Д.В. БЕКЛЕМИШЕВ

КУРС АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

УДК 514
ББК 22.151
Б42

Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. — 10-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 304 с. — ISBN 5-9221-0304-0.

В учебнике излагается основной материал, входящий в объединенный курс аналитической геометрии и линейной алгебры: векторная алгебра, прямые и плоскости, линии и поверхности второго порядка, аффинные преобразования, системы линейных уравнений, линейные пространства, евклидовы и унитарные пространства, аффинные пространства, тензорная алгебра.

Настоящее издание существенно переработано. В основном изменения направлены на улучшение изложения, но сделано много добавлений, из которых наиболее существенное — теорема Жордана. Добавлены задачи и упражнения, снабженные ответами и указаниями. Произведен также ряд сокращений.

Для студентов университетов и технических вузов с расширенной программой по математике.

Табл. 2. Ил. 55. Библиогр. 23 назв.

ISBN 5-9221-0304-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

A, α альфа	B, β бета	Γ, γ гамма	Δ, δ дельта
E, ε эпсилон	Z, ζ дзета	H, η эта	Θ, θ тета
I, ι йота	K, κ каппа	Λ, λ лямбда	M, μ мю
N, ν ню	Ξ, ξ кси	O, o омикрон	Π, π ри
P, ρ ро	Σ, σ сигма	T, τ тау	Υ, υ ипсилон
Φ, ϕ фи	X, χ хи	Ψ, ψ пси	Ω, ω омега

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга отражает многолетний опыт преподавания соответствующего курса в Московском физико-техническом институте. Особенности подготовки студентов МФТИ вызывают необходимость ускоренного изложения курса математики, по объему приближающегося к университетскому. В связи с этим аналитическая геометрия излагается так, чтобы на простом и доступном материале подготовить студента к изучению линейной алгебры. Собственно линейной алгебре, т. е. теории линейных пространств, предпослана большая глава о системах линейных уравнений и матрицах. Ее цель — дать читателю исследование систем линейных уравнений, независимое от методов линейной алгебры. В этой же главе собраны и другие сведения, необходимые для дальнейшего.

Настоящее издание существенно отличается от предыдущих. Произведены две перестановки материала: в теории определителей используется умножение матриц и элементарные операции, теория евклидовых пространств излагается после квадратичных форм. Добавлены параграфы о теореме Жордана и о внешних формах. Кроме того, сделан ряд других дополнений и изменений. В конце каждого параграфа добавлены упражнения, снабженные ответами и указаниями. Произведены также некоторые сокращения.

В настоящем издании улучшены некоторые доказательства и исправлены погрешности предыдущего. В частности, ранг матрицы изучается независимо от теории определителей. Добавлена теорема о приведении матрицы линейного преобразования к треугольному виду. Более подробное представление о строении книги можно получить из оглавления.

Мне хочется с благодарностью отметить то влияние, которое оказали на эту книгу преподаватели кафедры высшей математики МФТИ, больше других все, читавшие лекции по курсу аналитической геометрии и линейной алгебры. Особенно я благодарен проф. А.А. Абрамову, проф. Л.А. Беклемишевой, чл.-корр. РАН Л.Д. Кудрявцеву, проф. В.Б. Лидскому, акад. Л.В. Овсянникову, проф. С.С. Рышкову, проф. С.А. Теляковскому.

ГЛАВА I

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Векторы

1. Предварительные замечания. Первые главы этой книги можно рассматривать как продолжение школьного курса геометрии. Известно, что каждая математическая дисциплина основывается на некоторой системе не доказываемых предложений, называемых аксиомами. Полный перечень аксиом геометрии, так же, как и обсуждение роли аксиом в математике, можно найти в книге Н.В. Ефимова [5]. (Цифры в квадратных скобках означают ссылки на список рекомендуемой литературы, помещенный в конце книги.)

Мы не ставим себе целью изложение логических основ предмета и потому просто опираемся на теоремы, доказываемые в курсе элементарной геометрии. Равным образом мы не пытаемся дать определения основных геометрических понятий: точки, прямой, плоскости. Читатель, интересующийся их строгим введением, может обратиться к той же книге Н.В. Ефимова, мы же просто будем считать, что эти и другие введенные в школьном курсе математики понятия известны читателю.

