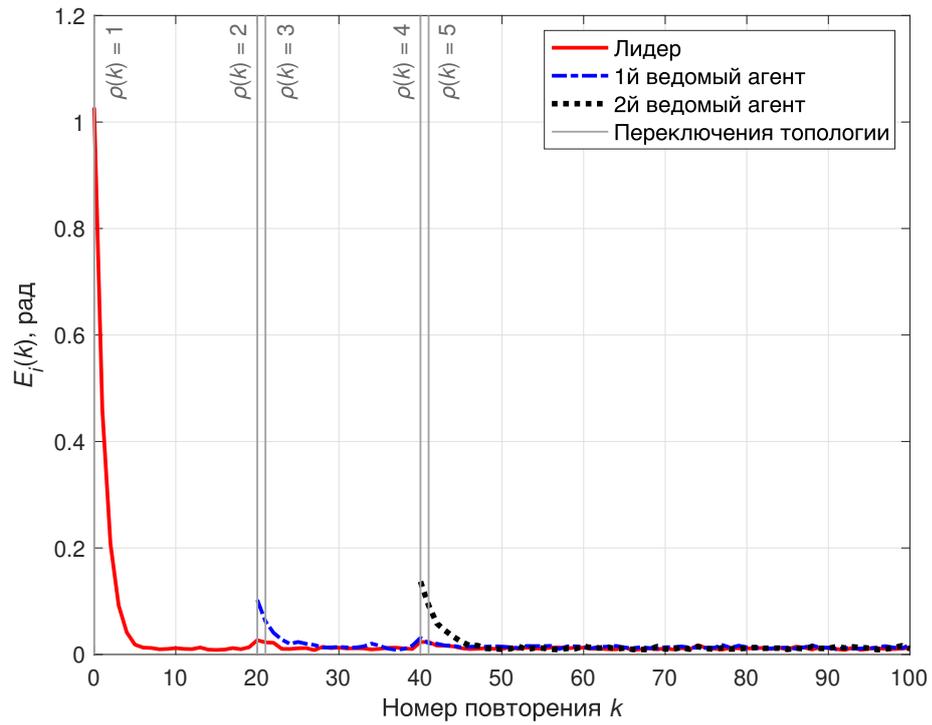


а)

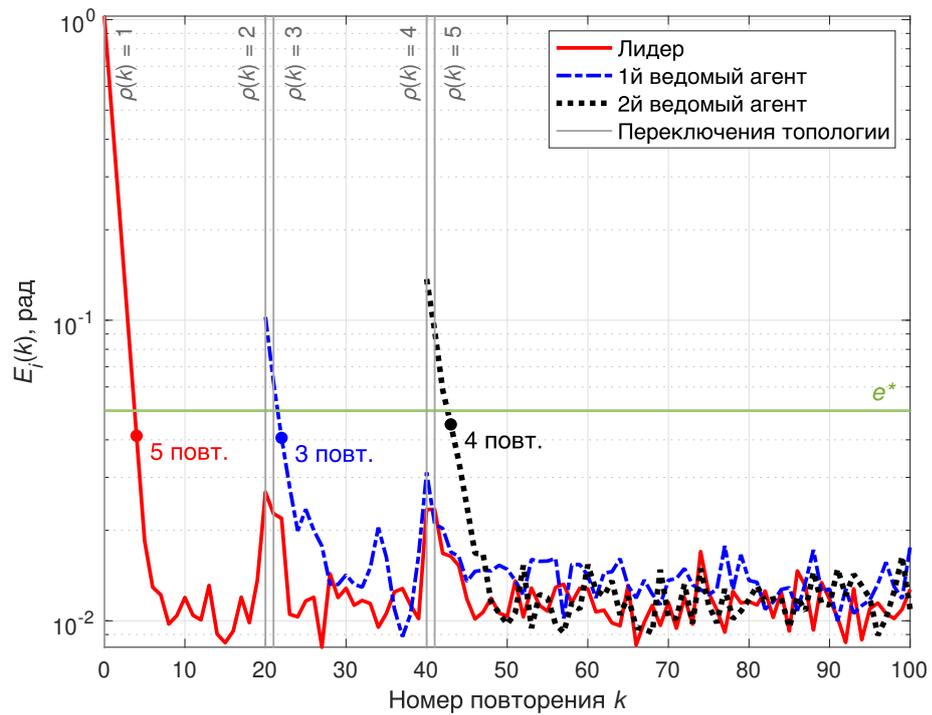


б)

Рис. 8 – Выборочные среднеквадратические ошибки обучения агентов (3.17) при последовательном подключении без передачи управляющего сигнала: а) линейный масштаб; б) логарифмический масштаб



а)



б)

Рис. 9 – Выборочные среднеквадратические ошибки обучения агентов (3.17) при последовательном подключении с передачей управляющего сигнала: а) линейный масштаб; б) логарифмический масштаб

при  $\rho(k) = 1$ ;

2. подключаются ведомые агенты и получают управляющий сигнал от лидера:

$$\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{1, 2, 3\}, \mathcal{L}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{R}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{H}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

при  $\rho(k) = 2$ ;

3. все агенты работают самостоятельно, получая доступную им информацию о выходном сигнале:

$$\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{1, 2, 3\}, \mathcal{L}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{R}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{H}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

при  $\rho(k) = 3$ .

В данном случае топология 2 является переходной, а остальные – стандартными.

Решая задачу оптимизации, аналогичную выше рассмотренной, для всех  $\rho(k)$ , были получены следующие матрицы протокола:

$$\begin{aligned} K_{1\rho(k)} &= \begin{bmatrix} -15,9727 & -0,8767 & -0,3711 & -0,0253 \end{bmatrix}, K_{2\rho(k)} = 8,7899 \text{ при } \rho(k) = 1, \\ K_{1\rho(k)} &= \begin{bmatrix} -0,0301 & -0,0192 & -0,0042 & -0,0016 \end{bmatrix}, K_{2\rho(k)} = 0,0002 \text{ при } \rho(k) = 2, \\ K_{1\rho(k)} &= \begin{bmatrix} -20,9184 & -1,1087 & -0,4372 & -0,0371 \end{bmatrix}, K_{2\rho(k)} = 6,5078 \text{ при } \rho(k) = 3. \end{aligned}$$

Графики выборочных среднеквадратических ошибок обучения, полученные при моделировании данного сценария, представлены на рисунках 10 и 11. Переключающий сигнал задан следующим образом:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, & k < 30, \\ 2, & k = 30, \\ 3, & k > 30, \end{cases}$$

то есть подключение ведомых агентов происходит на повторении 30. При подключении ведомых агентов ошибка лидера вышла за рамки требуемой точности на одно по-

вторение, однако передача его управления позволила повысить скорость сходимости ведомых.

### 3.5 Частный случай без учета случайных возмущений

Для уточнения некоторых фактов кратко опишем частный случай рассмотренной в данной главе сетевой системы, в которой модель агентов не учитывает внешние возмущения и шумы измерений, т. е. динамика агентов описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x_i(k, p+1) &= A(\delta_i(p))x_i(k, p) + B(\delta_i(p))u_i(k, p), \\ y_i(k, p) &= Cx_i(k, p), \quad i \in \mathcal{I}, k \geq 0, 0 \leq p \leq T-1. \end{aligned}$$

В этом случае задача заключается в обеспечении консенсуса в смысле

$$\|e_i(k, p)\| \leq \kappa \varrho^k, \quad \kappa > 0, 0 < \varrho < 1, \quad (3.19)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_i(k, p)\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|u_i(k, p)\| = \|u_i(\infty, p)\| < \infty, \quad i \in \mathcal{I}, 0 \leq p \leq T-1, \quad (3.20)$$

где ошибка  $e_i(k, p)$  определяется в виде (2.18).

Для законов управления (2.6) и (3.9) корректирующая поправка определяется как

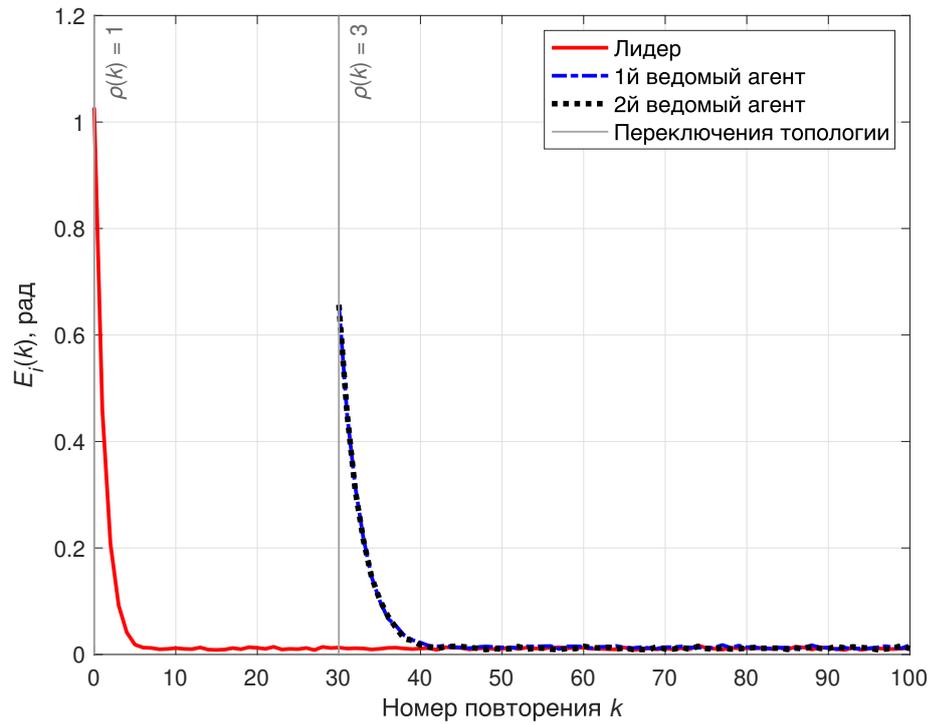
$$\begin{aligned} \Delta u_i(k+1, p-1) &= K_{1\rho(k+1)}(x_i(k+1, p-1) - x_i(k, p-1)) \\ &+ K_{2\rho(k+1)} \left( r_i(y^{ref}(p) - y_i(k, p)) + \sum_{j \in \mathcal{I}_{\rho(k+1)}} s_{ij}(y_j(k, p) - y_i(k, p)) \right), \quad i \in \mathcal{I}_{\rho(k+1)}, \end{aligned}$$

где  $r_i$  и  $s_{ij}$  – элементы матриц  $\mathcal{R}_{\rho(k+1)}$  и  $\mathcal{S}_{\rho(k+1)}$  соответственно, и матрицы протокола  $K_{1\rho(k+1)}$  и  $K_{2\rho(k+1)}$ , удовлетворяющие условиям (3.19)-(3.20), находятся из решения системы линейных матричных неравенств

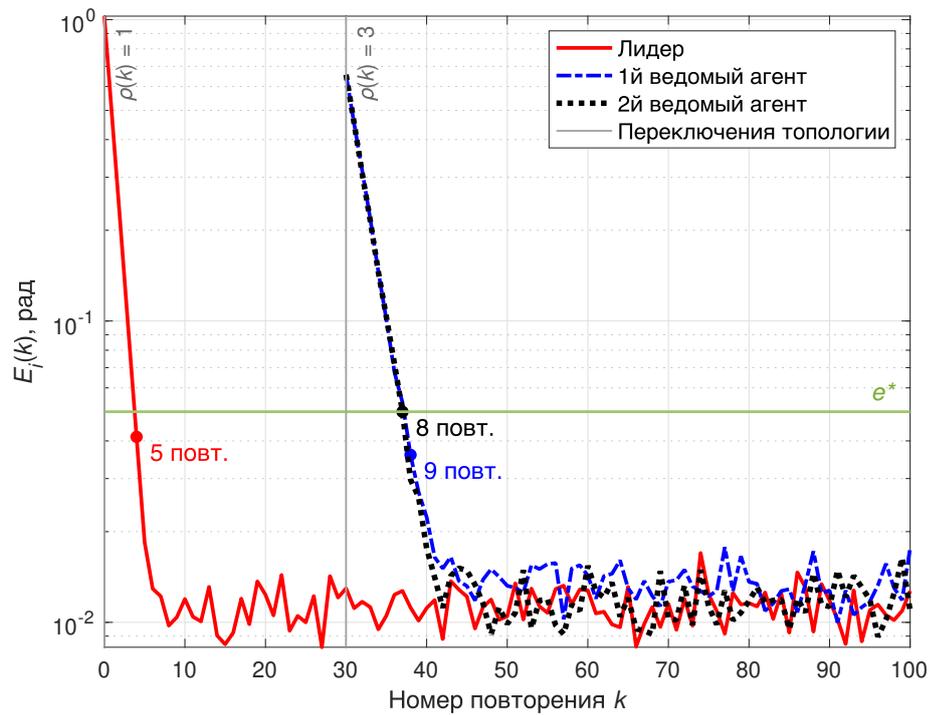
$$\begin{bmatrix} \bar{X}_\rho & (\bar{A}_\rho(\boldsymbol{\delta})\bar{X}_\rho + \bar{B}_\rho(\boldsymbol{\delta})\bar{Y}_\rho\bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top & \bar{X}_\rho & (\bar{Y}_\rho\bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \\ \bar{A}_\rho(\boldsymbol{\delta})\bar{X}_\rho + \bar{B}_\rho(\boldsymbol{\delta})\bar{Y}_\rho\bar{\mathcal{H}}_\rho & \bar{X}_\rho & 0 & 0 \\ \bar{X}_\rho & 0 & \bar{Q}_\rho^{-1} & 0 \\ \bar{Y}_\rho\bar{\mathcal{H}}_\rho & 0 & 0 & \bar{R}_\rho^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \bar{X}_\rho \succ 0 \quad (3.21)$$

с матрицами

$$\bar{A}_\rho(\boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} \text{diag}[A(\delta_{i_n})]_{n=1}^{N_\rho} & 0 \\ \text{diag}[-CA(\delta_{i_n})]_{n=1}^{N_\rho} & I_{N_\rho n_y} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_\rho(\boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} \text{diag}[B(\delta_{i_n})]_{n=1}^{N_\rho} \\ \text{diag}[-CB(\delta_{i_n})]_{n=1}^{N_\rho} \end{bmatrix},$$

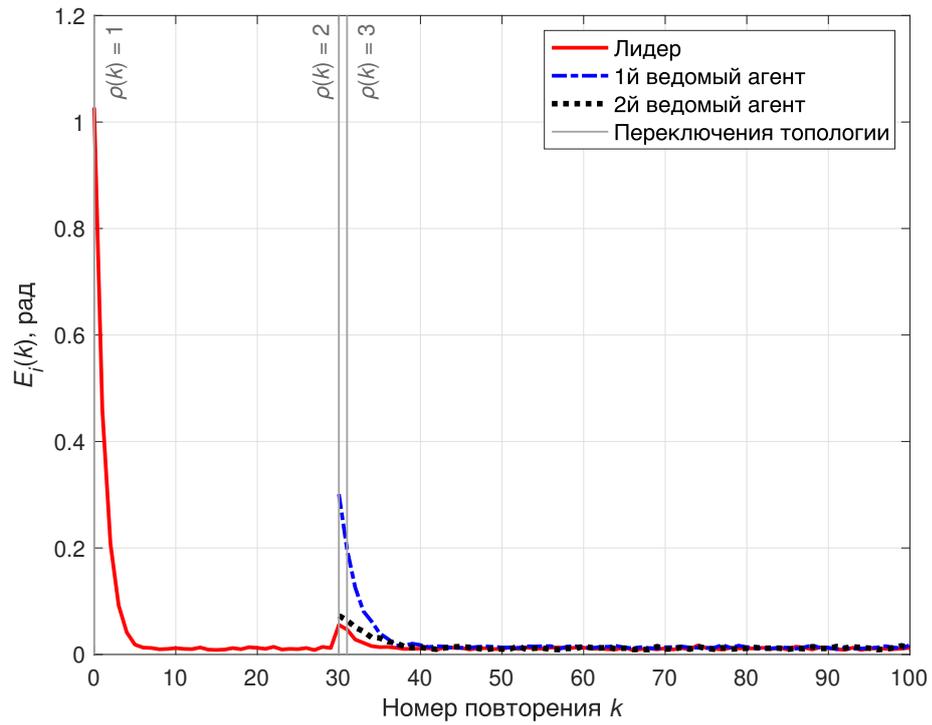


а)

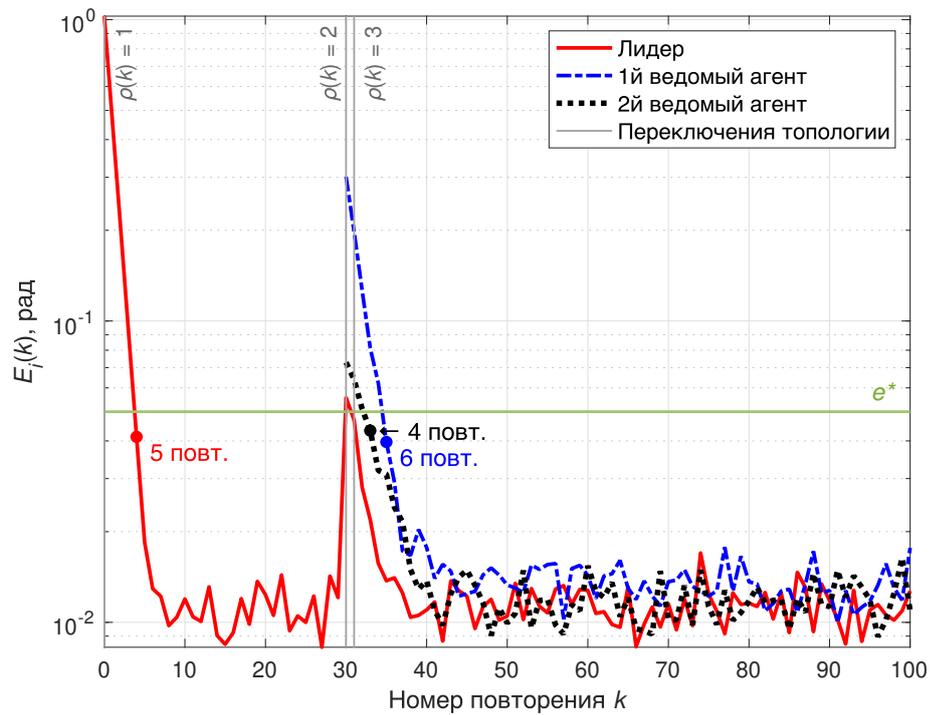


б)

Рис. 10 – Выборочные среднеквадратические ошибки обучения агентов (3.17) при одновременном подключении без передачи управляющего сигнала: а) линейный масштаб; б) логарифмический масштаб



а)



б)

Рис. 11 – Выборочные среднеквадратические ошибки обучения агентов (3.17) при одновременном подключении с передачей управляющего сигнала: а) линейный масштаб; б) логарифмический масштаб

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{H}}_\rho &= \text{diag} \left[ \mathcal{H}_\rho \otimes I_{n_x} \quad \mathcal{H}_\rho(\mathcal{L}_\rho + \mathcal{R}_\rho) \otimes I_{n_y} \right], \quad \bar{X}_\rho = \text{diag} \left[ I_{N_\rho} \otimes X_{1\rho} \quad I_{N_\rho} \otimes X_{2\rho} \right], \\ \bar{Y}_\rho &= \left[ I_{N_\rho} \otimes Y_{1\rho} \quad I_{N_\rho} \otimes Y_{2\rho} \right], \quad \bar{Q}_\rho = \text{diag} \left[ I_{N_\rho} \otimes Q_{1\rho} \quad I_{N_\rho} \otimes Q_{2\rho} \right], \quad \bar{R}_\rho = I_{N_\rho} \otimes R_\rho\end{aligned}$$

относительно  $\bar{X}_{1\rho}$ ,  $\bar{X}_{2\rho}$ ,  $\bar{Y}_{1\rho}$  и  $\bar{Y}_{2\rho}$  для всех  $\delta \in \Delta_v$ , где  $\rho = \rho(k+1)$ . При этом матрицы протокола определяются выражениями

$$K_{1\rho(k+1)} = Y_{1\rho(k+1)} X_{1\rho(k+1)}^{-1}, \quad K_{2\rho(k+1)} = Y_{2\rho(k+1)} X_{2\rho(k+1)}^{-1}.$$

При моделировании рассматривалась непрерывная модель динамики манипуляторов с поворотным гибким звеном в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(k, t) &= A^{\text{cont}}(\delta_i)x_i(k, t) + B^{\text{cont}}u_i(k, t), \\ y_i(k, t) &= C^{\text{cont}}x_i(k, t)\end{aligned}\tag{3.22}$$

с матрицами и параметрами из примера, рассмотренного в разделе 3.4. Для синтеза управления использовалась следующая дискретная модель в пространстве состояний, полученная с использованием метода Эйлера:

$$\begin{aligned}x_i(k, p+1) &= A(\delta_i)x_i(k, p) + Bu_i(k, p), \\ y_i(k, p+1) &= Cx_i(k, p),\end{aligned}$$