Предполагаются также известными определение вещественных (действительных) чисел и их основные свойства. (Строгая теория вещественного числа приводится в учебниках математического анализа.) Будет широко использоваться то обстоятельство, что при выбранной единице измерения каждому отрезку можно сопоставить положительное вещественное число, называемое его длиной. *Единицу измерения длин мы будем считать выбранной раз и навсегда* и, говоря о длинах отрезков, не будем указывать, какой единицей они измеряются.

2. Определение вектора. Понятие вектора также известно из школьного курса, но лучше напомнить основные факты, с ним связанные. Пару точек мы называем *упорядоченной*, если про эти точки известно, какая из них первая, а какая — вторая.

Определение 1. Отрезок, концы которого упорядочены, называется *направленным отрезком* или *вектором*. Первый из его концов называется *началом*, второй — *концом* вектора. К векторам относится и *нулевой вектор*, у которого начало и конец совпадают.

Направление вектора на рисунке принято обозначать стрелкой, над буквенным обозначением вектора тоже ставится стрелка, например $\overrightarrow{AB}$ (при этом буква, обозначающая начало, обязательно пишется первой). В книгах буквы, обозначающие векторы, набираются полужирным шрифтом, например $\mathbf{a}$. Нулевой вектор обозначается $\mathbf{0}$.

Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной* (а также *модулем* или *абсолютной величиной*). Длина вектора обозначается $|\mathbf{a}|$ или $|\overrightarrow{AB}|$.

Векторы называются *коллинеарными*, если существует такая прямая, которой они параллельны. Векторы *компланарны*, если существует плоскость, которой они параллельны. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору, так как он не имеет определенного направления. Длина его, разумеется, равна нулю.

Определение 2. Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины.

Из этого определения вытекает, что, выбрав любую точку A', мы можем построить (и притом только один) вектор $|\overrightarrow{A'B'}|$, равный некоторому заданному вектору $|\overrightarrow{AB}|$, или, как говорят, перенести вектор $|\overrightarrow{AB}|$ в точку A'.

3. О другом определении вектора. Понятие равенства векторов существенно отличается от понятия равенства, например, чисел. Каждое число равно только самому себе, иначе говоря, два равных числа при всех обстоятельствах могут рассматриваться как одно и то же число. С векторами дело обстоит по-другому: в силу определения существуют различные, но равные между собой векторы. Хотя в большинстве случаев у нас не будет необходимости различать их между собой, вполне может оказаться, что в какой-то момент нас будет интересовать именно вектор $\overrightarrow{AB}$, а не равный ему вектор $\overrightarrow{A'B'}$.

Для того чтобы упростить понятие равенства и снять некоторые связанные с ним трудности, иногда идут на усложнение определения вектора. Мы не будем пользоваться этим усложненным определением, но сформулируем его. Чтобы не путать, будем писать "Вектор" (с большой буквы) для обозначения определяемого ниже понятия.

Определение 3. Пусть дан направленный отрезок. Множество всех направленных отрезков, равных данному в смысле определения 2, называется *Вектором*.

Таким образом, каждый направленный отрезок определяет Вектор. Легко видеть, что два направленных отрезка определяют один и тот же Вектор тогда и только тогда, когда они равны согласно определению 2. Для Векторов, как и для чисел, равенство означает совпадение.

Из начального курса физики хорошо известно, что сила может быть изображена направленным отрезком. Но она не может быть изображена Вектором, поскольку силы, изображаемые равными направленными отрезками, производят, вообще говоря, различные действия. (Если сила действует на упругое тело, то изображающий ее отрезок не может быть перенесен даже вдоль той прямой, на которой он лежит.)

Это только одна из причин, по которой наряду с Векторами приходится рассматривать и направленные отрезки. При этих обстоятельствах применение определения 3 осложняется большим числом оговорок. Мы будем придерживаться определения 1, причем по общему смыслу всегда будет ясно, идет речь об определенном векторе или на его место может быть подставлен любой, ему равный.

В связи со сказанным стоит разъяснить значение некоторых слов, встречающихся в литературе. Вместо определения 2 можно ввести для векторов другое определение равенства, согласно которому векторы равны, если они равны по длине, лежат на одной прямой и направлены в одну сторону. В этом случае вектор не может быть перенесен в любую точку пространства, а переносится только вдоль прямой, на которой он лежит. При таком понимании равенства векторы называются *скользящими* векторами. В механике сила, действующая на абсолютно твердое тело, изображается скользящим вектором.

Можно для векторов не давать никакого особого определения равенства, т. е. считать, что вектор характеризуется, помимо длины и направления в пространстве, еще и точкой приложения. В этом случае векторы называются *приложенными*. Как уже упоминалось, сила, действующая на упругое тело, изображается приложенным вектором.

Если нужно подчеркнуть, что равенство векторов понимается в смысле определения 2, то векторы называются *свободными*.

4. Линейные операции. Так называются сложение векторов и умножение вектора на число. Напомним их определения.

Определение. Пусть даны два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Построим равные им векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ называется *суммой* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и обозначается $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

Заметим, что, выбрав вместо B другую точку, мы получили бы другой вектор, равный вектору $\overrightarrow{AC}$.

Определение. *Произведением вектора* $\mathbf{a}$ *на вещественное число* α называется вектор $\mathbf{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|\mathbf{b}| = |\alpha||\mathbf{a}|$;

б) $\mathbf{b}$ коллинеарен $\mathbf{a}$;

в) $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ направлены одинаково, если $\alpha > 0$, и противоположно, если $\alpha < 0$.

(Если же $\alpha = 0$, то из первого условия следует $\mathbf{b} = 0$.)

Произведение вектора $\mathbf{a}$ на число α обозначается $\alpha\mathbf{a}$.

Приведенное определение определяет вектор $\alpha\mathbf{a}$ не единственным образом, но все удовлетворяющие ему векторы равны между собой.

В курсе средней школы были выведены основные свойства линейных операций. Перечислим их без доказательства.

Предложение 1. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *и любых чисел* α *и* β *выполнено*:

1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ (*сложение коммутативно*);
2) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (*сложение ассоциативно*);
3) $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$;
4) *вектор* $(-1)\mathbf{a}$ *противоположный для* $\mathbf{a}$: $\mathbf{a}+(-1)\mathbf{a}=\mathbf{0}$;
5) $(\alpha\beta)\mathbf{a}=\alpha(\beta\mathbf{a})$;
6) $(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$;
7) $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$;
8) $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$.

Вектор $(-1)\mathbf{a}$ обозначается $-\mathbf{a}$. *Разностью* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется сумма векторов $\mathbf{a}$ и $-\mathbf{b}$. Она обозначается $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Если $\mathbf{b}+\mathbf{x}=\mathbf{a}$, то $\mathbf{x}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ (рис. 1). В этом смысле *вычитание* — операция, сопоставляющая паре векторов разность первого и второго, — есть операция, обратная сложению, и мы не считаем его отдельной операцией. Точно так же мы не выделяем деление вектора на число α, так как его можно определить как умножение на α^{-1}.

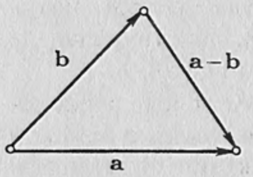

Рис. 1

Из определения произведения вектора на число прямо следует

Предложение 2. *Если* $\mathbf{a}\neq 0$, *то любой вектор* $\mathbf{b}$, *коллинеарный* $\mathbf{a}$, *представи́м в виде* $\mathbf{b}=\pm(|\mathbf{b}|/|\mathbf{a}|)\mathbf{a}$. *Знак + или − берут, смотря по тому, направлены* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *одинаково или нет.*

Применяя линейные операции, можно составлять суммы векторов, умноженных на числа: $\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\ldots+\alpha_k\mathbf{a}_k$. Выражения такого вида называются *линейными комбинациями*. Числа, входящие в линейную комбинацию, называются ее *коэффициентами*. Свойства, перечисленные в предложении 1, позволяют преобразовывать линейные комбинации по обычным правилам алгебры: раскрывать скобки, приводить подобные члены, переносить некоторые члены в другую часть равенства с противоположным знаком и т. д.