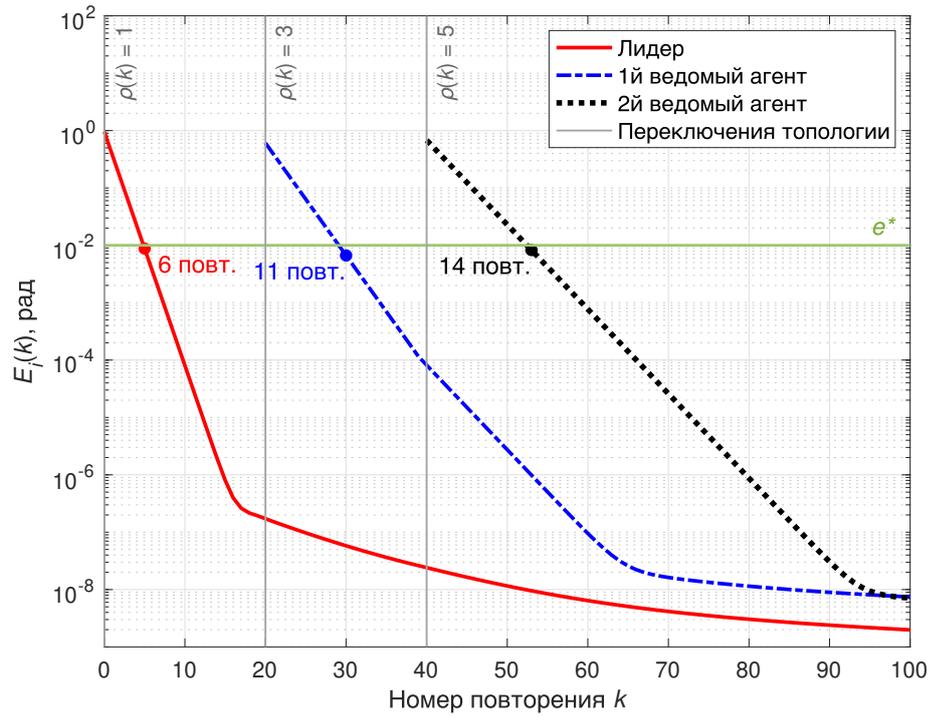
где

$$A(\delta_i) = A^{\text{cont}}(\delta_i)T_s + I_{n_x}, \quad B = B^{\text{cont}}T_s, \quad C = C^{\text{cont}} + C_1^{\text{cont}}T_s, \quad C_1^{\text{cont}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

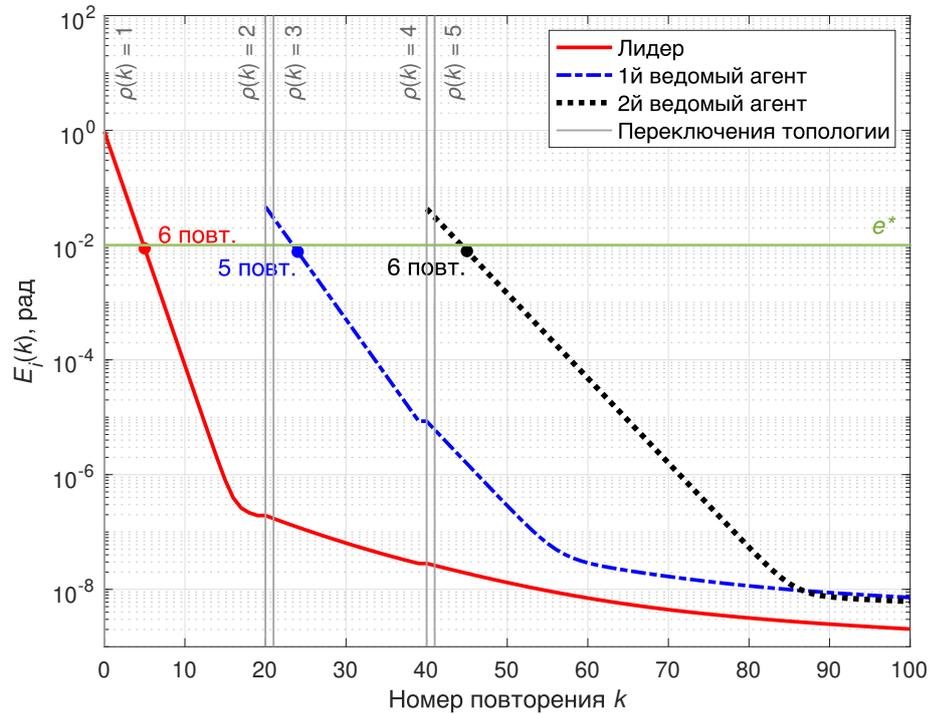
и период дискретизации составляет  $T_s = 0,01$  с.

Результаты моделирования сценариев с последовательным и одновременным подключением представлены на рисунках 12 и 13 соответственно, где требуемая точность составила  $e^* = 0,01$  рад. Конфигурация сетевой системы и параметры агентов аналогичны тем, что были рассмотрены в разделе 3.4. Поиск матриц протокола осуществлялся путем решения задачи максимизации  $\text{tr}[\bar{X}_{\rho(k)}]$  с ограничениями в виде линейных матричных неравенств (3.21) и весовыми матрицами  $Q_{1\rho(k)} = 10^{-5}I_{2n_x}$ ,  $Q_{2\rho(k)} = 10^5$  и  $R_{\rho(k)} = 10$  для всех сценариев и предусмотренных ими топологий.

Сравнивая данные результаты моделирования с результатами, полученными для стохастической сетевой системы, заметим, насколько сильное влияние оказывают слу-

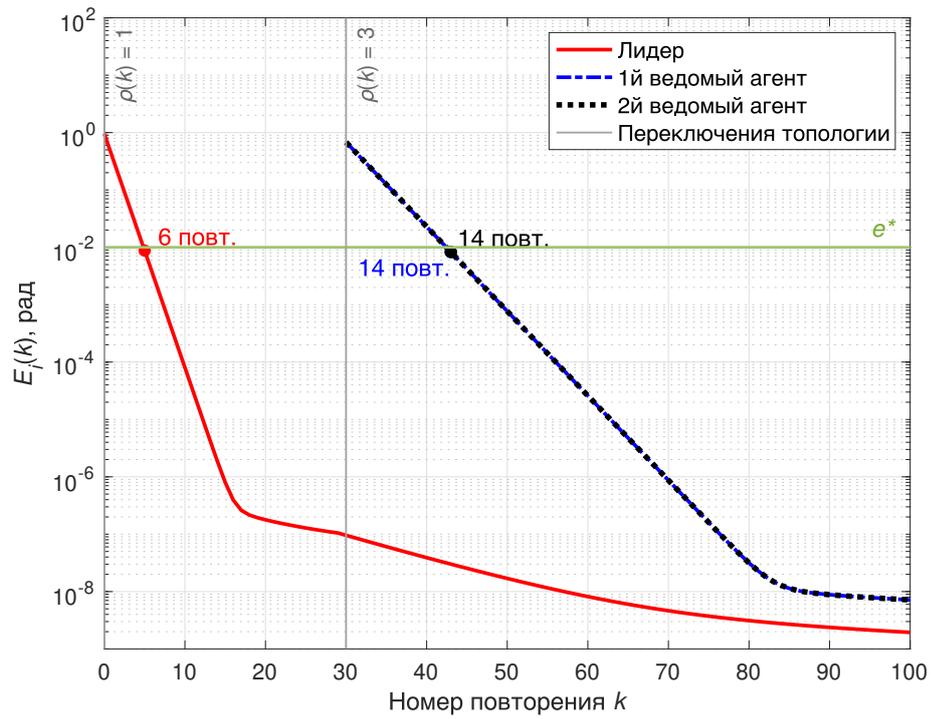


а)

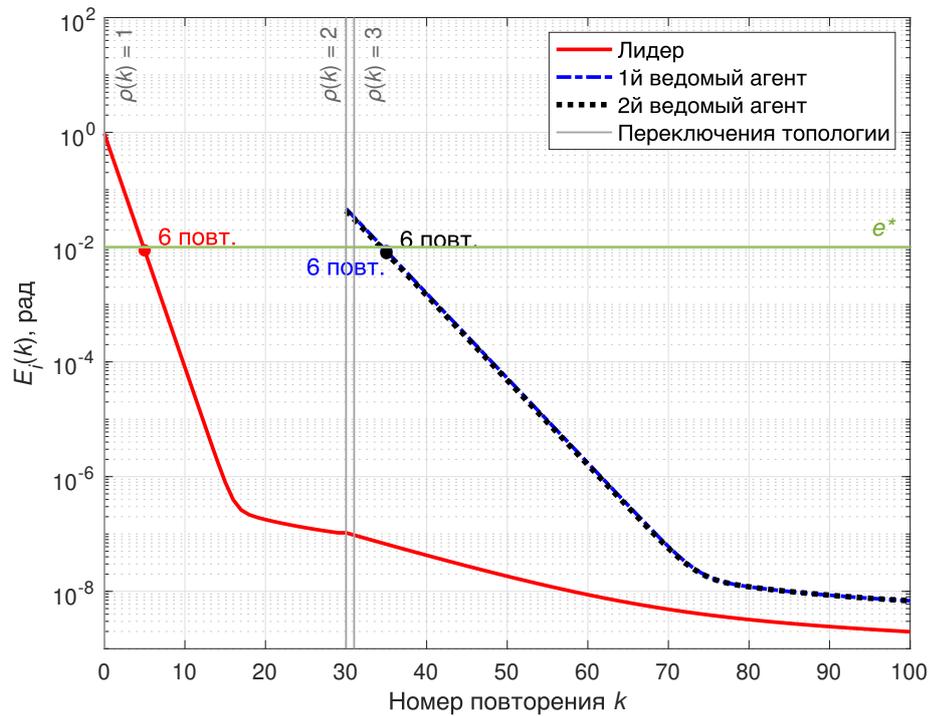


б)

Рис. 12 – Среднеквадратические ошибки обучения агентов (3.22) при последовательном подключении (логарифмический масштаб): а) без передачи управляющего сигнала; б) с передачей управляющего сигнала



а)



б)

Рис. 13 – Среднеквадратические ошибки обучения агентов (3.22) при одновременном подключении (логарифмический масштаб): а) без передачи управляющего сигнала; б) с передачей управляющего сигнала

чайные возмущения как на точность отслеживания желаемой траектории, так и на весь процесс обучения в целом. В обоих случаях данный подход демонстрирует высокую скорость сходимости, однако видно, что при наличии помех подключаемые агенты медленнее достигают требуемую точность выполнения операции. Также в стохастической системе подключение агентов увеличивает ошибку функционирующих агентов на несколько повторений, что можно связать с присутствием внешних воздействий и шумов, поскольку без них подключение агентов только замедляет скорость сходимости и только на одно повторение, на котором система работает в переходной топологии.

### 3.6 Выводы по главе 3

В данной главе с использованием дивергентного метода векторных функций Ляпунова получен закон УИО стохастической сетевой системой с изменяемой топологией информационной сети, модель динамики агентов которой учитывает параметрические неопределенности. В целях снижения величины переходной ошибки, увеличение которой происходит в момент подключения агентов к сети, предложено правило переключения закона УИО, которое заключается в передаче подключаемым агентам управляющего сигнала функционирующих агентов. Полученный закон является робастным по отношению к заданным неопределенностям, и результаты моделирования сетевой системы показали, что он обеспечивает высокую скорость сходимости выходного сигнала к желаемой траектории и позволяет снизить величину переходной ошибки подключаемых агентов в среднем в 4 раза, что позволяет им быстрее достичь требуемой точности выполнения операции. Однако отметим, что компенсация ошибки подключаемых агентов происходит в ущерб функционирующим, и при наличии случайных возмущений это может привести к снижению точности последних ниже требуемого значения на несколько повторений. Также к недостаткам данного подхода можно отнести то, что для каждой пары стандартных топологий должна быть сформирована своя переходная топология.

## 4 Управление с итеративным обучением

### стохастическими сетевыми системами при изменении желаемой траектории выходного сигнала

В данной главе описан метод синтеза УИО сетевой системой при изменении режима работы агентов, который устанавливает параметры агентов и желаемую траекторию их выходных сигналов. Он определяется для всех агентов одинаково и может быть изменен во время функционирования сетевой системы. Поскольку переключение режима влечет за собой рост переходной ошибки, предложено специальное правило переключения закона УИО. В случае, когда агент имеет доступ к информации о желаемой траектории, закон управления, компенсирующий переходную ошибку, находится из решения задачи минимизации среднеквадратической ошибки. В противном случае решается аналогичная задача, но вместо ошибки рассматривается отклонение выходного сигнала ведомого от выходных сигналов ведущих.

#### 4.1 Описание сетевой системы и постановка задачи

Рассмотрим сетевую систему из  $N$  агентов, динамика которых описывается дискретной моделью в пространстве состояний

$$\begin{aligned}x_i(k, p + 1) &= A_{\sigma_i(k)}x_i(k, p) + B_{\sigma_i(k)}u_i(k, p) + D_{\sigma_i(k)}\omega_i(k, p), \\y_i(k, p) &= Cx_i(k, p), \\y_{\nu_i}(k, p) &= y_i(k, p) + G_{\sigma_i(k)}\nu_i(k, p), \quad i \in \mathcal{I}, k \geq 0, 0 \leq p \leq T - 1,\end{aligned}\tag{4.1}$$

где граничные условия  $x_i(k, 0)$  и  $u_i(0, p)$  считаются известными, а модель шумов аналогична той, что была принята в разделе 3.1.

Операция, выполняемая агентами на повторении  $k$ , задана одинаково для всех и определяется одним из  $m$  режимов работы. Каждый режим задает свою желаемую траекторию  $y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p)$  и матрицы агентов  $A_{\sigma_i(k)} \in \{A_1, \dots, A_m\}$ ,  $B_{\sigma_i(k)} \in \{B_1, \dots, B_m\}$ ,  $D_{\sigma_i(k)} \in \{D_1, \dots, D_m\}$  и  $G_{\sigma_i(k)} \in \{G_1, \dots, G_m\}$ , где  $\sigma_i(k)$  – сигнал, переключающий режим работы агента  $i$ , представляющий собой кусочно-постоянную функцию, отображающую  $\mathbb{Z}_+$  в  $\{1, 2, \dots, m\}$ . Точки разрыва функции  $\sigma_i(k)$  будем называть моментами переключения режима. Предполагается, что тройки  $(A_{\sigma_i(k)}, B_{\sigma_i(k)}, C)$  полностью управляемы и наблюдаемы,  $CB_{\sigma_i(k)} \neq 0$ , и общее число переключений  $\mathbf{N}_\sigma$  конечно.

В данном случае топология информационной сети определяется графом (2.2) и матрицами (2.3)-(2.5), и остается неизменной на всем протяжении работы системы. В сетевых системах, предусматривающих изменение режима работы, агента  $i$ , для которого  $r_i = 1$ , будем именовать *глобальным лидером*, где  $r_i$  – диагональный элемент матрицы (2.5). Если агент  $i$  является ведомым, т. е.  $r_i = 0$ , то агента  $j$ , для которого  $s_{ij} > 0$ , будем именовать *локальным лидером* агента  $i$ , и будем предполагать, что он не может получать данные от своих ведомых, т. е.  $s_{ji} = 0$ .

Ошибка обучения

$$e_i(k, p) = y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p) - y_i(k, p)$$

недоступна для измерения, поэтому в дальнейшем вместо нее будем использовать

$$\hat{e}_i(k, p) = y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p) - \hat{y}_i(k, p), \quad (4.2)$$

где  $\hat{y}_i(k, p) = C\hat{x}_i(k, p)$ ,  $\hat{x}_i(k, p)$  – оценка состояния агента  $i$ , полученная с использованием фильтра Калмана

$$\hat{x}_i(k, p + 1) = A_{\sigma_i(k)}\hat{x}_i(k, p) + B_{\sigma_i(k)}u_i(k, p) + F_{i\sigma_i(k)}(y_{\nu_i}(k, p) - C\hat{x}_i(k, p)), \quad i \in \mathcal{I} \quad (4.3)$$

с начальным условием  $\hat{x}_i(k, 0) = F_{i\sigma_i(k)}y_{\nu_i}(k, 0)$ , где

$$F_{i\sigma_i(k)} = A_{\sigma_i(k)}S_{i\sigma_i(k)}C^\top (CS_{i\sigma_i(k)}C^\top + G_{\sigma_i(k)}S_{\nu_i}G_{\sigma_i(k)}^\top)^{-1},$$

и  $S_{i\sigma_i(k)}$  – решение алгебраического уравнения Риккати

$$\begin{aligned} S_{i\sigma_i(k)} = & A_{\sigma_i(k)}S_{i\sigma_i(k)}A_{\sigma_i(k)}^\top - \\ & - A_{\sigma_i(k)}S_{i\sigma_i(k)}C^\top (CS_{i\sigma_i(k)}C^\top + G_{\sigma_i(k)}S_{\nu_i}G_{\sigma_i(k)}^\top)^{-1}CS_{i\sigma_i(k)}A_{\sigma_i(k)}^\top + \\ & + D_{\sigma_i(k)}S_{\omega_i}D_{\sigma_i(k)}^\top, \quad i \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Задача заключается в поиске такого протокола  $u_i(k, p)$ , который позволит достичь консенсуса в смысле (2.21)-(2.22).

## 4.2 Решение задачи

### 4.2.1 Управление при фиксированном режиме работы агентов

В начале рассмотрим случай, когда режим работы агентов установлен, т. е. рассмотрим интервал вдоль повторений, на котором сигналы  $\sigma_i(k)$  не имеют точек разрыва и их значения равны для всех  $i$  и  $k$ . Далее в рамках данного случая для краткости обозначим  $\sigma = \sigma_i(k+1) = \sigma_i(k)$ . Протокол для системы (4.1) будем формировать в виде (2.6) с корректирующей поправкой

$$\begin{aligned} \Delta u_i(k+1, p-1) = & K_{1\sigma}(\hat{x}_i(k+1, p-1) - \hat{x}_i(k, p-1)) + \\ & + K_{2\sigma} \left( r_i(y_\sigma^{ref}(p) - \hat{y}_i(k, p)) + \sum_{j \in \mathcal{I}} s_{ij}(\hat{y}_j(k, p) - \hat{y}_i(k, p)) \right), \quad i \in \mathcal{I}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где  $K_{1\sigma}$  и  $K_{2\sigma}$  – матрицы протокола в режиме  $\sigma$ .

Относительно векторов (2.25), (2.26) и (4.2) с учетом (2.6) и (4.3) динамика агента  $i$  будет описываться уравнениями

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_i(k+1, p+1) = & (A_\sigma - F_{i\sigma}C)\tilde{\eta}_i(k+1, p) + \\ & + D_\sigma \Delta \omega_i(k+1, p-1) - F_{i\sigma}G_\sigma \Delta \nu_i(k+1, p-1), \\ \hat{\eta}_i(k+1, p+1) = & F_{i\sigma}C\tilde{\eta}_i(k+1, p) + A_\sigma \hat{\eta}_i(k+1, p) + \\ & + B_\sigma \Delta u_i(k+1, p-1) + F_{i\sigma}G_\sigma \Delta \nu_i(k+1, p-1), \\ \hat{e}_i(k+1, p) = & -CF_{i\sigma}C\tilde{\eta}_i(k+1, p) - CA_\sigma \hat{\eta}_i(k+1, p) + \hat{e}_i(k, p) - \\ & - CB_\sigma \Delta u_i(k+1, p-1) - CF_{i\sigma}G_\sigma \Delta \nu_i(k+1, p-1), \end{aligned}$$

где  $\Delta \omega_i(k+1, p-1)$  и  $\Delta \nu_i(k+1, p-1)$  определяются как (2.28) и (2.29) соответственно. Первое уравнение в этой системе не зависит от других, следовательно, справедлив хорошо известный для обычных линейных систем принцип разделения, согласно которому фильтр и регулятор можно синтезировать независимо. Поэтому  $\tilde{\eta}_i(\cdot, \cdot)$  можно рассматривать как внешнюю ограниченную переменную, и для дальнейшего анализа использовать следующую систему:

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_i(k+1, p+1) = & A_\sigma \hat{\eta}_i(k+1, p) + B_\sigma \Delta u_i(k+1, p-1) + F_{i\sigma}G_\sigma \Delta \nu_i(k+1, p-1), \\ \hat{e}_i(k+1, p) = & -CA_\sigma \hat{\eta}_i(k+1, p) + \hat{e}_i(k, p) - \\ & - CB_\sigma \Delta u_i(k+1, p-1) - CF_{i\sigma}G_\sigma \Delta \nu_i(k+1, p-1). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Введем расширенные векторы

$$\begin{aligned}\hat{\eta}(k, p) &= \left[ \hat{\eta}_1^\top(k, p) \quad \dots \quad \hat{\eta}_N^\top(k, p) \right]^\top, \quad \hat{e}(k, p) = \left[ \hat{e}_1^\top(k, p) \quad \dots \quad \hat{e}_N^\top(k, p) \right]^\top, \\ \Delta\nu(k, p) &= \left[ \Delta\nu_1^\top(k, p) \quad \dots \quad \Delta\nu_N^\top(k, p) \right]^\top,\end{aligned}$$

и, с учетом (4.4), перепишем (4.5) в виде расширенной системы

$$\begin{aligned}\hat{\eta}(k+1, p+1) &= (\bar{A}_{11\sigma} + \bar{B}_{1\sigma}\bar{K}_{1\sigma}\bar{\mathcal{H}}_1)\hat{\eta}(k+1, p) + \\ &\quad + (\bar{A}_{12} + \bar{B}_{1\sigma}\bar{K}_{2\sigma}\bar{\mathcal{H}}_2)\hat{e}(k, p) + \bar{D}_{1\sigma}\Delta\nu(k+1, p-1), \\ \hat{e}(k+1, p) &= (\bar{A}_{21\sigma} + \bar{B}_{2\sigma}\bar{K}_{1\sigma}\bar{\mathcal{H}}_1)\hat{\eta}(k+1, p) + \\ &\quad + (\bar{A}_{22} + \bar{B}_{2\sigma}\bar{K}_{2\sigma}\bar{\mathcal{H}}_2)\hat{e}(k, p) + \bar{D}_{2\sigma}\Delta\nu(k+1, p-1),\end{aligned}\tag{4.6}$$

где

$$\begin{aligned}\bar{A}_{11\sigma} &= I_N \otimes A_\sigma, \quad \bar{A}_{12} = 0, \quad \bar{A}_{21\sigma} = I_N \otimes (-CA_\sigma), \quad \bar{A}_{22} = I_{Nn_y}, \quad \bar{B}_{1\sigma} = I_N \otimes B_\sigma, \\ \bar{B}_{2\sigma} &= I_N \otimes (-CB_\sigma), \quad \bar{K}_{1\sigma} = I_N \otimes K_{1\sigma}, \quad \bar{K}_{2\sigma} = I_N \otimes K_{2\sigma}, \quad \bar{\mathcal{H}}_1 = I_{Nn_x}, \\ \bar{\mathcal{H}}_2 &= (\mathcal{L} + \mathcal{R}) \otimes I_{n_y}, \quad \bar{D}_{1\sigma} = \text{diag}[F_{i\sigma}G_\sigma]_{i=1}^N, \quad \bar{D}_{2\sigma} = \text{diag}[-CF_{i\sigma}G_\sigma]_{i=1}^N.\end{aligned}$$

Система (4.6) записана в стандартной форме повторяющегося процесса и дальнейший вывод условий сходимости будет основан на теории устойчивости стохастических повторяющихся процессов с переключениями [61]. Рассмотрим векторную функцию Ляпунова вида

$$V_\sigma(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} V_{1\sigma}(\xi) \\ V_{2\sigma}(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad \epsilon \in \mathbb{R}^{n_y},\tag{4.7}$$

где  $V_{1\sigma}(\xi) > 0$ ,  $\xi \neq 0$ ,  $V_{2\sigma}(\epsilon) > 0$ ,  $\epsilon \neq 0$ ,  $V_{1\sigma}(0) = 0$  и  $V_{2\sigma}(0) = 0$ , и стохастический аналог ее дивергенции

$$\begin{aligned}DV_\sigma(\xi, \epsilon) &= \mathbb{E} \left[ V_{1\sigma}(\hat{\eta}(k+1, p+1)) | \hat{\eta}(k+1, p) = \xi, \hat{e}(k, p) = \epsilon \right] - \\ &\quad - V_{1\sigma}(\xi) + \mathbb{E} \left[ V_{2\sigma}(\hat{e}(k+1, p)) | \hat{\eta}(k+1, p) = \xi, \hat{e}(k, p) = \epsilon \right] - V_{2\sigma}(\epsilon).\end{aligned}$$

**Теорема 4.1.** Пусть существует векторная функция Ляпунова (4.7) и положительные скаляры  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  и  $\gamma$  такие, что для всех  $\sigma$  на траекториях системы (4.6)

выполняются неравенства

$$\begin{aligned} c_1 \|\xi\|^2 &\leq V_{1\sigma}(\xi) \leq c_2 \|\xi\|^2, \\ c_1 \|\epsilon\|^2 &\leq V_{2\sigma}(\epsilon) \leq c_2 \|\epsilon\|^2, \\ \mathcal{D}V_\sigma(\xi, \epsilon) &\leq \gamma - c_3 (\|\xi\|^2 + \|\epsilon\|^2). \end{aligned}$$

Тогда закон управления (2.6) с корректирующей поправкой (4.4) обеспечит выполнение условия сходимости ошибки (2.21).

Выбрав компоненты векторной функции Ляпунова (4.7) в виде квадратичных форм

$$V_{1\sigma}(\xi) = \xi^\top \bar{P}_{1\sigma} \xi, \quad V_{2\sigma}(\epsilon) = \epsilon^\top \bar{P}_{2\sigma} \epsilon,$$

где  $\bar{P}_{1\sigma} = I_N \otimes P_{1\sigma}$  и  $\bar{P}_{2\sigma} = I_N \otimes P_{2\sigma}$ , и выполнив процедуру, аналогичную той, что была описана в разделе 3.3, было получено, что условия теоремы 4.1 будут выполнены, если матричные неравенства

$$(\bar{A}_\sigma + \bar{B}_\sigma \bar{K}_\sigma \bar{\mathcal{H}})^\top \bar{P}_\sigma (\bar{A}_\sigma + \bar{B}_\sigma \bar{K}_\sigma \bar{\mathcal{H}}) - \bar{P}_\sigma + \bar{Q} + (\bar{K}_\sigma \bar{\mathcal{H}})^\top \bar{R} \bar{K}_\sigma \bar{\mathcal{H}} \preceq 0, \quad \bar{P}_\sigma \succ 0$$

разрешимы относительно  $\bar{P}_\sigma = \text{diag} \begin{bmatrix} \bar{P}_{1\sigma} & \bar{P}_{2\sigma} \end{bmatrix}$  для всех  $\sigma$ . Здесь

$$\begin{aligned} \bar{A}_\sigma &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11\sigma} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21\sigma} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_\sigma = \begin{bmatrix} \bar{B}_{1\sigma} \\ \bar{B}_{2\sigma} \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_\sigma = \begin{bmatrix} \bar{K}_{1\sigma} & \bar{K}_{2\sigma} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{H}} = \text{diag} \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{H}}_1 & \bar{\mathcal{H}}_2 \end{bmatrix}, \\ \bar{Q} &= \text{diag} \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 & \bar{Q}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_1 = I_N \otimes Q_1, \quad \bar{Q}_2 = I_N \otimes Q_2, \quad \bar{R} = I_N \otimes R, \end{aligned}$$

и  $Q_1 \succ 0$ ,  $Q_2 \succ 0$ ,  $R \succ 0$  – весовые матрицы.

Из этого вытекает, что матрицы протокола, при которых закон управления (2.6) с корректирующей поправкой (4.4) обеспечит выполнение условий (2.21)-(2.22), находятся из решения системы линейных матричных неравенств

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_\sigma & (\bar{A}_\sigma \bar{X}_\sigma + \bar{B}_\sigma \bar{Y}_\sigma \bar{\mathcal{H}})^\top & \bar{X}_\sigma & (\bar{Y}_\sigma \bar{\mathcal{H}})^\top \\ \bar{A}_\sigma \bar{X}_\sigma + \bar{B}_\sigma \bar{Y}_\sigma \bar{\mathcal{H}} & \bar{X}_\sigma & 0 & 0 \\ \bar{X}_\sigma & 0 & \bar{Q}^{-1} & 0 \\ \bar{Y}_\sigma \bar{\mathcal{H}} & 0 & 0 & \bar{R}^{-1} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad \bar{X}_\sigma \succ 0, \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{X}_\sigma &= \text{diag} \left[ \bar{X}_{1\sigma} \quad \bar{X}_{2\sigma} \right], \quad \bar{X}_{1\sigma} = I_N \otimes X_{1\sigma}, \quad \bar{X}_{2\sigma} = I_N \otimes X_{2\sigma}, \\ \bar{Y}_\sigma &= \left[ \bar{Y}_{1\sigma} \quad \bar{Y}_{2\sigma} \right], \quad \bar{Y}_{1\sigma} = I_N \otimes Y_{1\sigma}, \quad \bar{Y}_{2\sigma} = I_N \otimes Y_{2\sigma}.\end{aligned}$$

относительно  $X_{1\sigma}$ ,  $X_{2\sigma}$ ,  $Y_{1\sigma}$  и  $Y_{2\sigma}$ , и определяются выражениями

$$K_{1\sigma} = Y_{1\sigma} X_{1\sigma}^{-1}, \quad K_{2\sigma} = Y_{2\sigma} X_{2\sigma}^{-1}. \quad (4.9)$$

#### 4.2.2 Управление в момент переключения режима работы агентов

Согласно теореме 4.1,  $E[\|e(k, p)\|^2]$  монотонно не увеличивается с увеличением  $k$ , если на повторении  $k$  сигнал  $\sigma_i(k) = \sigma_i(k-1)$ , и ограничено, если на повторении  $k$  сигнал  $\sigma_i(k) \neq \sigma_i(k-1)$  для всех  $i$  и  $0 \leq p \leq T-1$ . Однако в последнем случае, т. е. в момент переключения, монотонная сходимость может нарушиться, а ошибка обучения может превысить допустимый предел, что является нежелательным эффектом.

Начнем с рассмотрения глобальных лидеров. Пусть  $k+1$  – один из моментов переключения глобального лидера  $i$ . Его управляемая динамика в этот момент описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i(k+1, p) &= (A_{\sigma_i(k+1)} - F_{i\sigma_i(k+1)}C)\tilde{x}_i(k+1, p-1) + \\ &\quad + D_{\sigma_i(k+1)}\omega_i(k+1, p-1) - F_{i\sigma_i(k+1)}G_{\sigma_i(k+1)}\nu_i(k+1, p-1), \\ \hat{x}_i(k+1, p) &= F_{i\sigma_i(k+1)}C\tilde{x}_i(k+1, p-1) + A_{\sigma_i(k+1)}\hat{x}_i(k+1, p-1) + \\ &\quad + B_{\sigma_i(k+1)}u_i(k+1, p-1) + F_{i\sigma_i(k+1)}G_{\sigma_i(k+1)}\nu_i(k+1, p-1), \\ \hat{e}_i(k+1, p) &= -C(F_{i\sigma_i(k+1)}C\tilde{x}_i(k+1, p-1) - F_{i\sigma_i(k)}C\tilde{x}_i(k, p-1)) - \\ &\quad - C(A_{\sigma_i(k+1)}\hat{x}_i(k+1, p-1) - A_{\sigma_i(k)}\hat{x}_i(k, p-1)) + \hat{e}_i(k, p) - \\ &\quad - C(B_{\sigma_i(k+1)} - B_{\sigma_i(k)})u_i(k, p-1) - CB_{\sigma_i(k+1)}\Delta u_i(k+1, p-1) - \\ &\quad - C(F_{i\sigma_i(k+1)}G_{\sigma_i(k+1)}\nu_i(k+1, p-1) - F_{i\sigma_i(k)}G_{\sigma_i(k)}\nu_i(k, p-1)) + \\ &\quad + (y_{\sigma_i(k+1)}^{ref}(p) - y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p)).\end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{x}_i(\cdot, \cdot)$  – ошибка оценивания (2.24), и поскольку в данном случае она не зависит от других переменных и недоступна для измерения по причине, указанной в предыдущем

разделе, для дальнейшего анализа будем использовать следующую систему:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_i(k+1, p) &= A_{\sigma_i(k+1)}\hat{x}_i(k+1, p-1) + B_{\sigma_i(k+1)}u_i(k+1, p-1) + \\
&\quad + F_{i\sigma_i(k+1)}G_{\sigma_i(k+1)}\nu_i(k+1, p-1), \\
\hat{e}_i(k+1, p) &= -C(A_{\sigma_i(k+1)}\hat{x}_i(k+1, p-1) - A_{\sigma_i(k)}\hat{x}_i(k, p-1)) + \hat{e}_i(k, p) - \\
&\quad - C(B_{\sigma_i(k+1)} - B_{\sigma_i(k)})u_i(k, p-1) - CB_{\sigma_i(k+1)}\Delta u_i(k+1, p-1) - \\
&\quad - C(F_{i\sigma_i(k+1)}G_{\sigma_i(k+1)}\nu_i(k+1, p-1) - F_{i\sigma_i(k)}G_{\sigma_i(k)}\nu_i(k, p-1)) + \\
&\quad + (y_{\sigma_i(k+1)}^{ref}(p) - y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p)).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

На шаге переключения, в отличие от раздела 4.2.1, во втором уравнении системы (4.10) появляется возмущающее воздействие  $(y_{\sigma_i(k+1)}^{ref}(p) - y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p))$ , порождающее переходный процесс, за счет которого ошибка обучения может существенно возрасти, поэтому на данном шаге закон управления целесообразно построить так, чтобы минимизировать влияние этого возмущения, а затем вернуться к исходному закону управления, гарантирующему сходимость. Такой закон управления можно найти из решения задачи минимизации отклонения выходного сигнала агента от доступных ему образов желаемой траектории.

Для глобального лидера эта задача сводится к задаче минимизации среднеквадратической ошибки обучения, поскольку таким агентам непосредственно доступна информация о желаемой траектории. Введем функционал

$$J_{ml} = E[\|\hat{e}_i(k+1, p)\|^2 | \hat{x}_i(k, p), u_i(k, p)],$$

отражающий приращение среднеквадратичной ошибки при смене режима работы, и решая задачу его минимизации с учетом  $\hat{e}_i(k+1, p)$  из (4.10), получим, что корректирующая поправка  $\Delta u_i(k+1, p-1)$  для закона УИО (2.6) глобальным лидером  $i$  в момент переключения режима  $k+1$  будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\Delta u_i(k+1, p-1) &= -(CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1}C(B_{\sigma_i(k+1)} - B_{\sigma_i(k)})u_i(k, p-1) - \\
&\quad - (CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1}C(A_{\sigma_i(k+1)}\hat{x}_i(k+1, p-1) - A_{\sigma_i(k)}\hat{x}_i(k, p-1)) + \\
&\quad + (CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1}(y_{\sigma_i(k+1)}^{ref}(p) - \hat{y}_i(k, p)).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Корректирующая поправка для ведомого агента находится аналогичным способом, однако поскольку такие агенты не имеют непосредственный доступ к информации

о желаемой траектории, то в качестве ее образа будет выступать взвешенная сумма выходных сигналов соответствующих локальных лидеров с предыдущего повторения. В связи с этим введем отклонение выходного сигнала ведомого агента  $i$  от выходных сигналов его локальных лидеров

$$\hat{\varepsilon}_i(k+1, p) = \sum_{j \in \mathcal{I}} s_{ij} (\hat{y}_j(k, p) - \hat{y}_i(k+1, p)),$$

где  $s_{ij}$  – элементы матрицы (2.3).

Пусть  $k+1$  – один из моментов переключения ведомого агента  $i$ . В этом случае для анализа будем использовать систему (4.10) с

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i(k+1, p) = & -l_{ij}C(A_{\sigma_i(k+1)}\hat{x}_i(k+1, p-1) - A_{\sigma_i(k)}\hat{x}_i(k, p-1)) - \\ & - l_{ii}C(B_{\sigma_i(k+1)} - B_{\sigma_i(k)})u_i(k, p-1) - l_{ii}CB_{\sigma_i(k+1)}\Delta u_i(k+1, p-1) - \\ & - l_{ii}C(F_{i\sigma_i(k+1)}G_{\sigma_i(k+1)}\nu_i(k+1, p-1) - F_{i\sigma_i(k)}G_{\sigma_i(k)}\nu_i(k, p-1)) + \\ & + \sum_{j \in \mathcal{I}} s_{ij} (\hat{y}_j(k, p) - \hat{y}_i(k, p)), \quad (4.12) \end{aligned}$$

вместо  $\hat{\varepsilon}_i(k+1, p)$ , где  $l_{ii}$  – элементы матрицы (2.4), и корректирующую поправку будем искать из решения задачи минимизации функционала

$$J_{mf} = \mathbb{E}[\|\hat{\varepsilon}_i(k+1)\|^2 | \hat{x}_i(k, p), u_i(k, p)]$$

при ограничении (4.12). В результате получим следующую корректирующую поправку для закона УИО (2.6) ведомым агентом  $i$  в момент переключения режима:

$$\begin{aligned} \Delta u_i(k+1, p-1) = & -(CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1}C(B_{\sigma_i(k+1)} - B_{\sigma_i(k)})u_i(k, p-1) - \\ & - (CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1}C(A_{\sigma_i(k+1)}\hat{x}_i(k+1, p-1) - A_{\sigma_i(k)}\hat{x}_i(k, p-1)) + \\ & + l_{ii}^{-1}(CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1} \sum_{j \in \mathcal{I}} s_{ij} (\hat{y}_j(k, p) - \hat{y}_i(k, p)). \quad (4.13) \end{aligned}$$

### 4.2.3 Общий закон управления

Поскольку локальные лидеры передают данные, полученные ими на предыдущем повторении, переключение ведомого агента должно происходить с некоторой задержкой

после переключения его локальных лидеров, чтобы информация о желаемой траектории соответствовала новому режиму. По этой причине введем следующее правило переключения режима.

По аналогии с сигналом  $\sigma_i(k)$ , который теперь будем именовать локальным сигналом, переключающим режим, введем глобальный сигнал  $\sigma(k)$ , который запускает процесс переключения режимов агентов. Моменты переключения  $\sigma_i(k)$  глобальных лидеров совпадают с моментами переключения  $\sigma(k)$ , т. е.  $\sigma_i(k) = \sigma(k) \forall i : r_i = 1$ , где  $r_i$  – элемент матрицы (2.5). Для ведомых, т. е.  $\forall i : r_i = 0$ , локальный сигнал на повторении  $k$  задается следующим образом: если  $\forall j : s_{ij} > 0$  сигнал  $\sigma_j(k-1) = \sigma(k-1)$ , то  $\sigma_i(k) = \sigma(k-1)$ , в противном случае  $\sigma_i(k) = \sigma_i(k-1)$ . Это означает, что ведомый агент переключается на новый режим с задержкой в одно повторение относительно своих локальных лидеров и только после переключения каждого из них.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 4.2.** *Если на повторении  $k+1$  сигнал  $\sigma_i(k+1) = \sigma_i(k)$ , то закон УИО, обеспечивающий достижение консенсуса в смысле условий (2.21)-(2.22), определяется в виде (2.6) с корректирующей поправкой (4.4), для которого матрицы протокола находятся из решения (4.8) и определяются выражениями (4.9). В противном случае корректирующая поправка для закона (2.6) определяется в виде (4.11)  $\forall i : r_i = 1$ , и (4.13)  $\forall i : r_i = 0$ .*

Алгоритм 4 обобщает полученные результаты с учетом введенного правила переключения режима.

### 4.3 Моделирование сетевой системы

При моделировании была рассмотрена сетевая система, состоящая из одинаковых манипуляторов с поворотным гибким звеном, динамика каждого из которых с учетом режимов работы описывается следующей моделью в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(k, t) &= A_{\sigma_i(k)}^{cont} x_i(k, t) + B^{cont} (u_i(k, t) + \mu_i(k, t)), \\ y_i(k, t) &= C x_i(k, t), \\ y_{s_i}(k, t) &= y_i(k, t) + \varsigma_i(k, t), \end{aligned} \tag{4.14}$$

---

**Алгоритм 4.** Алгоритм УИО на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова для стохастических сетевых систем с изменяемыми параметрами агентов и желаемой траекторией выходного сигнала

---

**Вход:** Матрицы  $A_{\sigma_i(k)}$ ,  $B_{\sigma_i(k)}$ ,  $D_{\sigma_i(k)}$ ,  $C$  и  $G_{\sigma_i(k)}$ , ковариационные матрицы  $S_{\omega_i}$  и  $S_{\nu_i}$ , начальные условия  $x_i(k, 0)$  и  $u_i(0, p)$ , желаемые траектории  $y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p)$ , матрицы связей  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$ , период повторения  $T$ , весовые матрицы  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $R$ , глобальный сигнал  $\sigma(k)$ .