Предложение 1 дает в некотором смысле полный набор свойств: любые вычисления, использующие линейные операции, можно производить, основываясь на них и не обращаясь к определениям. Это будет иметь для нас принципиальное значение в гл. VI.

Линейные комбинации обладают следующим очевидным свойством: если векторы $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ коллинеарны, то любая их линейная комбинация им коллинеарна. Если же они компланарны, то любая их линейная комбинация им компланарна. Это сразу следует из того, что вектор $\alpha\mathbf{a}$ коллинеарен $\mathbf{a}$, а сумма векторов компланарна слагаемым и коллинеарна им, если они коллинеарны.

Множество называется *замкнутым* относительно некоторой операции, если для любых элементов множества результат применения этой операции принадлежит данному множеству.

Определение. Множество векторов, замкнутое относительно линейных операций, называется *векторным пространством*. Если одно векторное пространство является подмножеством другого, то оно называется его *подпространством*.

Таким образом, можно сказать, что множество всех векторов, параллельных данной прямой, и множество всех векторов, параллельных данной плоскости, являются векторными пространствами. Чтобы различать эти два типа векторных пространств, их называют соответственно *одномерными* и *двумерными* пространствами.

Помимо упомянутых, существуют еще два векторных пространства: *нулевое* или *нульмерное*, состоящее только из нулевого вектора, и *трехмерное* — множество всех векторов пространства.

Нулевое пространство является подпространством для каждого другого, и каждое векторное пространство является подпространством для трехмерного.

5. Линейная зависимость векторов. Мы будем говорить, что вектор $\mathbf{b}$ *раскладывается* по векторам $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$, если он представим как их линейная комбинация: найдутся такие коэффициенты, что $\mathbf{b}=\beta_1\mathbf{a}_1+\ldots+\beta_k\mathbf{a}_k$. Вполне может случиться, что какой-то вектор раскладывается по данной системе векторов, и при этом коэффициенты разложения определены неоднозначно. Например, если $\mathbf{a}_3=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$, то вектор $\mathbf{b}=-\mathbf{a}_3$ раскладывается так же, как $\mathbf{b}=-\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$ или $\mathbf{b}=\mathbf{a}_3-2\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2$ и т. д. Посмотрим, с чем это связано.

Нулевой вектор раскладывается по любой системе векторов: мы получим нулевой вектор, если возьмем линейную комбинацию этих векторов с нулевыми коэффициентами. Такая линейная комбинация называется *тривиальной*.

Определение. Система векторов $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ называется *линейно независимой*, если нулевой вектор раскладывается по ней единственным образом.

Иначе говоря, система векторов линейно независима, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору, или, подробнее, если из равенства $\alpha_1\mathbf{a}_1+\ldots+\alpha_k\mathbf{a}_k=\mathbf{0}$ следует, что $\alpha_1=\ldots=\alpha_k=0$.

Система векторов $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ *линейно зависима*, если нулевой вектор раскладывается по ней не единственным образом, т. е. если найдутся такие коэффициенты $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, что $\alpha_1\mathbf{a}_1+\ldots+\alpha_k\mathbf{a}_k=\mathbf{0}$, но не все они равны нулю: $\alpha_1^2+\ldots+\alpha_k^2\neq 0$.

Рассмотрим свойства линейно-зависимых и линейно-независимых систем векторов.

• Если среди векторов $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ есть нулевой, то такая система линейно зависима. Действительно, рассмотрим линейную комбинацию, в которую $\mathbf{0}$ входит с коэффициентом 1, а остальные векторы с нулевыми коэффициентами. Эта линейная комбинация нетривиальна и равна нулевому вектору. В частности,

• Система, содержащая один вектор, линейно зависима, если он нулевой.

• Если к линейно зависимой системе $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ добавить какие-то векторы $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s$, то полученная система векторов будет линейно зависимой. В самом деле, к имеющейся равной 0 нетривиальной линейной комбинации векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ можно добавить векторы $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_s$ с нулевыми коэффициентами.

Таким образом,

• Если в системе векторов какая-то часть линейно зависима, то вся система обязательно линейно зависима.

Отсюда от противного следует, что

• Любая часть линейно независимой системы линейно независима.