- 1: **Для всех**  $\sigma \in \{1, 2, \dots, m\}$
  - 2:     Решить систему (4.8) относительно  $X_{1\sigma}$ ,  $X_{2\sigma}$ ,  $Y_{1\sigma}$  и  $Y_{2\sigma}$ .
  - 3:     Вычислить  $K_{1\sigma}$  и  $K_{2\sigma}$  как (4.9).
  - 4: **Конец Для**
  - 5: **Для**  $k = 0, 1, \dots$
  - 6:     **Для**  $p = 0, \dots, T - 1$
  - 7:         **Для всех**  $i \in \mathcal{I}$
  - 8:             **Если**  $r_i = 1$ , где  $r_i$  – элемент матрицы  $\mathcal{R}$
  - 9:                 Установить режим  $\sigma_i(k) = \sigma(k)$ .
  - 10:             **Иначе**
  - 11:                 **Если**  $\sigma_j(k - 1) = \sigma(k - 1) \forall j : s_{ij} > 0$ , где  $s_{ij}$  – элемент матрицы  $\mathcal{S}$
  - 12:                     Установить режим  $\sigma_i(k) = \sigma(k - 1)$ .
  - 13:             **Иначе**
  - 14:                 Установить режим  $\sigma_i(k) = \sigma_i(k - 1)$ .
  - 15:             **Конец Если**
  - 16:             **Конец Если**
  - 17:             **Если**  $k > 0$
  - 18:                 **Если**  $\sigma_i(k) = \sigma_i(k - 1)$
  - 19:                     Вычислить  $u_i(k, p)$  согласно (2.6) с учетом (4.4).
  - 20:                 **Иначе Если**  $r_i = 1$
  - 21:                     Вычислить  $u_i(k, p)$  согласно (2.6) с учетом (4.11).
  - 22:                 **Иначе**
  - 23:                     Вычислить  $u_i(k, p)$  согласно (2.6) с учетом (4.13).
  - 24:                 **Конец Если**
  - 25:             **Конец Если**
  - 26:             Получить  $y_{\nu_i}(k, p)$  из (4.1).
  - 27:             Вычислить  $\hat{x}_i(k, p + 1)$  как (4.3) и  $\hat{y}_i(k, p) = C\hat{x}_i(k, p)$ .
  - 28:             **Конец Для**
  - 29:     **Конец Для**
  - 30: **Конец Для**
- Выход:** Измеренные выходы  $y_{\nu_i}(k, p)$ .
- 

где

$$A_{\sigma_i(k)}^{cont} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_s}{J_{eq}} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & -\frac{K_s \left( J_l(\sigma_i(k)) + J_{eq} \right)}{J_{eq} J_l(\sigma_i(k))} & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{cont} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_{eq}} \\ -\frac{1}{J_{eq}} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметры манипуляторов и интенсивности шумов были установлены в значения (2.38). Динамика агентов имеет два режима, в каждом из которых определена своя желаемая траектория выходного сигнала (рисунок 14)

$$y_{\sigma_i(k)}^{ref}(t) = \begin{cases} \pi \left( \frac{t^2}{6} - \frac{t^3}{27} \right), & \sigma_i(k) = 1, \\ \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{6}, & \sigma_i(k) = 2, \end{cases} \quad (4.15)$$

где  $t \in [0, 3]$  (продолжительность повторения составляет 3 с), и момент инерции звена

$$J_l(\sigma_i(k)) = \begin{cases} 0,0038 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & \sigma_i(k) = 1, \\ 0,008 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, & \sigma_i(k) = 2. \end{cases} \quad (4.16)$$

Перейдем от модели (4.14) к эквивалентной дискретной модели вида (4.1), в которой матрицы определяются соотношениями

$$A_{\sigma_i(k)} = \exp A_{\sigma_i(k)}^{cont} T_s, \quad B_{\sigma_i(k)} = \int_0^{T_s} \exp(A_{\sigma_i(k)}^{cont} \tau) B^{cont} d\tau, \quad C = C^{cont},$$

$$D_{\sigma_i(k)} = \left[ \int_0^{T_s} \exp(A_{\sigma_i(k)}^{cont} \tau) B^{cont} Q_n (B^{cont})^\top \left( \exp(A_{\sigma_i(k)}^{cont} \tau) \right)^\top d\tau \right]^{\frac{1}{2}}, \quad G_{\sigma_i(k)} = \left( \frac{R_n}{T_s} \right)^{\frac{1}{2}},$$

и шумы  $\omega_i(k, p)$  и  $\nu_i(k, p)$  имеют единичные ковариации  $S_{\omega_i} = I_{n_x}$  и  $S_{\nu_i} = 1$  соответственно. Здесь  $T_s$  – период дискретизации, который выбран равным 0,01 с.

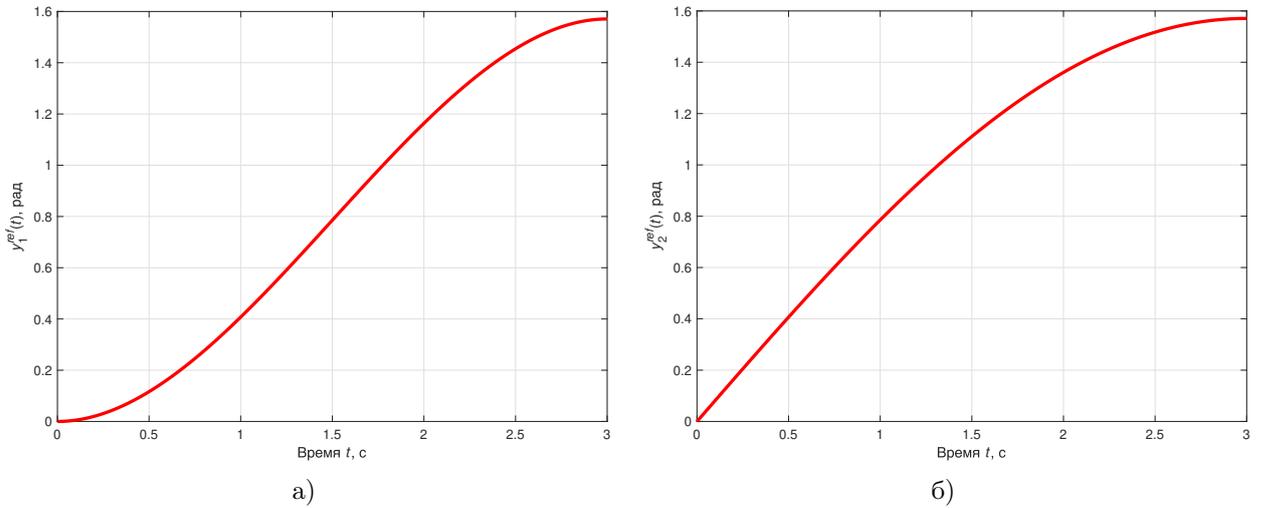


Рис. 14 – Желаемая траектория выходного сигнала: а) при первом режиме работы; б) при втором режиме работы

Сетевая система состоит из трех манипуляторов, среди которых выделен один глобальный лидер, который передает свои выходные данные первому ведомому агенту, а второй ведомый агент получает данные первого. Данная топология определяется матрицами (2.40).

Для фильтра Калмана были получены следующие матрицы усиления:

$$F_{i\sigma_i(k)} = \begin{bmatrix} 0,0269 & -0,0005 & 0,0318 & 0,0045 \end{bmatrix} \text{ при } \sigma_i(k) = 1,$$

$$F_{i\sigma_i(k)} = \begin{bmatrix} 0,0218 & -0,0007 & 0,0189 & 0,0045 \end{bmatrix} \text{ при } \sigma_i(k) = 2.$$

Решая задачу оптимизации, аналогичную ранее рассмотренным при моделировании алгоритмов, при ограничениях (4.8) с весовыми матрицами  $Q_1 = 10^{-5} \cdot I_{n_x}$ ,  $Q_2 = 10^5$  и  $R = 10^{-4}$  для всех  $\sigma_i(k)$ , были получены следующие матрицы протокола для (4.4):

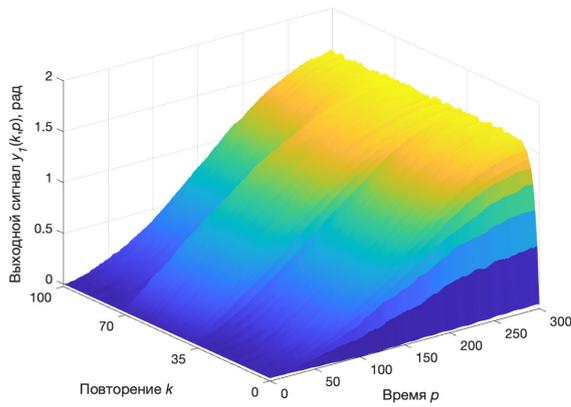
$$K_{1\sigma_i(k)} = \begin{bmatrix} -42,0831 & -1,2962 & -0,4169 & -0,0043 \end{bmatrix}, K_{2\sigma_i(k)} = 15,1047 \text{ при } \sigma_i(k) = 1,$$

$$K_{1\sigma_i(k)} = \begin{bmatrix} -42,0831 & -1,2982 & -0,4169 & -0,0044 \end{bmatrix}, K_{2\sigma_i(k)} = 16,8884 \text{ при } \sigma_i(k) = 2.$$

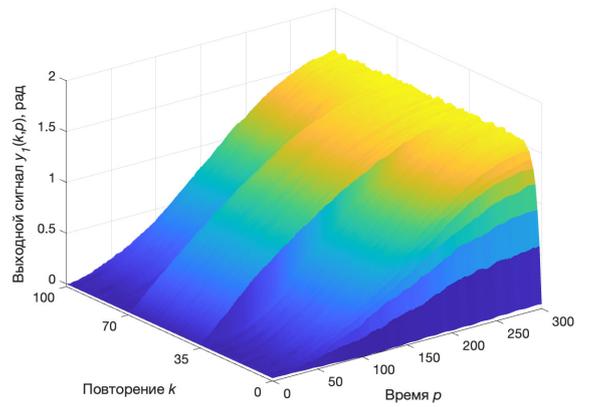
На рисунках 15-17 представлены графики выходных сигналов, ошибок обучения и управляющих сигналов агентов для двух случаев – когда управление происходит согласно закону (2.6) с корректирующей поправкой (4.4) на всем протяжении работы системы, и когда учитываются поправки (4.11) и (4.13) в моменты смены режима соответствующих агентов. Глобальный переключающий сигнал был задан в виде

$$\sigma(k) = \begin{cases} 1, & k < 35, \\ 2, & 35 \leq k < 70, \\ 1, & k \geq 70. \end{cases}$$

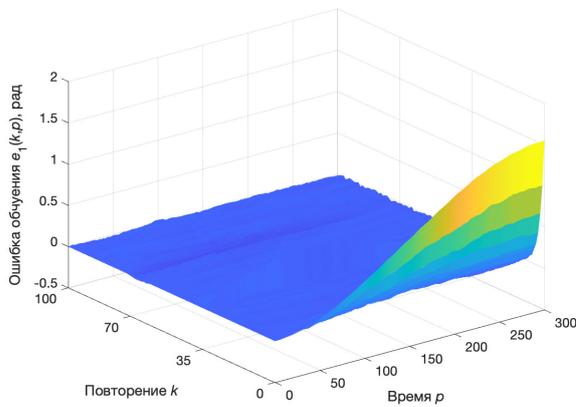
Согласно принятому правилу переключения, режим глобального лидера переключался на повторениях 35 и 70, т. е. в моменты запуска процесса переключения. Первый ведомый агент осуществлял переключения с запаздыванием относительно глобального лидера, передающего ему информацию, а именно на повторениях 36 и 71. Режим второго ведомого был переключен после переключения первого ведомого – на повторениях 37 и 72. На данных графиках видно, что предложенный подход значительно сокращает длительность переходного процесса, и агенты начинают работу в новом режиме с минимальной ошибкой.



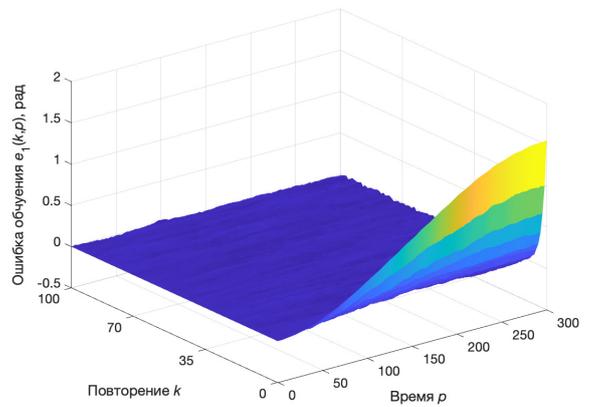
а)



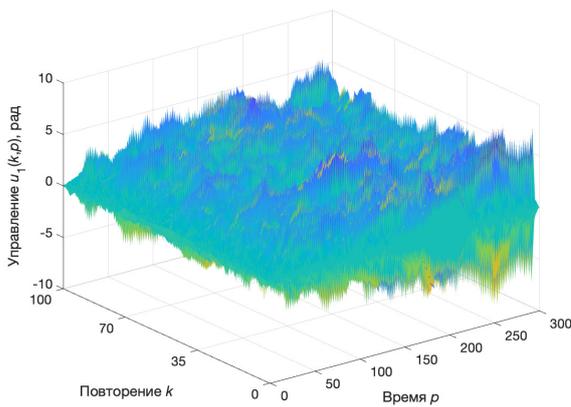
б)



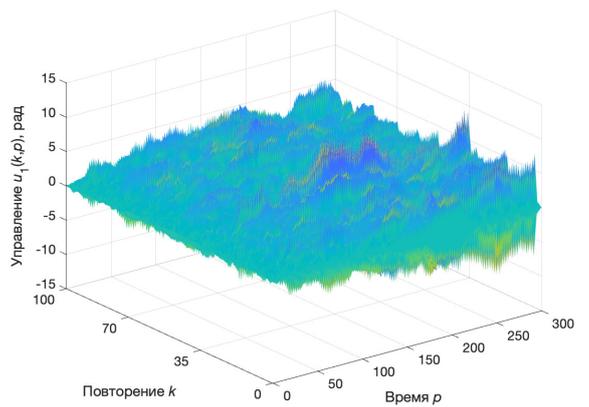
в)



г)

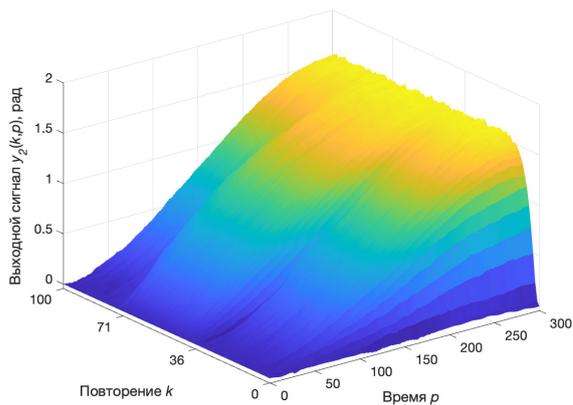


д)

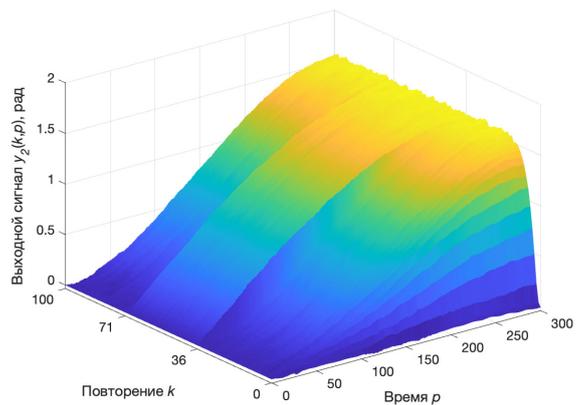


е)

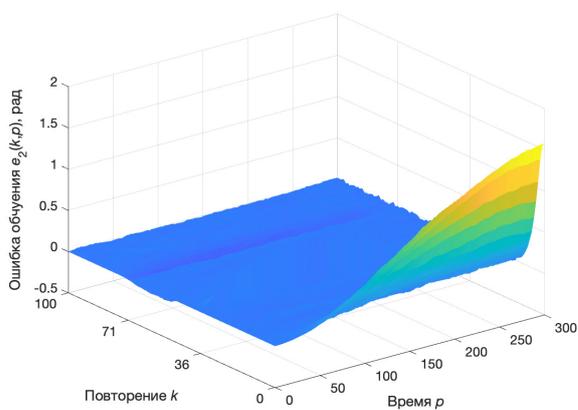
Рис. 15 – Сигналы глобального лидера: а) выходной сигнал без переключения закона; б) выходной сигнал с переключением закона; в) ошибка обучения без переключения закона; г) ошибка обучения с переключением закона; д) управление без переключения закона; е) управление с переключением закона



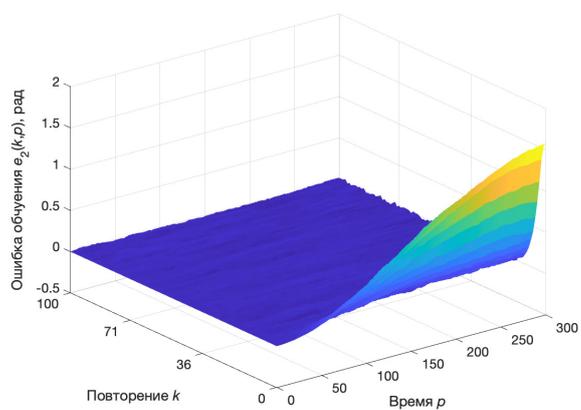
а)



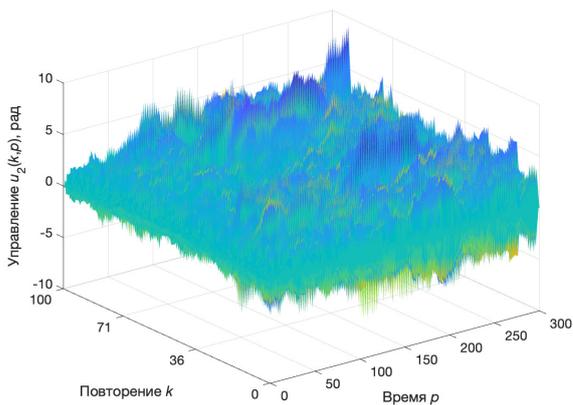
б)



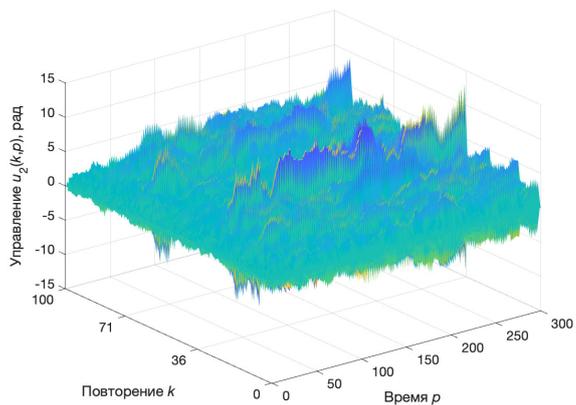
в)



г)

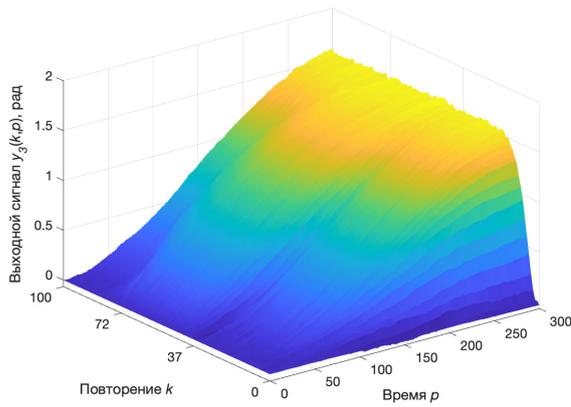


д)

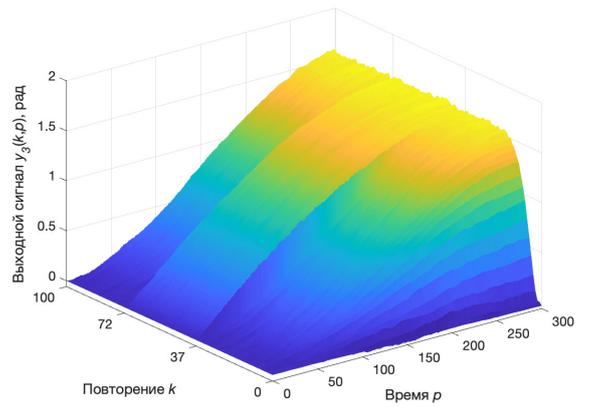


е)

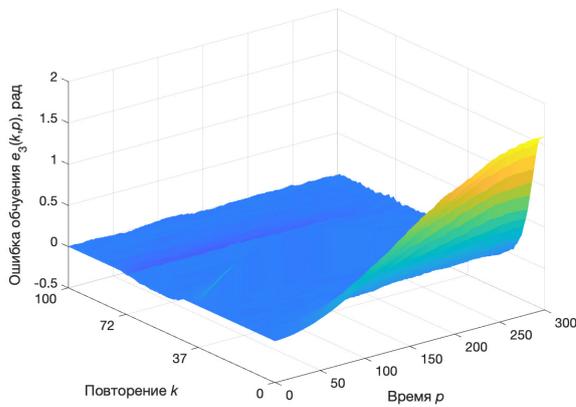
Рис. 16 – Сигналы 1-го ведомого агента: а) выходной сигнал без переключения закона; б) выходной сигнал с переключением закона; в) ошибка обучения без переключения закона; г) ошибка обучения с переключением закона; д) управление без переключения закона; е) управление с переключением закона



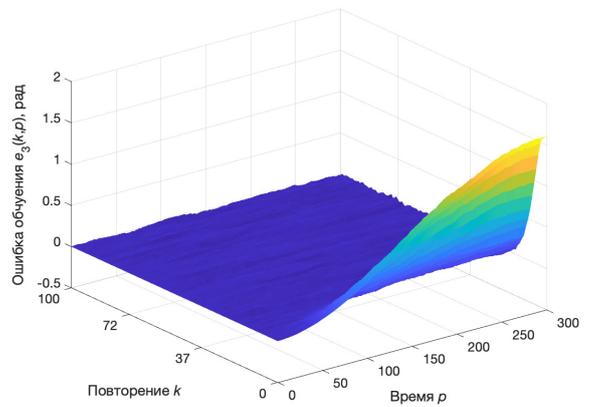
а)



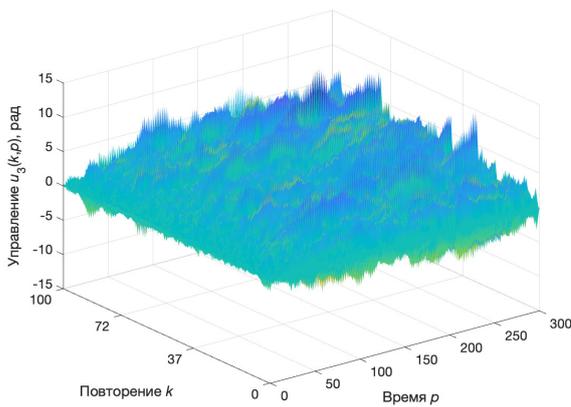
б)



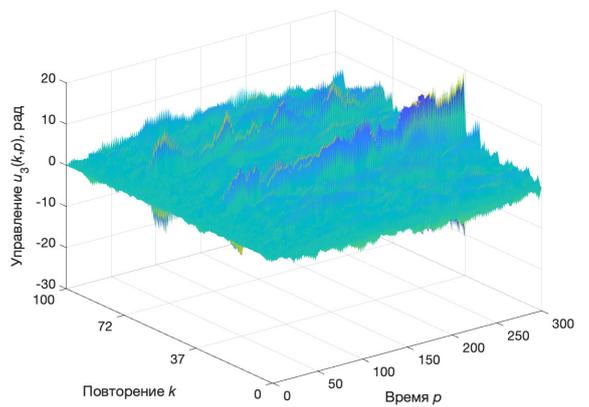
в)



г)



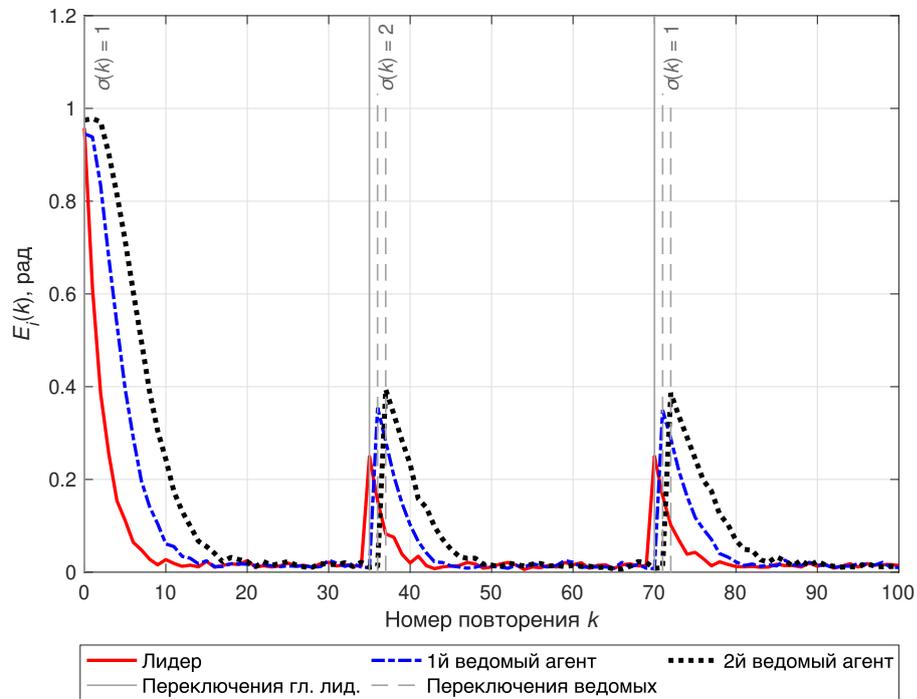
д)



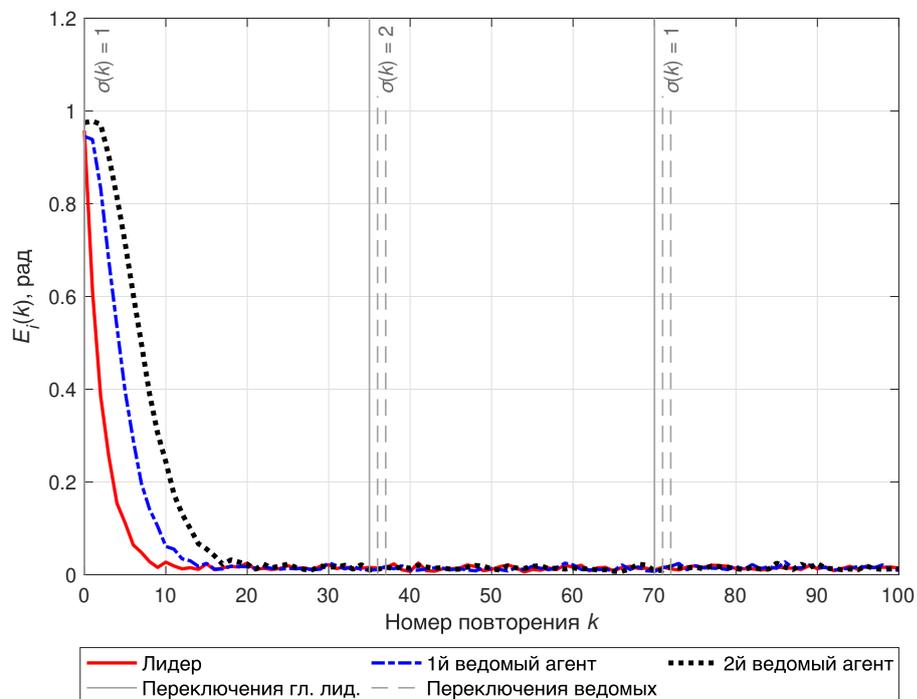
е)

Рис. 17 – Сигналы 2-го ведомого агента: а) выходной сигнал без переключения закона; б) выходной сигнал с переключением закона; в) ошибка обучения без переключения закона; г) ошибка обучения с переключением закона; д) управление без переключения закона; е) управление с переключением закона

На рисунке 18 представлены графики выборочных среднеквадратических ошибок обучения агентов (2.41) для описанных выше сценариев управления. Полученные результаты показывают, что разработанный закон УИО устраняет эффект от переключения желаемой траектории и параметров агентов, снижая величину переходной ошибки.



а)



б)

Рис. 18 – Выборочные среднеквадратические ошибки обучения агентов: а) без переключения закона управления; б) при переключении закона управления

#### 4.4 Выводы по главе 4

В данной главе получено решение задачи УИО стохастической сетевой системой при изменении режима работы агентов, определяющего их параметры и желаемую траекторию выходного сигнала. В основу был положен подход, представленный в работе [4] для простых стохастических систем. В результате в данной главе с использованием дивергентного метода векторных функций Ляпунова и путем решения задачи минимизации среднеквадратических отклонений выходных сигналов было определено специальное правило переключения режима и закона УИО, позволяющее в значительной степени компенсировать переходные ошибки, возникаемые в моменты смены режима.

Эффективность такого алгоритма УИО подтверждена моделированием группы манипуляторов с поворотным гибким звеном. При этом отметим, что рассмотренный подход накладывает некоторые ограничения на топологию сети. Во-первых, при взаимном обмене информацией между агентами произвести переключение режима невозможно. Поскольку для переключения режима работы ведомого агента необходимо, чтобы режим работы его локальных лидеров на предыдущем повторении соответствовал тому, на который происходит переключение, то при взаимном обмене агенты будут ожидать смены режима друг друга, и в итоге оно не произойдет ни для одного из них. В рассмотренном примере такая ситуация возникла бы, если первый ведомый агент передавал свой выходной сигнал второму, а второй – первому. В этом случае первый ведомый агент не смог бы произвести переключения из-за ожидания переключения второго, а второй из-за ожидания первого. Также по этой причине невозможно реализовать замкнутую цепь информационного обмена. Во-вторых, переключения локальных лидеров каждого ведомого агента должны происходить одновременно, иначе ведомый может получить информацию о разных желаемых траекториях, что приведет к дополнительной ошибке. В-третьих, при последовательном соединении длительность процесса переключения режима зависит от количества агентов в сети, в связи с чем в некоторых случаях он может занять недопустимо длительное время.

## 5 Управление с итеративным обучением стохастическими сетевыми системами при изменении желаемой траектории выходного сигнала и топологии сети

В данной главе представлено развитие метода синтеза УИО, описанного в главе 4, на стохастические сетевые системы, в которых помимо переключения режима работы агентов предусмотрено переключение топологии сети. Рассматривается частный случай стохастической сетевой системы, в которой выходной сигнал и входные воздействия представлены скалярными переменными. В основу решения лег дивергентный метод векторных функций Ляпунова, который получил развитие на данный класс систем. Законы УИО, компенсирующие переходные ошибки в моменты переключения режима и топологии, находятся из решения задачи минимизации среднеквадратического отклонения выходного сигнала. Проверка алгоритма осуществлялась путем моделирования сетевой системы, состоящей из манипуляторов с поворотным гибким звеном.

### 5.1 Описание сетевой системы и постановка задачи

Рассмотрим сетевую систему из  $N$  агентов, повторяющих одинаково заданную для всех операцию с периодом  $T < \infty$ , параметры которой могут быть изменены в процессе функционирования системы. Агенты связаны информационной сетью с переменной топологией, что подразумевает возможность отключать часть агентов и подключать их снова по мере необходимости, а также менять характер обмена информацией между ними. Динамика каждого агента описывается следующей дискретной моделью в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} x_i(k, p + 1) &= A_{\sigma_i(k)}x_i(k, p) + B_{\sigma_i(k)}u_i(k, p) + D_{\sigma_i(k)}\omega_i(k, p), \\ y_i(k, p) &= Cx_i(k, p), \\ y_{\nu_i}(k, p) &= y_i(k, p) + G_{\sigma_i(k)}\nu_i(k, p), \quad i \in \mathcal{I}, k \geq 0, 0 \leq p \leq T - 1, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где  $x_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_x}$  – вектор состояния,  $u_i(k, p) \in \mathbb{R}^1$  – скалярная переменная управления,  $\omega_i(k, p) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$  – вектор шумов объекта,  $y_i(k, p) \in \mathbb{R}^1$  – скалярная выходная переменная (профиль повторения), недоступная наблюдению,  $y_{\nu_i}(k, p) \in \mathbb{R}^1$  – наблюдаемая (из-

меряемая) выходная переменная,  $\nu_i(k, p) \in \mathbb{R}^1$  – шум измерений. Граничные условия  $x_i(k, 0)$  и  $u_i(0, p)$  известны и одинаковы для всех агентов, и модель шумов аналогична той, что была принята в разделе 3.1.

Параметры выполняемой агентом операции устанавливаются одним из  $m$  заранее определенных режимов работы, который переключается сигналом  $\sigma_i(k)$ . Режим работы и сигнал, переключающий его, определяются в том же виде, что и в разделе 4.1. Переключение топологии сети инициируется сигналом  $\rho(k)$ , описанным в разделе 3.1, и каждая из  $c$  доступных топологий определяется множеством функционирующих агентов (3.3), графом (3.4), устанавливающим связи между ними, с матрицами (3.5) и (3.6), и матрицей (3.7), определяющей доступ к желаемой траектории выходного сигнала  $y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p)$ . При этом будем предполагать, что общее число переключений режима агентов и топологии сети  $\mathbf{N}_{\sigma\rho}$  конечно. Такой сценарий возникает, например, когда агенты представляют собой портальные роботы, функционирующие по некоторой программе в интеллектуальном производстве.

Уточним определения типов агентов с учетом изменяемой топологии сети. На повторении  $k$  агента  $i \in \mathcal{I}_{\rho(k)}$ , для которого  $r_i = 1$ , будем именовать глобальным лидером, в противном случае – ведомым агентом, где  $r_i$  – диагональный элемент матрицы  $\mathcal{R}_{\rho(k)}$ . Последний получает информацию от любых других агентов, т. е. для ведомого агента  $i$  на повторении  $k$  существует хотя бы один агент  $j \in \mathcal{I}_{\rho(k)}$  такой, что  $s_{ij} > 0$ , где  $s_{ij}$  – элемент матрицы  $\mathcal{S}_{\rho(k)}$ . Агента  $j$  в этом случае будем называть локальным лидером агента  $i$ , и предполагается, что он не может получать информацию от своих ведомых агентов, т. е.  $s_{ji} = 0$ .

Будем рассматривать ошибку обучения в виде (4.2), где для определения оценки состояния и выходного сигнала будем использовать фильтр Калмана (4.3). Задача заключается в нахождении такого протокола  $u_i(k, p)$ , который позволит достичь консенсуса в смысле (2.21)-(2.22).

## 5.2 Построение 2D-модели в приращениях переменных

Вначале рассмотрим случай, когда режим работы агентов и топология сети не меняются, т. е. рассмотрим интервал вдоль повторений, на котором сигналы  $\sigma_i(k)$  и  $\rho(k)$  не имеют точек разрыва и их значения равны для всех  $i$  и  $k$ . Далее при решении задачи в подобных случаях будем использовать обозначения  $\sigma = \sigma_i(k+1) = \sigma_i(k)$  и  $\rho = \rho(k+1) = \rho(k)$ . Для закона УИО (2.6) корректирующую поправку будем форми-

ровать в виде

$$\begin{aligned} \Delta u_i(k+1, p-1) = & K_{1\sigma\rho}(\hat{x}_i(k+1, p-1) - \hat{x}_i(k, p-1)) + \\ & + K_{2\sigma\rho} \left( r_i(y_\sigma^{ref}(p) - \hat{y}_i(k, p)) + \sum_{j \in \mathcal{I}_\rho} s_{ij}(\hat{y}_j(k, p) - \hat{y}_i(k, p)) \right), \quad i \in \mathcal{I}_\rho, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $K_{1\sigma\rho}$  и  $K_{2\sigma\rho}$  – матрицы протокола в режиме  $\sigma$  и топологии  $\rho$ .

Выполняя шаги, описанные в разделе 4.2.1, для дальнейшего синтеза управления будем использовать систему

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(k+1, p+1) = & (\bar{A}_{11\sigma\rho} + \bar{B}_{1\sigma\rho} \bar{K}_{1\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_{1\rho}) \hat{\eta}(k+1, p) + \\ & + (\bar{A}_{12\sigma\rho} + \bar{B}_{1\sigma\rho} \bar{K}_{2\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_{2\rho}) \hat{e}(k, p) + \bar{D}_{1\sigma\rho} \Delta\nu(k+1, p-1), \\ \hat{e}(k+1, p) = & (\bar{A}_{21\sigma\rho} + \bar{B}_{2\sigma\rho} \bar{K}_{1\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_{1\rho}) \hat{\eta}(k+1, p) + \\ & + (\bar{A}_{22\sigma\rho} + \bar{B}_{2\sigma\rho} \bar{K}_{2\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_{2\rho}) \hat{e}(k, p) + \bar{D}_{2\sigma\rho} \Delta\nu(k+1, p-1), \end{aligned} \quad (5.3)$$

записанную относительно векторов

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(k, p) = & \left[ \hat{\eta}_{i_1}^\top(k, p) \quad \dots \quad \hat{\eta}_{i_{N_\rho}}^\top(k, p) \right]^\top, \quad \hat{e}(k, p) = \left[ \hat{e}_{i_1}(k, p) \quad \dots \quad \hat{e}_{i_{N_\rho}}(k, p) \right]^\top, \\ \Delta\nu(k, p) = & \left[ \Delta\nu_{i_1}(k, p) \quad \dots \quad \Delta\nu_{i_{N_\rho}}(k, p) \right]^\top, \end{aligned}$$

которые представляют собой расширенные версии векторов (2.25), (4.2) и (2.29) соответственно. Матрицы данной системы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11\sigma\rho} = & I_{N_\rho} \otimes A_\sigma, \quad \bar{A}_{12\sigma\rho} = 0, \quad \bar{A}_{21\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes (-CA_\sigma), \quad \bar{A}_{22\sigma\rho} = I_{N_\rho}, \quad \bar{B}_{1\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes B_\sigma, \\ \bar{B}_{2\sigma\rho} = & I_{N_\rho} \otimes (-CB_\sigma), \quad \bar{K}_{1\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes K_{1\sigma\rho}, \quad \bar{K}_{2\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes K_{2\sigma\rho}, \quad \bar{\mathcal{H}}_{1\rho} = I_{N_\rho n_x}, \\ \bar{\mathcal{H}}_{2\rho} = & \mathcal{L}_\rho + \mathcal{R}_\rho, \quad \bar{D}_{1\sigma\rho} = \text{diag}[F_{i_n\sigma} G_\sigma]_{n=1}^{N_\rho}, \quad \bar{D}_{2\sigma\rho} = \text{diag}[-CF_{i_n\sigma} G_\sigma]_{n=1}^{N_\rho}. \end{aligned}$$

Система (5.3) записана в стандартной форме повторяющегося процесса и дальнейший вывод условий сходимости будет основан на теории устойчивости стохастических повторяющихся процессов с переключениями [61]. Как и в главе 4, при решении задачи синтеза отдельно будем рассматривать случаи, когда на повторении  $k+1$  происходит переключение режима работы или топологии информационной сети. В этих случаях будем искать законы управления из решения задачи минимизации среднеквадратичных отклонений выходного сигнала от образа желаемой траектории. Такие законы будем применять только на повторениях, на которых происходят переключения, чтобы ком-

пенсировать их влияние на ошибку, после чего будет осуществляться переход на закон, гарантирующий сходимость.

### 5.3 Теорема о сходимости

Для нахождения условий сходимости воспользуемся результатами [61]. В отличие от указанного исследования, в рассматриваемой задаче число переключений конечно и нет необходимости оценивать среднее время ожидания.

Определим на траекториях системы (5.3) векторную функцию Ляпунова

$$V_{\sigma\rho}(\xi, \epsilon) = \begin{bmatrix} V_{1\sigma\rho}(\xi) \\ V_{2\sigma\rho}(\epsilon) \end{bmatrix}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{n_x}, \epsilon \in \mathbb{R}^1, \quad (5.4)$$

где  $V_{1\sigma\rho}(\xi) > 0$ ,  $\xi \neq 0$ ,  $V_{2\sigma\rho}(\epsilon) > 0$ ,  $\epsilon \neq 0$  и  $V_{1\sigma\rho}(0) = 0$ ,  $V_{2\sigma\rho}(0) = 0$ , и дискретный аналог ее дивергенции

$$\begin{aligned} \mathcal{D}V_{\sigma\rho}(\xi, \epsilon) = & \mathbb{E} \left[ V_{1\sigma\rho}(\hat{\eta}(k+1, p+1)) | \hat{\eta}(k+1, p) = \xi, \hat{\epsilon}(k, p) = \epsilon \right] - \\ & - V_{1\sigma\rho}(\xi) + \mathbb{E} \left[ V_{2\sigma\rho}(\hat{\epsilon}(k+1, p)) | \hat{\eta}(k+1, p) = \xi, \hat{\epsilon}(k, p) = \epsilon \right] - V_{2\sigma\rho}(\epsilon). \end{aligned}$$

**Теорема 5.1.** Пусть существует векторная функция Ляпунова (5.4) и положительные скаляры  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  и  $\gamma$  такие, что на траекториях системы (5.3) для всех пар  $\sigma$  и  $\rho$  выполняются неравенства

$$\begin{aligned} c_1 \|\xi\|^2 &\leq V_{1\sigma\rho}(\xi) \leq c_2 \|\xi\|^2, \\ c_1 |\epsilon|^2 &\leq V_{2\sigma\rho}(\epsilon) \leq c_2 |\epsilon|^2, \\ \mathcal{D}V_{\sigma\rho}(\xi, \epsilon) &\leq \gamma - c_3 (\|\xi\|^2 + |\epsilon|^2). \end{aligned}$$

Тогда закон управления (2.6) с корректирующей поправкой (5.2) обеспечивает выполнение условия сходимости ошибки (2.21).

*Доказательство.* Вычисляя  $\mathcal{D}V_{\sigma\rho}(\xi, \epsilon)$  в силу системы (5.3) и следуя доказательству теоремы 1 из [61] получим, что для всех  $k$  и  $p$  справедлива оценка

$$\mathbb{E}[|\hat{\epsilon}(k, p-1)|^2] \leq \alpha^{\mathbf{N}_{\sigma\rho}+1} \left[ \lambda^k \sum_{q=0}^{p-1} \lambda^{p-1-q} |\hat{\epsilon}(0, q)|^2 \right] + \frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (5.5)$$

где  $\alpha = c_2/c_1 \geq 1$ , откуда следует справедливость (2.21) при  $\varrho = \lambda$ ,  $\kappa = \frac{\alpha^{N_{\sigma\rho}+1}|\bar{e}|^2}{1-\lambda}$ ,  $|\bar{e}|^2 = \max_q |e(0, q)|^2$ ,  $\beta = \frac{\gamma}{c_1(1-\lambda)^2}$ . Параметр  $\lambda$ , а следовательно и  $\varrho$ , зависит от  $c_2$  и  $c_3$  и определяет скорость сходимости ошибки обучения, в то время как  $\alpha$  зависит от  $c_1$  и  $c_2$  и определяет начальное значение оценки.  $\square$

Заметим, что с учетом (5.5) из (4.2) для любого  $\sigma$  следует

$$\mathbb{E}[|C\hat{x}_i(k, p)|^2] = \mathbb{E}[|\hat{y}_i(k, p)|^2] \leq 2|y_{\sigma}^{ref}(p)|^2 + 2\mathbb{E}[|\hat{e}_i(k, p)|^2] < \infty. \quad (5.6)$$

Эта оценка будет использована в дальнейшем для доказательства условия (2.22).