Предложение 3. *Если вектор* $\mathbf{x}$ *раскладывается по системе векторов* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, *то это разложение единственно тогда и только тогда, когда система векторов линейно независима.*

Действительно, пусть существуют два разложения $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \beta_k\mathbf{a}_k$. Вычитая их почленно одно из другого, мы получим $(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{a}_1 + \ldots + (\alpha_k - \beta_k)\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$. Если векторы линейно независимы, отсюда следует, что $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \ldots, \alpha_k - \beta_k = 0$, т. е. оба разложения совпадают.

Обратно, если векторы линейно зависимы, существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору: $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$. Мы можем прибавить ее к имеющемуся разложению $\mathbf{x} = \beta_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \beta_k\mathbf{a}_k$ и получить новое разложение $\mathbf{x}$ по тем же векторам: $\mathbf{x} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{a}_1 + \ldots + (\alpha_k + \beta_k)\mathbf{a}_k$. Предложение доказано.

Предложение 4. *Система из $k > 1$ векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается по остальным.*

Доказательство. Пусть система векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ линейно зависима, т. е. существуют такие коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$, и, например, α_1 отличен от нуля. В этом случае мы можем разложить $\mathbf{a}_1$ по остальным векторам:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\mathbf{a}_k.$$

Обратно, пусть один из векторов, например, $\mathbf{a}_1$, разложен по остальным векторам: $\mathbf{a}_1 = \beta_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{a}_k$. Это означает, что линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ с коэффициентами $-1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ равна нулевому вектору. Предложение доказано.

Понятие линейной зависимости будет играть большую роль в дальнейшем изложении, но сейчас мы могли бы обойтись без него ввиду простого геометрического смысла, который имеет это понятие.

Теорема 1. *Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда это — нулевой вектор.*

Система из двух векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны.

Система из трех векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда векторы компланарны.

Любые четыре вектора линейно зависимы.

Доказательство 1. Мы уже отмечали, что нулевой вектор составляет линейно зависимую систему. Система, содержащая только ненулевой вектор линейно независима, так как при его умножении на число, отличное от нуля, получится ненулевой вектор.

2. Пусть векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Если $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно зависимы. Пусть $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Тогда по предложению 2 $\mathbf{b}$ раскладывается по $\mathbf{a}$. Таким образом, в любом случае коллинеарные векторы линейно зависимы.

Обратно, из двух линейно зависимых векторов один обязательно раскладывается по другому и, следовательно, ему коллинеарен.

3. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, то они линейно зависимы, и тогда линейно зависимы все три вектора. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны. Разложим $\mathbf{c}$ по ним.

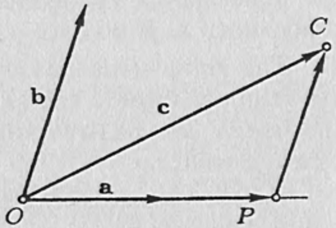

Рис. 2

Для этого поместим начала всех векторов в одну точку O (рис. 2) и проведем через конец C вектора $\mathbf{c}$ прямую, параллельную $\mathbf{b}$, до пересечения в точке P с прямой, на которой лежит $\mathbf{a}$. (Это построение возможно, так как векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны и, в частности, оба ненулевые.) Теперь $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC}$, причем $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{PC}$ коллинеарны соответственно $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. По доказанному выше найдутся числа α и β такие, что $\overrightarrow{OP} = \alpha\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{PC} = \beta\mathbf{b}$. Таким образом, $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Это означает, что $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы.

Обратно, если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ линейно зависимы, то один из них раскладывается по двум другим и, следовательно, им компланарен.

4. Рассмотрим четыре вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$. Если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны, то они линейно зависимы сами по себе и вместе с вектором $\mathbf{d}$. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не компланарны. Аналогично предыдущему докажем, что $\mathbf{d}$ раскладывается по ним. Поместим начала всех векторов в одну точку O (рис. 3) и проведем через конец D вектора $\mathbf{d}$ прямую, параллельную $\mathbf{c}$, до пересечения в точке P с плоскостью, на которой лежат $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Теперь $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PD}$, причем $\overrightarrow{OP}$ компланарен $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а $\overrightarrow{PD}$ коллинеарен $\mathbf{c}$. По доказанному выше $\overrightarrow{OP}$ раскладывается по $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а $\overrightarrow{PD}$ — по $\mathbf{c}$. Значит, $\mathbf{d}$ разложен по $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и составляет с ними линейно зависимую систему. Теорема доказана.