## 5.4 Синтез управления

### 5.4.1 Управление при фиксированном режиме агентов и фиксированной топологии сети

Выбрав компоненты векторной функции Ляпунова в виде квадратичных форм

$$V_{1\sigma\rho}(\xi) = \xi^\top \bar{P}_{1\sigma\rho} \xi, \quad V_{2\sigma\rho}(\epsilon) = \epsilon^\top \bar{P}_{2\sigma\rho} \epsilon,$$

где  $\bar{P}_{1\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes P_{1\sigma\rho}$ ,  $\bar{P}_{2\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes P_{2\sigma\rho}$ , и проделав шаги, аналогичные описанным в разделе 3.3, было получено, что условия теоремы 5.1 будут выполнены, если неравенство

$$(\bar{A}_{\sigma\rho} + \bar{B}_{\sigma\rho} \bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \bar{P}_{\sigma\rho} (\bar{A}_{\sigma\rho} + \bar{B}_{\sigma\rho} \bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho) - \bar{P}_{\sigma\rho} + \bar{Q}_\rho + (\bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \bar{R}_\rho \bar{K}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho \preceq 0 \quad (5.7)$$

с матрицами

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\sigma\rho} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11\sigma\rho} & \bar{A}_{12\sigma\rho} \\ \bar{A}_{21\sigma\rho} & \bar{A}_{22\sigma\rho} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{\sigma\rho} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{1\sigma\rho} \\ \bar{B}_{2\sigma\rho} \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_{\sigma\rho} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{1\sigma\rho} & \bar{K}_{2\sigma\rho} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{H}}_\rho = \text{diag} \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{H}}_{1\rho} & \bar{\mathcal{H}}_{2\rho} \end{bmatrix}, \\ \bar{P}_{\sigma\rho} &= \text{diag} \begin{bmatrix} \bar{P}_{1\sigma\rho} & \bar{P}_{2\sigma\rho} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_\rho = \text{diag} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{1\rho} & \bar{Q}_{2\rho} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_{1\rho} = I_{N_\rho} \otimes Q_{1\rho}, \\ \bar{Q}_{2\rho} &= I_{N_\rho} \otimes Q_{2\rho}, \quad \bar{R}_\rho = I_{N_\rho} \otimes R_\rho \end{aligned}$$

разрешимо относительно положительно определенной матрицы  $\bar{P}_{\sigma\rho}$ . Здесь  $Q_{1\rho} \succ 0$ ,  $Q_{2\rho} \succ 0$ ,  $R_\rho \succ 0$  – весовые матрицы.

Относительно переменных

$$\begin{aligned}\bar{X}_{\sigma\rho} &= \text{diag} \left[ \bar{X}_{1\sigma\rho} \quad \bar{X}_{2\sigma\rho} \right] = \bar{P}_{\sigma\rho}^{-1}, \quad \bar{X}_{1\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes X_{1\sigma\rho}, \quad \bar{X}_{2\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes X_{2\sigma\rho}, \\ \bar{Y}_{\sigma\rho} &= \left[ \bar{Y}_{1\sigma\rho} \quad \bar{Y}_{2\sigma\rho} \right] = \bar{K}_{\sigma\rho} \bar{X}_{\sigma\rho}, \quad \bar{Y}_{1\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes Y_{1\sigma\rho}, \quad \bar{Y}_{2\sigma\rho} = I_{N_\rho} \otimes Y_{2\sigma\rho}\end{aligned}$$

нелинейное матричное неравенство (5.7) запишется в виде линейных матричных неравенств следующим образом:

$$\left[ \begin{array}{cccc} \bar{X}_{\sigma\rho} & (\bar{A}_{\sigma\rho} \bar{X}_{\sigma\rho} + \bar{B}_{\sigma\rho} \bar{Y}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top & \bar{X}_{\sigma\rho} & (\bar{Y}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \\ \bar{A}_{\sigma\rho} \bar{X}_{\sigma\rho} + \bar{B}_{\sigma\rho} \bar{Y}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho & \bar{X}_{\sigma\rho} & 0 & 0 \\ \bar{X}_{\sigma\rho} & 0 & \bar{Q}_\rho^{-1} & 0 \\ \bar{Y}_{\sigma\rho} \bar{\mathcal{H}}_\rho & 0 & 0 & \bar{R}_\rho^{-1} \end{array} \right] \succcurlyeq 0, \quad \bar{X}_{\sigma\rho} \succ 0. \quad (5.8)$$

Таким образом в рассмотренном случае закон УИО (2.6) с корректирующей поправкой (5.2) и матрицами протокола

$$K_{1\sigma\rho} = Y_{1\sigma\rho} X_{1\sigma\rho}^{-1}, \quad K_{2\sigma\rho} = Y_{2\sigma\rho} X_{2\sigma\rho}^{-1}, \quad (5.9)$$

где  $X_{1\sigma\rho}$ ,  $X_{2\sigma\rho}$ ,  $Y_{1\sigma\rho}$  и  $Y_{2\sigma\rho}$  находятся из решения системы (5.8), обеспечивает выполнение условия (2.21).

#### 5.4.2 Управление в момент переключения режима работы агентов

Как уже отмечалось, переключение режима приводит к появлению возмущающего воздействия, которое порождает переходный процесс. Этот процесс увеличивает достигнутое значение ошибки обучения на некоторое число шагов и замедляет сходимость. Поэтому на шаге переключения корректирующую поправку будем искать из условия минимизации ошибки.

В данном случае задача поиска корректирующей поправки управления глобальным лидером, компенсирующей его переходную ошибку, полностью повторяет аналогичную задачу, рассмотренную в разделе 4.2.2, и было получено, что если на повторении  $k+1$  сигнал глобального лидера  $\sigma_i(k+1) \neq \sigma_i(k)$ , то управление им будет происходить согласно закону (2.6) с корректирующей поправкой (4.11).

Такая же ситуация с ведомым агентом, за исключением того, что в этом случае необходимо учитывать топологию, установленную на момент переключения режима

$k + 1$ . При этом предполагалось, что на рассматриваемых повторениях топология неизменна, и принято обозначение  $\rho = \rho(k + 1) = \rho(k)$ . Уточнив выражение для отклонения оценки выходного сигнала ведомого от оценок выходных сигналов его локальных лидеров

$$\hat{\varepsilon}_i(k + 1, p) = \sum_{j \in \mathcal{I}_\rho} s_{ij} (\hat{y}_j(k, p) - \hat{y}_i(k + 1, p)),$$

и решая задачу минимизации функционала

$$J_{mf} = \mathbb{E}[|\hat{\varepsilon}_i(k + 1, p)|^2 | \hat{x}_i(k, p), u_i(k, p)]$$

при ограничении

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i(k + 1, p) = & -l_{ii}C(A_{\sigma_i(k+1)}\hat{x}_i(k + 1, p - 1) - A_{\sigma_i(k)}\hat{x}_i(k, p - 1)) - \\ & - l_{ii}C(B_{\sigma_i(k+1)} - B_{\sigma_i(k)})u_i(k, p - 1) - l_{ii}CB_{\sigma_i(k+1)}\Delta u_i(k + 1, p - 1) - \\ & - l_{ii}C(F_{i\sigma_i(k+1)}G_{\sigma_i(k+1)}\nu_i(k + 1, p - 1) - F_{i\sigma_i(k)}G_{\sigma_i(k)}\nu_i(k, p - 1)) + \\ & + \sum_{j \in \mathcal{I}_\rho} s_{ij} (\hat{y}_j(k, p) - \hat{y}_i(k, p)), \end{aligned}$$

для ведомого агента была получена следующая корректирующая поправка:

$$\begin{aligned} \Delta u_i(k + 1, p - 1) = & -(CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1}C(B_{\sigma_i(k+1)} - B_{\sigma_i(k)})u_i(k, p - 1) - \\ & - (CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1}C(A_{\sigma_i(k+1)}\hat{x}_i(k + 1, p - 1) - A_{\sigma_i(k)}\hat{x}_i(k, p - 1)) + \\ & + l_{ii}^{-1}(CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1} \sum_{j \in \mathcal{I}_\rho} s_{ij} (\hat{y}_j(k, p) - \hat{y}_i(k, p)). \quad (5.10) \end{aligned}$$

Таким образом, в момент переключения режима будем применять закон УИО (2.6) с корректирующими поправками (4.11) и (5.10) для глобальных лидеров и ведомых агентов соответственно. При переключении режима будем учитывать правило, изложенное в разделе 4.2.3, уточнив, что  $r_i$  и  $s_{ij}$  являются элементами матриц (3.7) и (3.5) соответственно при топологии  $\rho$ .

### 5.4.3 Управление в момент переключения топологии сети

Рассмотрим последний случай, когда происходит переключение топологии сети. При этом все агенты работают в одном и том же режиме на всех рассматриваемых повторениях, поэтому для краткости сигналы, переключающие режимы, обозначим через  $\sigma$ .

В момент переключения топологии агент может выполнить одно из следующих действий: подключение к сети, отключение от сети и смена локальных лидеров. Во втором и третьем случаях управление всеми агентами производится согласно закону УИО (2.6) с корректирующей поправкой (5.2) с матрицами протокола, соответствующими новой топологии. В первом случае ошибка подключаемого агента при использовании этого закона может существенно отличаться от достигнутой другими агентами в течение нескольких повторений после подключения. Для предотвращения этого эффекта применим тот же подход, что и в предыдущем разделе.

Пусть  $k + 1$  – момент переключения топологии с подключением агента  $i$ . Введем функционал

$$J_c = E[|\hat{\varepsilon}_i(k + 1, p)|^2 | \hat{x}_i(k, p)]$$

и будем искать управление для подключаемого агента из условия его минимума при ограничении

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i(k + 1, p) = & \sum_{j \in \mathcal{I}_{\rho(k+1)}} s_{ij} \hat{y}_j(k, p) - l_{ii} C A_{\sigma_i(k+1)} \hat{x}_i(k + 1, p - 1) - \\ & - l_{ii} C B_{\sigma_i(k+1)} u_i(k + 1, p - 1) - l_{ii} C F_{i\sigma_i(k+1)} G_{\sigma_i(k+1)} \nu_i(k + 1, p - 1), \end{aligned}$$

где  $s_{ij}$  и  $l_{ii}$  – элементы матриц  $\mathcal{S}_{\rho(k+1)}$  и  $\mathcal{L}_{\rho(k+1)}$  соответственно. Полученный таким образом закон управления для подключаемой системы имеет вид

$$\begin{aligned} u_i(k + 1, p - 1) = & -(C B_{\sigma_i(k+1)})^{-1} C A_{\sigma_i(k+1)} \hat{x}_i(k + 1, p - 1) + \\ & + l_{ii}^{-1} (C B_{\sigma_i(k+1)})^{-1} \sum_{j \in \mathcal{I}_{\rho(k+1)}} s_{ij} \hat{y}_j(k, p). \quad (5.11) \end{aligned}$$

#### 5.4.4 Общий закон управления

Объединим полученные результаты в виде следующих правил переключения режима работы агентов, топологии информационной сети и закона управления.

Изменения режима и топологии инициируются сигналами  $\sigma(k)$  и  $\rho(k)$  соответственно. Глобальный сигнал  $\sigma(k)$  запускает процесс переключения режимов агентов. Смена режима глобальных лидеров происходит в момент запуска процесса переключения, т. е.  $\sigma_i(k) = \sigma(k) \forall i : r_i = 1$ . Для ведомых, т. е.  $\forall i : r_i = 0$ , вводится следующее

правило:  $\sigma_i(k) = \sigma(k-1)$ , если  $\sigma_j(k-1) = \sigma(k-1) \forall j : s_{ij} > 0$ , и  $\sigma_i(k) = \sigma_i(k-1)$  в противном случае. Здесь  $r_i$  и  $s_{ij}$  – элемент матриц  $\mathcal{R}_{\rho(k)}$  и  $\mathcal{S}_{\rho(k)}$  соответственно.

Остается доказать условие ограниченности управления в среднем квадратичном (2.22). Рассмотрим интервал повторений до первого переключения. Из (4.3) имеем

$$u_i(k, p-1) = (CB_\sigma)^{-1} \left[ C\hat{x}_i(k, p) - CA_\sigma^p \hat{x}_i(k, 0) - \sum_{q=0}^{p-2} CA_\sigma^{p-1-q} B_\sigma u_i(k, p) - \sum_{q=0}^{p-1} CA_\sigma^{p-1-q} (F_\sigma C \tilde{x}_i(k, q) + F_\sigma G_\sigma \nu_i(k, p)) \right]. \quad (5.12)$$

В частности, при  $p = 2$

$$u_i(k, 1) = (CB_\sigma)^{-1} \left[ C\hat{x}_i(k, 2) - CA_\sigma^2 \hat{x}_i(k, 0) - CA_\sigma B_\sigma u_i(k, 0) - \sum_{q=0}^1 CA_\sigma^{p-1-q} (F_\sigma C \tilde{x}_i(k, q) + F_\sigma G_\sigma \nu_i(k, p)) \right].$$

Возведем обе части последнего равенства в квадрат и оценим правую часть в соответствии с известным неравенством между квадратом суммы и суммой квадратов  $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2$ . Применяя к полученному неравенству оператор математического ожидания с учетом того, что в силу (5.6)  $E[|C\hat{x}_i(k, 2)|^2] < \infty$ , и величины  $|\hat{x}_i(k, 0)|^2$ ,  $|u_i(k, 0)|^2$ ,  $|\tilde{x}_i(k, q)|^2$  и  $|\nu_i(k, q)|^2$  имеют ограниченные математические ожидания, получим, что  $E[|u_i(k, 1)|^2] < \infty$ . Последовательно изменяя в (5.12)  $p$  в пределах от 3 до  $T$ , получим, что  $E[|u_i(k, p)|^2] < \infty$  для всех  $k$  до первого переключения. Последовательно рассматривая интервалы между переключениями, с учетом того, что в соответствии с подходом к выбору управления в моменты переключений в начале каждого интервала справедливо (5.6) аналогично получим, что  $E[|u_i(k, p)|^2] < \infty$  для всех  $k$  до последнего переключения на шаге  $k_f$ . Повторяя аналогичную процедуру для  $k \geq k_f$  и устремляя  $k$  к  $\infty$  убеждаемся в справедливости (2.22). Таким образом доказано следующее утверждение.

**Теорема 5.2.** *Если на повторении  $k+1$  для агента  $i \in \mathcal{I}_{\rho(k)}$  сигнал  $\sigma_i(k+1) = \sigma_i(k)$ , то закон УИО, обеспечивающий достижение консенсуса в смысле условий (2.21)-(2.22), определяется в виде (2.6) с корректирующей поправкой (5.2), для которого матрицы протокола находятся из решения (5.8) и определяются выражениями (5.9). Если на повторении  $k+1$  для агента  $i \in \mathcal{I}_{\rho(k)}$  сигнал  $\sigma_i(k+1) \neq \sigma_i(k)$ , то корректирующая*

поправка для закона (2.6) определяется в виде (4.11)  $\forall i : r_i = 1$ , и (5.10)  $\forall i : r_i = 0$ , где  $r_i$  – элемент матрицы  $\mathcal{R}_{\rho(k+1)}$ . Если  $i \notin \mathcal{I}_{\rho(k)}$ , то управление на повторении  $k+1$  определяется в виде (5.11).

Описанные вычисления и правила переключений в виде укрупненных шагов представлены в алгоритме 5.

## 5.5 Моделирование сетевой системы

В качестве демонстрационного примера в данном разделе представлены результаты моделирования следующей сетевой системы. В качестве агентов рассматривались манипуляторы с поворотным гибким звеном, динамика каждого из которых описывалась моделью (4.14). Параметры манипуляторов и интенсивности шумов были установлены в значения (2.38). Динамика агентов определялась двумя режимам с желаемыми траекториями выходного сигнала (4.15) и моментами инерции звена (4.16). Продолжительность повторения составляет 3 с, при переходе к дискретной модели был выбран период дискретизации  $T_s = 0,01$  с. Информационная сеть определялась следующими топологиями:

1. Работает только глобальный лидер:

$$\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{1\}, \mathcal{L}_{\rho(k)} = 0, \mathcal{R}_{\rho(k)} = 1,$$

при  $\rho(k) = 1$ ;

2. К глобальному лидеру подключается первый ведомый агент:

$$\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{1, 2\}, \mathcal{L}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{R}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

при  $\rho(k) = 2$ ;

3. К первому ведомому агенту подключается второй:

$$\mathcal{I}_{\rho(k)} = \{1, 2, 3\}, \mathcal{L}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{R}_{\rho(k)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

при  $\rho(k) = 3$ .

---

**Алгоритм 5.** Алгоритм УИО на основе дивергентного метода векторных функций Ляпунова для стохастических сетевых систем с изменяемыми параметрами агентов, желаемой траекторией и топологией сети

---

**Вход:** Матрицы  $A_{\sigma_i(k)}$ ,  $B_{\sigma_i(k)}$ ,  $D_{\sigma_i(k)}$ ,  $C$  и  $G_{\sigma_i(k)}$ , ковариационные матрицы  $S_{\omega_i}$  и  $S_{\nu_i}$ , начальные условия  $x_i(k, 0)$  и  $u_i(0, p)$ , желаемые траектории  $y_{\sigma_i(k)}^{ref}(p)$ , множества  $\mathcal{I}_{\rho(k)}$ , матрицы связей  $\mathcal{S}_{\rho(k)}$ ,  $\mathcal{L}_{\rho(k)}$  и  $\mathcal{R}_{\rho(k)}$ , период повторения  $T$ , весовые матрицы  $Q_{1\rho(k)}$ ,  $Q_{2\rho(k)}$  и  $R_{\rho(k)}$ , переключающие сигналы  $\sigma(k)$  и  $\rho(k)$ .

- 1: **Для всех**  $\sigma \in \{1, 2, \dots, m\}$
  - 2:     **Для всех**  $\rho \in \{1, 2, \dots, c\}$
  - 3:         Решить систему (5.8) относительно  $X_{1\sigma\rho}$ ,  $X_{2\sigma\rho}$ ,  $Y_{1\sigma\rho}$  и  $Y_{2\sigma\rho}$ .
  - 4:         Вычислить  $K_{1\sigma\rho}$  и  $K_{2\sigma\rho}$  как (5.9).
  - 5:     **Конец Для**
  - 6: **Конец Для**
  - 7: **Для**  $k = 0, 1, \dots$
  - 8:     **Для**  $p = 0, \dots, T - 1$
  - 9:         **Для всех**  $i \in \mathcal{I}_{\rho(k)}$
  - 10:             **Если**  $r_i = 1$ , где  $r_i$  – элемент матрицы  $\mathcal{R}_{\rho(k)}$
  - 11:                 Установить режим  $\sigma_i(k) = \sigma(k)$ .
  - 12:             **Иначе**
  - 13:                 **Если**  $\sigma_j(k - 1) = \sigma(k - 1) \forall j : s_{ij} > 0$ , где  $s_{ij}$  – элемент матрицы  $\mathcal{S}_{\rho(k)}$
  - 14:                     Установить режим  $\sigma_i(k) = \sigma(k - 1)$ .
  - 15:             **Иначе**
  - 16:                 Установить режим  $\sigma_i(k) = \sigma_i(k - 1)$ .
  - 17:             **Конец Если**
  - 18:         **Конец Если**
  - 19:         **Если**  $k > 0$
  - 20:             **Если**  $i \in \mathcal{I}_{\rho(k-1)}$  и  $\sigma_i(k) = \sigma_i(k - 1)$
  - 21:                 Вычислить  $u_i(k, p)$  согласно (2.6) с учетом (5.2).
  - 22:             **Иначе Если**  $i \in \mathcal{I}_{\rho(k-1)}$ ,  $\sigma_i(k) \neq \sigma_i(k - 1)$  и  $r_i = 1$
  - 23:                 Вычислить  $u_i(k, p)$  согласно (2.6) с учетом (4.11).
  - 24:             **Иначе Если**  $i \in \mathcal{I}_{\rho(k-1)}$ ,  $\sigma_i(k) \neq \sigma_i(k - 1)$  и  $r_i = 0$
  - 25:                 Вычислить  $u_i(k, p)$  согласно (2.6) с учетом (5.10).
  - 26:             **Иначе**
  - 27:                 Вычислить  $u_i(k, p)$  согласно (5.11).
  - 28:             **Конец Если**
  - 29:         **Конец Если**
  - 30:         Получить  $y_{\nu_i}(k, p)$  из (5.1).
  - 31:         Вычислить  $\hat{x}_i(k, p + 1)$  как (4.3) и  $\hat{y}_i(k, p) = C\hat{x}_i(k, p)$ .
  - 32:     **Конец Для**
  - 33:     **Конец Для**
  - 34: **Конец Для**
- Выход:** Измеренные выходы  $y_{\nu_i}(k, p)$ .
-

Для фильтра Калмана были получены следующие матрицы усиления:

$$F_{i\sigma_i(k)} = \begin{bmatrix} 0,7106 & -0,5711 & 16,0723 & -12,8866 \end{bmatrix}^\top \text{ при } \sigma_i(k) = 1,$$

$$F_{i\sigma_i(k)} = \begin{bmatrix} 0,7038 & -0,6084 & 15,5888 & -13,9268 \end{bmatrix}^\top \text{ при } \sigma_i(k) = 2.$$

Решая задачу оптимизации, аналогичную ранее рассмотренным при моделировании алгоритмов, при ограничениях (5.8) для всех комбинаций переключающих сигналов с весовыми матрицами

$$Q_{1\rho(k)} = \begin{cases} 10I_{n_x}, & \rho(k) = 1, \\ 10^{-5}I_{n_x}, & \rho(k) \neq 1, \end{cases}$$

$$Q_{2\rho(k)} = 10^5, R_{\rho(k)} = 10^{-4},$$

были получены следующие матрицы протокола для (5.2):

$$K_{1\sigma\rho} = \begin{bmatrix} -25,1078 & -1,2521 & -0,3436 & -0,016 \end{bmatrix}, K_{2\sigma\rho} = 8,788 \text{ при } \sigma = 1 \text{ и } \rho = 1,$$

$$K_{1\sigma\rho} = \begin{bmatrix} -42,0808 & -1,2962 & -0,4169 & -0,0044 \end{bmatrix}, K_{2\sigma\rho} = 16,4167 \text{ при } \sigma = 1 \text{ и } \rho = 2,$$

$$K_{1\sigma\rho} = \begin{bmatrix} -42,0831 & -1,2962 & -0,4169 & -0,0044 \end{bmatrix}, K_{2\sigma\rho} = 15,1047 \text{ при } \sigma = 1 \text{ и } \rho = 3,$$

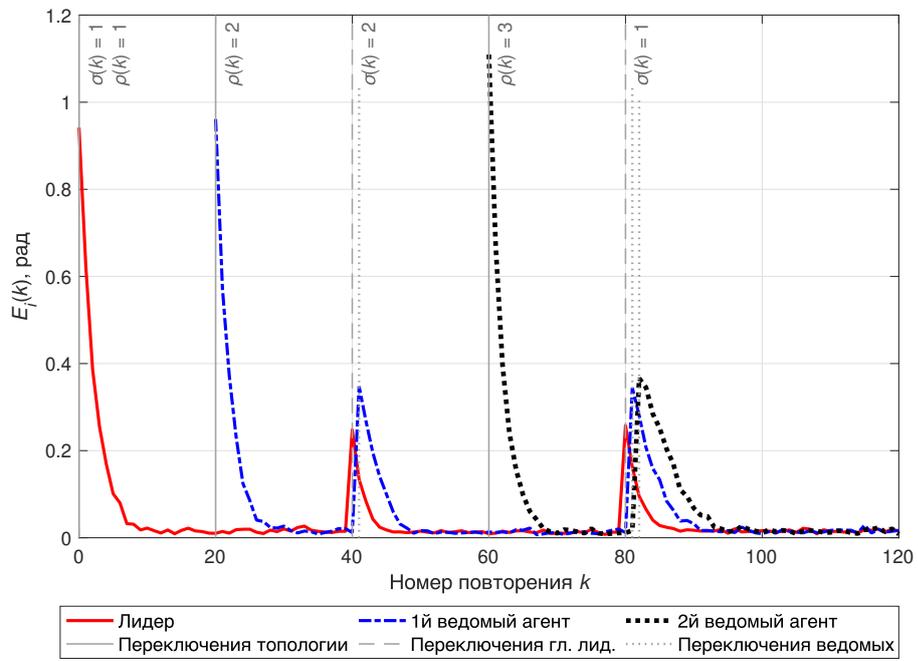
$$K_{1\sigma\rho} = \begin{bmatrix} -25,0719 & -1,2821 & -0,3401 & -0,0128 \end{bmatrix}, K_{2\sigma\rho} = 8,7827 \text{ при } \sigma = 2 \text{ и } \rho = 1,$$

$$K_{1\sigma\rho} = \begin{bmatrix} -42,0809 & -1,2982 & -0,4169 & -0,0044 \end{bmatrix}, K_{2\sigma\rho} = 17,558 \text{ при } \sigma = 2 \text{ и } \rho = 2,$$

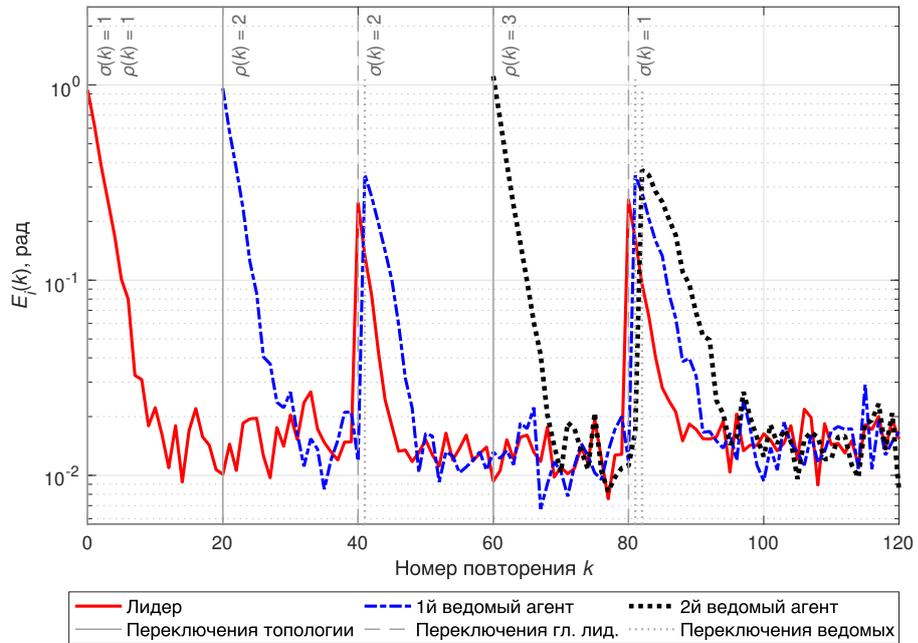
$$K_{1\sigma\rho} = \begin{bmatrix} -42,0831 & -1,2982 & -0,4169 & -0,0044 \end{bmatrix}, K_{2\sigma\rho} = 16,8884 \text{ при } \sigma = 2 \text{ и } \rho = 3,$$

где  $\sigma = \sigma_i(k)$  и  $\rho = \rho(k)$ .

На рисунках 19 и 20 представлены графики выборочных среднеквадратических ошибок обучения агентов, где в первом случае переключение управления при изменении режима работы и топологии сети не производится, т. е. управление происходит согласно закону (2.6) с корректирующей поправкой (5.2) на всем протяжении функционирования системы, и во втором учитываются поправки, компенсирующие переходные ошибки.



а)

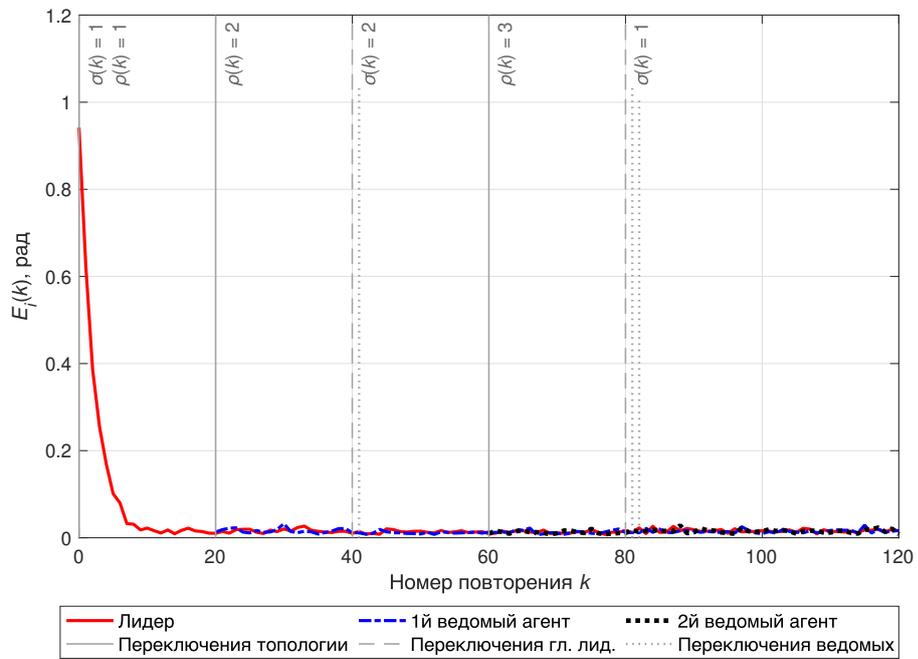


б)

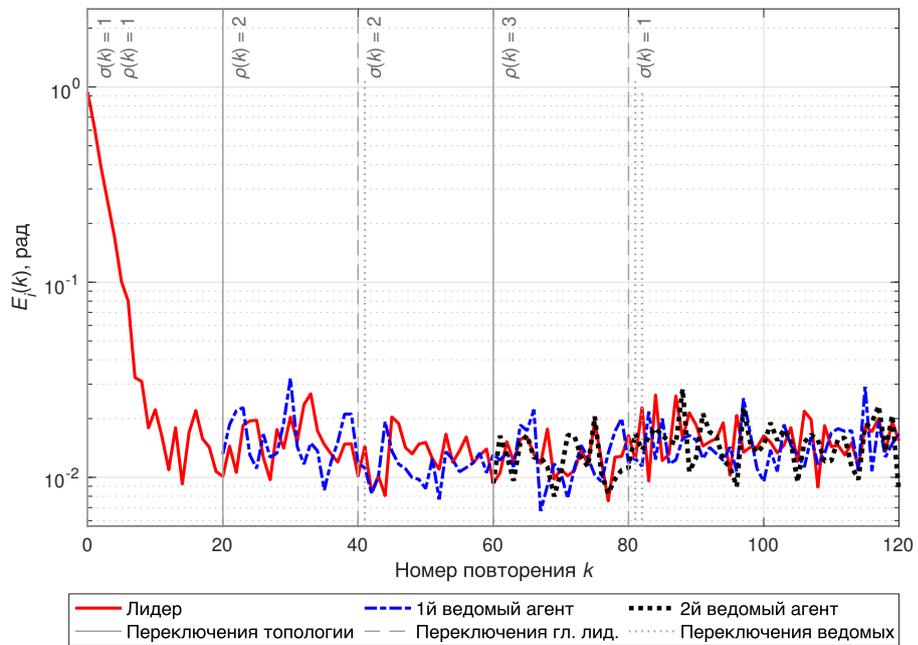
Рис. 19 – Выборочные среднеквадратические ошибки обучения агентов (4.14) без переключения закона управления: а) линейный масштаб; б) логарифмический масштаб

Переключающие сигналы были заданы следующим образом:

$$\sigma(k) = \begin{cases} 1, & k < 40, \\ 2, & 40 \leq k < 80, \\ 1, & k \geq 80, \end{cases} \quad \rho(k) = \begin{cases} 1, & k < 20, \\ 2, & 20 \leq k < 60, \\ 3, & k \geq 60. \end{cases} \quad (5.13)$$



а)



б)

Рис. 20 – Выборочные среднеквадратические ошибки обучения агентов (4.14) при переключении закона управления: а) линейный масштаб; б) логарифмический масштаб

Данные результаты демонстрируют, что разработанный закон управления действительно позволяет снизить величину переходной ошибки в моменты переключения и сократить продолжительность переходного процесса.

## 5.6 Частный случай без учета случайных возмущений

В дополнение кратко рассмотрим частный случай описанной выше сетевой системы без учета случайных возмущений. Динамика ее агентов описывается следующей моделью:

$$\begin{aligned} x_i(k, p+1) &= A_{\sigma_i(k)}x_i(k, p) + B_{\sigma_i(k)}u_i(k, p), \\ y_i(k, p) &= Cx_i(k, p), \quad i \in \mathcal{I}, \quad k \geq 0, \quad 0 \leq p \leq T-1, \end{aligned} \quad (5.14)$$

где  $u_i(k, p)$  и  $y_i(k, p)$  так же представляют собой скалярные переменные, и граничные условия  $x_i(k, 0)$  и  $u_i(0, p)$  будем считать известными. В этом случае решается задача обеспечения консенсуса в смысле (3.19)-(3.20), где ошибка  $e_i(k, p)$  определяется в виде (2.18).

Учитывая ранее определенное правило переключения режима работы и топологии сети, определим переключаемый закон УИО для системы (5.14). Когда режим работы агента  $i$  установлен и он функционировал ранее, т. е. на повторении  $k+1$  сигнал  $\sigma_i(k+1) = \sigma_i(k)$  и  $i \in \mathcal{I}_{\rho(k)}$ , его управление формируется в виде (2.6) с корректирующей поправкой

$$\begin{aligned} \Delta u_i(k+1, p-1) &= K_{1\sigma\rho}(x_i(k+1, p-1) - x_i(k, p-1)) + \\ &+ K_{2\sigma\rho} \left( r_i(y_\sigma^{ref}(p) - y_i(k, p)) + \sum_{j \in \mathcal{I}} s_{ij}(y_j(k, p) - y_i(k, p)) \right), \end{aligned}$$

с матрицами протокола  $K_{1\sigma\rho} = Y_{1\sigma\rho}X_{1\sigma\rho}^{-1}$  и  $K_{2\sigma\rho} = Y_{2\sigma\rho}X_{2\sigma\rho}^{-1}$ , где  $X_{1\sigma\rho}$ ,  $X_{2\sigma\rho}$ ,  $Y_{1\sigma\rho}$  и  $Y_{2\sigma\rho}$  находятся из решения системы

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_{\sigma\rho} & (\bar{A}_{\sigma\rho}\bar{X}_{\sigma\rho} + \bar{B}_{\sigma\rho}\bar{Y}_{\sigma\rho}\bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top & \bar{X}_{\sigma\rho} & (\bar{Y}_{\sigma\rho}\bar{\mathcal{H}}_\rho)^\top \\ \bar{A}_{\sigma\rho}\bar{X}_{\sigma\rho} + \bar{B}_{\sigma\rho}\bar{Y}_{\sigma\rho}\bar{\mathcal{H}}_\rho & \bar{X}_{\sigma\rho} & 0 & 0 \\ \bar{X}_{\sigma\rho} & 0 & \bar{Q}_\rho^{-1} & 0 \\ \bar{Y}_{\sigma\rho}\bar{\mathcal{H}}_\rho & 0 & 0 & \bar{R}_\rho^{-1} \end{bmatrix} \succcurlyeq 0, \quad \bar{X}_{\sigma\rho} \succ 0,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\sigma\rho} &= \begin{bmatrix} I_{N_\rho} \otimes A_\sigma & 0 \\ I_{N_\rho} \otimes (-CA_\sigma) & I_{N_\rho} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{\sigma\rho} = \begin{bmatrix} I_{N_\rho} \otimes B_\sigma \\ I_{N_\rho} \otimes (-CB_\sigma) \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathcal{H}}_\rho = \text{diag} \left[ I_{N_\rho n_x} \quad \mathcal{L}_\rho + \mathcal{R}_\rho \right], \\ \bar{X}_{\sigma\rho} &= \text{diag} \left[ I_{N_\rho} \otimes X_{1\sigma\rho} \quad I_{N_\rho} \otimes X_{2\sigma\rho} \right], \quad \bar{Y}_{\sigma\rho} = \left[ I_{N_\rho} \otimes Y_{1\sigma\rho} \quad I_{N_\rho} \otimes Y_{2\sigma\rho} \right], \\ \bar{Q}_\rho &= \text{diag} \left[ I_{N_\rho} \otimes Q_{1\rho} \quad I_{N_\rho} \otimes Q_{2\rho} \right], \quad \bar{R}_\rho = I_{N_\rho} \otimes R_\rho, \quad \sigma = \sigma_i(k+1), \quad \rho = \rho(k+1). \end{aligned}$$

Для компенсации ошибки при переключении режима агента  $i$  на повторении  $k+1$ , т. е. когда  $\sigma_i(k+1) \neq \sigma_i(k)$  и  $i \in \mathcal{I}_{\rho(k)}$ , управляющий сигнал формируется в виде (2.6) с корректирующей поправкой

$$\begin{aligned} \Delta u_i(k+1, p-1) = & -(CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1}C(B_{\sigma_i(k+1)} - B_{\sigma_i(k)})u_i(k, p-1) - \\ & -(CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1}C(A_{\sigma_i(k+1)}x_i(k+1, p-1) - A_{\sigma_i(k)}x_i(k, p-1)) + \\ & +(CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1}(y_{\sigma_i(k+1)}^{ref}(p) - y_i(k, p)), \end{aligned}$$

если  $r_i = 1$ , и поправкой

$$\begin{aligned} \Delta u_i(k+1, p-1) = & -(CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1}C(B_{\sigma_i(k+1)} - B_{\sigma_i(k)})u_i(k, p-1) - \\ & -(CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1}C(A_{\sigma_i(k+1)}x_i(k+1, p-1) - A_{\sigma_i(k)}x_i(k, p-1)) + \\ & + l_{ii}^{-1}(CB_{\sigma_i(k+1)})^{-1} \sum_{j \in \mathcal{I}_{\rho}} s_{ij}(y_j(k, p) - y_i(k, p)), \end{aligned}$$

если  $r_i = 0$ , где  $r_i$ ,  $s_{ij}$  и  $l_{ij}$  – элементы матриц  $\mathcal{R}_{\rho}$ ,  $\mathcal{S}_{\rho}$  и  $\mathcal{L}_{\rho}$  соответственно, и  $\rho = \rho(k+1)$ .

Если агент  $i$  начинает функционировать на повторении  $k+1$ , т. е.  $i \notin \mathcal{I}_{\rho(k)}$ , то управление им в этот момент происходит согласно закону

$$u_i(k+1, p-1) = l_{ii}^{-1}(CB_{\sigma})^{-1} \sum_{j \in \mathcal{I}_{\rho(k+1)}} s_{ij}y_j(k, p) - (CB_{\sigma})^{-1}CA_{\sigma}x_i(k+1, p-1).$$

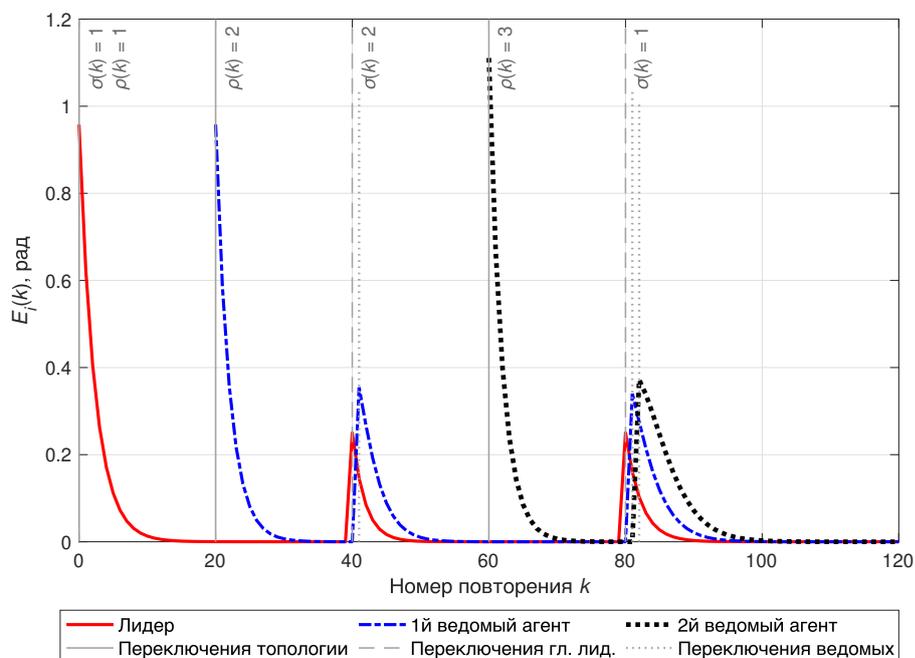
где  $s_{ij}$  и  $l_{ii}$  – элементы матриц  $\mathcal{S}_{\rho(k+1)}$  и  $\mathcal{L}_{\rho(k+1)}$  соответственно. При таком законе условия (3.19)-(3.20) будут выполняться всюду.

Было проведено моделирование сетевой системы, рассмотренной в разделе 5.5, динамика агентов которой описывалась непрерывной моделью вида

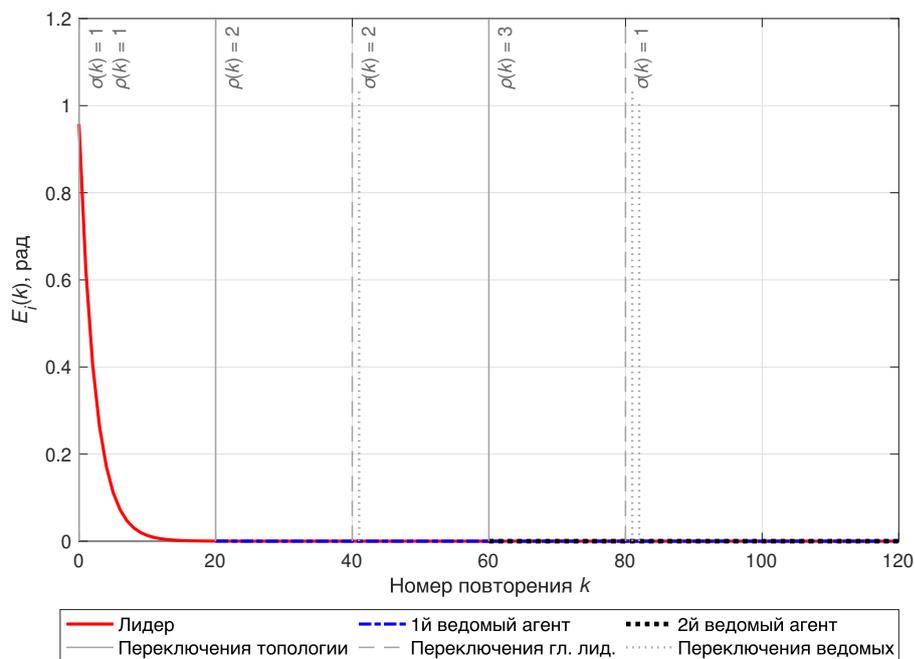
$$\begin{aligned} \dot{x}_i(k, t) &= A_{\sigma_i(k)}^{cont}x_i(k, t) + B^{cont}u_i(k, t), \\ y_i(k, t) &= Cx_i(k, t) \end{aligned} \tag{5.15}$$

с теми же параметрами и режимами работы. При переходе к дискретной модели был установлен период дискретизации  $T_s = 0,01$  с.

Результаты моделирования такой системы представлены на рисунке 21, где переключаящие сигналы заданы в виде (5.13). При рассмотрении результатов в логарифмическом масштабе (рисунок 22) видно, что предложенный подход к компенсации переходной ошибки в значительной степени уменьшает ее величину в момент пере-



а)



б)

Рис. 21 – Среднеквадратические ошибки обучения агентов (5.15): а) без переключения закона управления; б) при переключении закона управления

ключения режима, а при подключении агента к сети позволяет ему сразу достигать точности своих локальных лидеров.

## 5.7 Выводы по главе 5

В данной главе была рассмотрена задача синтеза УИО стохастическими сетевыми системами с изменяемым режимом работы агентов и топологией информационной сети.

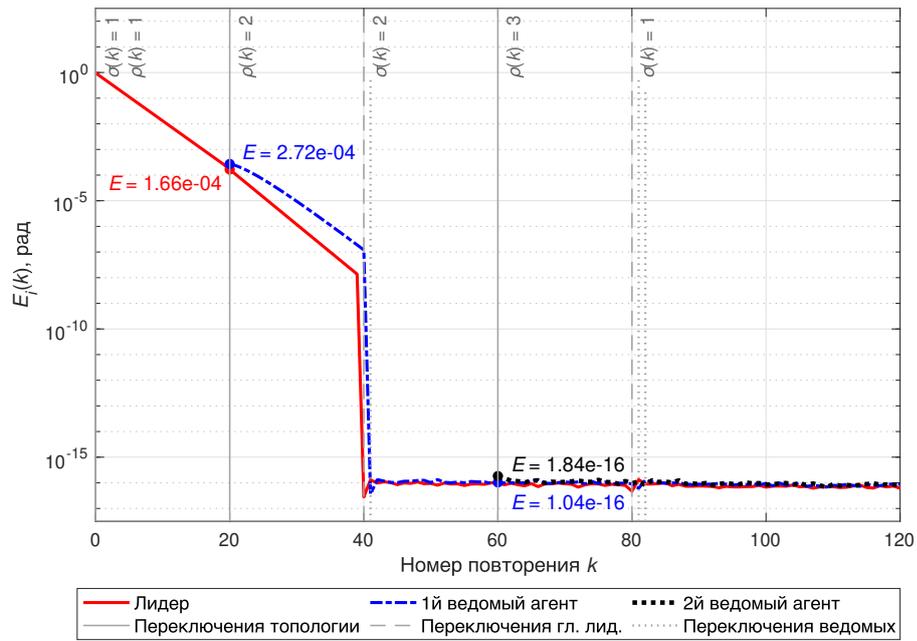


Рис. 22 – Среднеквадратические ошибки обучения агентов при переключении закона управления (логарифмический масштаб)

Дивергентный метод векторных функций Ляпунова получил распространение на данный класс систем и был положен в основу решения. С целью минимизации ошибок в моменты смены режима и топологии, компенсирующие законы были найдены из решения задачи минимизации среднеквадратических отклонений выходных сигналов агентов от доступных им образов желаемой траектории. Как показали результаты моделирования, полученный алгоритм управления значительно снижает величину переходных ошибок в момент изменения режима и позволяет подключаемым агентам сразу достичь точность выполнения операции своих локальных лидеров. Данный подход является развитием подхода, рассмотренного в главе 4, и ему присущи те же недостатки.

## Заключение

В данной работе были рассмотрены новые задачи управления с итеративным обучением сетевыми мультиагентными системами, которые мотивированы развитием современных роботизированных систем, в частности, исполнительных систем интеллектуальных производств. Получены следующие результаты:

1. Разработан алгоритм управления с итеративным обучением стохастическими сетевыми системами с изменяемой топологией сети с учетом неопределенностей модели агентов;
2. Метод синтеза управления с итеративным обучением с переключаемым законом управления [4] распространен для сетевых стохастических систем с изменяемой желаемой траекторией и изменяемыми параметрами агентов;
3. Разработан алгоритм управления с итеративным обучением сетевыми стохастическими системами с изменяемой желаемой траекторией и изменяемыми параметрами агентов;
4. Дивергентный метод векторных функций Ляпунова распространен для сетевых стохастических систем с изменяемыми параметрами агентов, изменяемой желаемой траекторией и изменяемой топологией сети;
5. Разработан алгоритм управления с итеративным обучением сетевыми стохастическими системами с изменяемой желаемой траекторией, изменяемыми параметрами агентов и изменяемой топологией сети.

Как было показано в главе 2, применение дивергентного метода векторных функций Ляпунова в сочетании с фильтром Калмана в задаче управления с итеративным обучением сетевыми стохастическими системами имеет ряд преимуществ по сравнению с известными результатами, что послужило причиной применения и развития такого подхода на стохастические сетевые системы с переключениями. В рассмотренных задачах полученные алгоритмы устраняют недостатки традиционных подходов к управлению с итеративным обучением, которые в случае изменения целевой задачи могут давать неудовлетворительные результаты. Они обеспечивают высокую скорость сходимости ошибки обучения и компенсируют величину переходных ошибок, вызванных соответствующими изменениями динамики.

Данные алгоритмы могут использоваться для программно-алгоритмического обеспечения решения практических задач управления с итеративным обучением в различных областях, в том числе для управления роботизированными системами исполнительного уровня интеллектуальных производств. Полученные теоретические результаты будут служить основой для дальнейших исследований в области управления с итеративным обучением сетевыми системами с переключениями. В частности планируется продолжить работу по следующим направлениям:

1. Разработать метод синтеза и алгоритмы управления с итеративным обучением стохастическими сетевыми системами с переключениями с учетом неопределенностей модели агентов, позволяющие минимизировать переходную ошибку в максимально возможной степени;
2. Расширить полученный метод синтеза и алгоритм управления с итеративным обучением стохастическими сетевыми системами с изменяемыми желаемой траекторией, параметрами агентов и топологией сети на более общие модели агентов и структуры информационных взаимодействий;
3. Сократить продолжительность процесса переключения режима работы агентов в алгоритме управления с итеративным обучением стохастическими сетевыми системами с изменяемыми желаемой траекторией, параметрами агентов и топологией сети.

## Список литературы

- [1] Панов, А. И. *Тенденции в развитии интеллектуального производства* / А. И. Панов // Экономика и качество систем связи. – 2023. – № 3 (29). – С. 89-99.
- [2] Цыпкин, Я. З. *Адаптация и обучение в автоматических системах* / Я. З. Цыпкин – М.: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1968. – 400 с.
- [3] Пакшин, П. В. *Управление с итеративным обучением мультиагентной системой в условиях случайных возмущений* / П. В. Пакшин, А. С. Копосов, Ю. П. Емельянова // Автоматика и телемеханика. – 2020. – № 3. – С. 132-156. – DOI 10.31857/S0005231020030083.
- [4] Pakshin, P. *Iterative learning control of stochastic linear systems under switching of the reference trajectory and parameters* / P. Pakshin, J. Emelianova, M. Emelianov // 2021 29th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), PUGLIA, Italy. – 2021. – P. 1311-1316. – DOI 10.1109/MED51440.2021.9480192.
- [5] Копосов, А. С. *Сетевое управление с итеративным обучением при изменении режима работы агентов и конфигурации информационной сети* // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2023. – № 1. – С. 35-53. – DOI 10.21638/11701/srbu35.2023.104.
- [6] Пакшин, П. В. *Управление с итеративным обучением мультиагентной системой в условиях случайных возмущений* / П. В. Пакшин, А. С. Копосов, Ю. П. Емельянова // Автоматика и телемеханика. – 2020. – № 3. – С. 132-156. – DOI 10.31857/S0005231020030083.
- [7] Копосов, А. С. *Робастное сетевое управление с итеративным обучением системой переменной конфигурации при случайных возмущениях* // Управление большими системами: сборник трудов. – 2021. – № 94. – С. 50-65. – DOI 10.25728/ubs.2021.94.3.
- [8] Копосов, А. С. *Управление с итеративным обучением стохастическими мультиагентными системами с изменяемой желаемой траекторией и топологией* / А. С. Копосов, П. В. Пакшин // Автоматика и телемеханика. – 2023. – № 6. – С. 79-99. – DOI 10.31857/S0005231023060053.

- [9] Kopolov, A. *Iterative Learning Control of Multi-Agent Systems under Changing Network Configuration* / A. Kopolov, J. Emelianova, P. Pakshin // IFAC-PapersOnLine, Austin, TX, October 24-27, 2021. – 2021. – Vol. 54. – P. 669-674. – DOI 10.1016/j.ifacol.2021.11.248.
- [10] Kopolov, A. *Iterative Learning Control of Multi-Agent Systems under Changing Reference Trajectory* / A. Kopolov, J. Emelianova, P. Pakshin // IFAC-PapersOnLine 55-12. – 2022. – P. 759-764. – DOI 10.1016/j.ifacol.2022.07.404.
- [11] Копосов, А. С. *Управление с итеративным обучением группой систем с неопределенными параметрами при изменении конфигурации информационной сети* / А. С. Копосов, П. В. Пакшин // Информационные системы и технологии ИСТ-2021: сборник материалов XXVII Международной научно-технической конференции Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, Нижний Новгород, 23–24 апреля 2021 года / Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, 2021. – С. 711-717.
- [12] Копосов, А. С. *Сетевое управление с итеративным обучением системой переменной конфигурации с неопределенными параметрами при случайных возмущениях* // Управление большими системами: труды XVII Всероссийской школы-конференции молодых ученых, Москва-Звенигород, 6-9 сентября 2021 года. – Москва: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2021. – С. 66-77. – DOI 10.25728/ubs.2021.006.
- [13] Копосов, А. С. *Сетевое управление с итеративным обучением при изменении эталонной траектории в условиях случайных возмущений* // Информационные технологии и прикладная математика: Сборник статей участников Всероссийской научно-практической конференции, Арзамас, 24-25 марта 2022 года / Отв. редактор А. А. Статуев. – Арзамас: Арзамасский филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского», 2022. – С. 125-134.
- [14] Копосов, А. С. *Управление с итеративным обучением многоагентной системой при изменении топологии сети и режима агентов* // Будущее технической науки:

сборник материалов XXII Всероссийской молодежной научно-технической конференции; НГТУ им. П. Е. Алексеева. – Нижний Новгород, 2023. – С. 50-52.

- [15] Pakshin, P. *Iterative Learning Control Design for Discrete Stochastic Linear Systems* / P. Pakshin, J. Emelianova, K. Galkowski, E. Rogers // 2019 18th European Control Conference (ECC). – 2019. – P. 3766-3771. – DOI 10.23919/ECC.2019.8796042.
- [16] Saab, S. *A discrete-time stochastic learning control algorithm* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2001. – Vol. 46, No. 6. – P. 877-887. – DOI 10.1109/9.928588.
- [17] Schwab, K. *The Fourth Industrial Revolution* // World Economic Forum, 2016. – 192 p. – ISBN-13: 978-1-944835-01-9.
- [18] *Теория управления (дополнительные главы): Учебное пособие* / Б. Р. Андриевский, М. В. Балашов, Н. Н. Бахтадзе [и др.]; Под ред. Д. А. Новикова. – Москва: ЛЕНАНД, 2019. – 552 с.
- [19] Андриевский, Б. Р. *Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи* / Б. Р. Андриевский, А. С. Матвеев, А. Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 4. – С. 34-99.
- [20] Hespanha, J.P. *A Survey of Recent Results in Networked Control Systems* / J. P. Hespanha, P. Naghshtabrizi, Y. Xu // Proc. IEEE. – 2007. – Vol. 95., No. 1. – P. 138-162.
- [21] Matveev, A. S. *Estimation and Control over Communication Networks* / A. S Matveev, A. V. Savkin – Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 2009. – 533 p.
- [22] Проскурников, А. В. *Задачи и методы сетевого управления* / А. В. Проскурников, А. Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. – 2016. – № 10. – С. 3-39.
- [23] Проскурников, А. В. *Усредняющие алгоритмы и неравенства в задачах много-агентного управления и моделирования: специальность 12.30.00: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук* / Проскурников Антон Викторович, 2022. – 384 с.
- [24] Bullo, F. *Distributed control of robotics networks* / F. Bullo, J. Cortes, S. Martinez – Princeton: Princeton Univ. Press, 2009. – 320 p.

- [25] Savkin, A. *Decentralized coverage control problems for mobile robotic sensor and actuator networks* / A. Savkin, T. Cheng, Z. Li, F. Javed, A. Matveev, H. Nguyen – John Wiley & Sons, 2015. – 208 p.
- [26] Olfati-Saber, R. *Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory* // IEEE Trans. Autom. Control. – 2006. – Vol. 51, No. 3. – P. 401-420.
- [27] Garden, M. *Learning control of actuators in control systems* // U. S. Patent 3555252, 1971.
- [28] Edwards, J. B. *Stability Problems in the Control of Multipass Processes* // Proceedings of The Institution of Electrical Engineers. – 1974. – Vol. 121, No. 11. – P. 1425-1431.
- [29] Uchiyama, M. *Formation of high-speed motion pattern of a mechanical arm by trial* // Trans. Soc. Instrument Contr. Engineers. – 1978. – Vol. 14. – P. 706-712.
- [30] Arimoto, S. *Bettering operation of robots by learning* / S. Arimoto, S. Kawamura, F. Miyazaki // J. Robot. Syst. – 1984. – Vol. 1. – P. 123-140.
- [31] Kawamura, S. *Iterative learning control for robot systems* / S. Kawamura, F. Miyazaki, S. Arimoto // Proceedings of the 24th International Conference on Industrial Electronics, Control, and Instrumentation, Tokyo, Japan. – 1984. – P. 393-398.
- [32] Первозванский, А. А. *Обучаемое управление и его приложения. I. Элементы общей теории* // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 11. – С. 160-169.
- [33] Первозванский, А. А. *Обучаемое управление и его приложения. II. Системы в форме Фробениуса и обучаемое управление манипуляционными роботами* // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 12. – С. 99-108.
- [34] Sammons, P. M. *Iterative learning control of bead morphology in Laser Metal Deposition processes* / P. M. Sammons, D. A. Bristow, R. G. Landers // Proceedings of the 2013 American Control Conference (ACC). – 2013. – P. 5942-5947. – DOI 10.1109/ACC.2013.6580770.
- [35] Sutanto, E. *Norm Optimal Iterative Learning Control for a Roll to Roll nano/micro-manufacturing system* / E. Sutanto, A. G. Alleyne // 2013 American Control Conference (ACC). – 2013. – P. 5935-5941. – DOI 10.1109/ACC.2013.6580769.

- [36] Dabkowski, P. *Iterative Learning Control Based on Relaxed 2-D Systems Stability Criteria* / P. Dabkowski, K. Galkowskiy, E. Rogers, Z. Cai, C. T. Freeman, P. L. Lewin // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2013. – Vol. 21, No. 3. – P. 1016-1023. – DOI 10.1109/TCST.2012.2198477.
- [37] *Pathcorrection for an industrial robot* / S. Gunnarsson, M. Norrlof, G. Hovland, U. Carlsson, T. Brogardh, T. Svenson, S. Moberg – U. S. Patent 20040093119. – 2004.
- [38] Mohammadpour, A. *Iterative learning control for fault-tolerance in multi-phase permanent-magnet machines* / A. Mohammadpour, S. Mishra, L. Parsa // 2013 American Control Conference, Washington, DC, USA. – 2013. – P. 5929-5934. – DOI 10.1109/ACC.2013.6580768.
- [39] Warriar, R. *Iterative Learning from Novice Human Demonstrations for Output Tracking* / R. Warriar, S. Devasia // IEEE Transactions on Human-Machine Systems. – 2016. – Vol. 46, No. 4. – P. 510-521. – DOI 10.1109/THMS.2016.2545243.
- [40] Johansen, S. V. *Broiler FCR Optimization Using Norm Optimal Terminal Iterative Learning Control* / S. V. Johansen, M. R. Jensen, B. Chu, J. D. Bendtsen, J. Mogensen, E. Rogers // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2021. – Vol. 29, No. 2. – P. 580-592. – DOI 10.1109/TCST.2019.2954300.
- [41] Nowicka, W. N. *Reducing Aerodynamic Load Fluctuation in Wind Turbines using Iterative Learning Control laws Designed Using Reduced Order Models of the Flow* / W. N. Nowicka, B. Chu, O. R. Tutty, E. Rogers // American Control Conference (ACC). – 2022. – P. 4242-4247. – DOI 10.23919/ACC53348.2022.9867215.
- [42] Barton, K. *Systematic surveillance for UAVs: A feed forward iterative learning control approach* / K. Barton, D. Kingston // Proceedings of the 2013 American Control Conference (ACC), USA, Washington D.C., June 17-19. – 2013. – P. 5917-5922. – DOI 10.1109/ACC.2013.6580766.
- [43] Li, J. *Iterative learning control for a distributed cloud robot with payload delivery* / J. Li, S. Wang, J. Wang, J. Li, J. Zhao, L. Ma // Assembly Automation. – 2021. – Vol. 41, No. 3. – P. 263-273. – DOI 10.1108/AA-11-2020-0179.
- [44] Freeman, C. *Iterative Learning Control in Health Care: Electrical Stimulation and Robotic-Assisted Upper-Limb Stroke Rehabilitation* / C. Freeman, E. Rogers, A.-

- M. Hughes, J. Burridge, K. Meadmore // IEEE Control Systems. – 2012. – Vol. 32, No. 1. – P. 18-43. – DOI 10.1109/MCS.2011.2173261.
- [45] Ahn, H.-S. *Iterative learning control for multi-agent formation* / H.-S. Ahn, Y. Chen // 2009 ICCAS-SICE. – 2009. – P. 3111-3116.
- [46] Yang, S. *Iterative learning control for multi-agent systems consensus tracking* / S. Yang, J.-X. Xu, D. Huang // 2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Maui, HI, USA. – 2012. – P. 4672-4677. – DOI 10.1109/CDC.2012.6426074.
- [47] Hock, A. *Distributed iterative learning control for a team of quadrotors* / A. Hock, A. Schoellig // 2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC), Las Vegas, NV, USA. – 2016. – P. 4640-4646. – DOI 10.1109/CDC.2016.7798976.
- [48] Hock, A. *Distributed iterative learning control for multi-agent systems* / A. Hock, A. Schoellig // Autonomous Robots. – 2019. – Vol. 43. – P. 1989-2010. – DOI 10.1007/s10514-019-09845-4.
- [49] Sun, S. *Iterative learning control based robust distributed algorithm for non-holonomic mobile robots formation* / S. Sun, T. Endo, F. Matsuno // IEEE Access. – 2018. – Vol. 6. – P. 61904-61917. – DOI 10.1109/ACCESS.2018.2876545.
- [50] Ahn, H. S. *Iterative Learning Control. Robustness and Monotonic Convergence for Interval Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences.* / H. S. Ahn, K. L. Moore, Y. Q. Chen. – Springer-Verlag: London, 2007. – 228 p.
- [51] Pakshin, P. V. *Iterative learning control design for multiagent systems based on 2D models* / P. V. Pakshin, J. P. Emelianova, M. A. Emelianov // Automation and Remote Control. – 2018. – Vol. 79, No. 6. – P. 1040-1056. – DOI 10.1134/S000511791806005X.
- [52] Willems, J. *A General Multi-System Learning Control Framework and its Application to Non-Synchronized Experiments* / J. Willems, B. Depraetere, S. Benghea // 2022 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA), Trieste, Italy. – 2022. – P. 1433-1439. – DOI 10.1109/CCTA49430.2022.9966036.
- [53] Balta, E. C. *Switch Based Iterative Learning Control for Tracking Iteration Varying References* / E. C. Balta, D. M. Tilbury, K. Barton // IFAC PapersOnLine. – 2020. – Vol. 53, No. 2. – P. 1493-1498. – DOI 10.1016/J.IFACOL.2020.12.1940

- [54] Pakshin, P. *Iterative learning control of stochastic linear systems with reference trajectory switching* / P. Pakshin, J. Emelianova, E. Rogers, K. Galkowski // 2021 60th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Austin, TX, USA. – 2021. – P. 6572-6577. – DOI 10.1109/CDC45484.2021.9682991.
- [55] van Zundert, J. *Optimality and flexibility in Iterative Learning Control for varying tasks* / J. van Zundert, J. Bolder, T. Oomen // Automatica. – 2016. – Vol. 67. – P. 295-302. – DOI 10.1016/j.automatica.2016.01.026.
- [56] Gao, X. *An iterative learning control algorithm for portability between trajectories* / X. Gao, S. Mishra // 2014 American Control Conference. – 2014. – P. 3808-3813. – DOI 10.1109/ACC.2014.6859281.
- [57] Liu, Y. *An iterative learning approach to formation control of multi-agent systems.* / Y. Liu, Y. Jia // Systems & Control Letters. – 2012. – Vol. 61, No. 1. – P. 148-154. – DOI 10.1016/j.sysconle.2011.10.011.
- [58] Meng, D. *Multi-agent iterative learning control with communication topologies dynamically changing in two directions* / D. Meng, Y. Jia, J. Du // Control Theory & Applications, IET. – 2013. – Vol. 7. – P. 261-270. – DOI 10.1049/iet-cta.2012.0812.
- [59] Rogers, E. *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes* / E. Rogers, K. Galkowski, D. H. Owens – Lect. Notes Control Inform. Sci. Berlin: Springer-Verlag, 2007. – 456 p.
- [60] Apkarian, J. *Workbook on Flexible Link Experiment for Matlab/Simulink Users* / J. Apkarian, P. Karam, M. Levis – Quanser, 2011.
- [61] Пакшин, П. В. *Управление с итеративным обучением дискретными стохастическими системами с переключениями* / П. В. Пакшин, Ю. П. Емельянова // Автоматика и телемеханика. – 2020. – № 11. – С. 93-111. – DOI 10.1134/S0005117920110053.