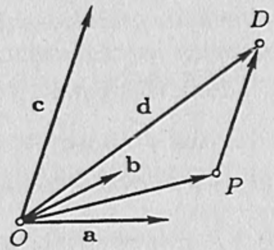

Рис. 3

6. Базис. В конце п. 4 было дано определение векторного пространства. Введем следующее

Определение. *Базисом* в векторном пространстве называется упорядоченная линейно независимая система векторов такая, что любой вектор этого пространства по ней раскладывается.

Из теоремы 1 сразу вытекает, что

- В нулевом пространстве базиса не существует.
- В одномерном пространстве (на прямой линии) базис состоит из одного ненулевого вектора.
- В двумерном пространстве (на плоскости) базис — упорядоченная пара неколлинеарных векторов.
- В трехмерном пространстве базис — упорядоченная тройка некомпланарных векторов.

Требование упорядоченности означает, что, например, в случае плоскости $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$ — два разных базиса.

Так как векторы базиса линейно независимы, коэффициенты разложения по базису для каждого вектора пространства определены однозначно. Они называются *компонентами* или *координатами* вектора в этом базисе.

Таким образом, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — базис трехмерного пространства, то по формуле $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ каждому вектору сопоставлена единственная упорядоченная тройка чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и каждой тройке чисел — единственный вектор. Аналогично, вектор на плоскости имеет две компоненты, а на прямой — одну.

Компоненты пишутся в скобках после буквенного обозначения вектора, например $\mathbf{a}(1, 0, 1)$.

В аналитической геометрии геометрические рассуждения о векторах сводятся к вычислениям, в которых участвуют компоненты этих векторов. Следующее предложение показывает, как производятся линейные операции над векторами, если известны их компоненты.

Предложение 5. *При умножении вектора на число все его компоненты умножаются на это число. При сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.*

Действительно, если $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, то

$$\lambda\mathbf{a} = \lambda(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3) = (\lambda\alpha_1)\mathbf{e}_1 + (\lambda\alpha_2)\mathbf{e}_2 + (\lambda\alpha_3)\mathbf{e}_3.$$

Если $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$, то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3) + (\beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3) = \\ = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\mathbf{e}_3.$$

Для одномерного и двумерного пространств доказательство отличается только числом слагаемых.

Упражнения

1. Докажите, что точка C лежит на отрезке AB тогда и только тогда, когда существует число $\lambda \in [0, 1]$ такое, что для любой точки O выполнено $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB}$. Если λ дано, то в каком отношении точка C делит отрезок AB?

2. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, $|AB| = 2$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AC}$ в базисе $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

3. В некотором базисе на плоскости заданы координаты векторов $\mathbf{a}(1, 2)$, $\mathbf{b}(2, 3)$ и $\mathbf{c}(-1, 1)$. Проверьте, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ линейно независимы, и найдите координаты $\mathbf{c}$ в базисе $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.

4. Даны три точки A, B и C. Найдите такую точку O, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$. Решив аналогичную задачу для четырех точек, докажите, что в треугольной пирамиде отрезки, соединяющие вершины с центрами тяжести противоположных граней, пересекаются в одной точке.

§ 2. Системы координат

1. Декартова система координат. Фиксируем в пространстве точку O и рассмотрим произвольную точку M. *Радиус-вектором* точки M по отношению к точке O называется вектор $\overrightarrow{OM}$. Если в пространстве кроме точки O выбран некоторый базис, то точке M сопоставляется упорядоченная тройка чисел — компоненты ее радиус-вектора.

Определение. *Декартовой системой координат* в пространстве называется совокупность точки и базиса.

Точка носит название *начала координат*. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются *осями координат*; первая — осью *абсцисс*, вторая — осью *ординат*, третья — осью *аппликат*. Плоскости, проходящие через оси координат, называются *координатными плоскостями*.

Определение. Пусть дана декартова система координат O, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Компоненты x, y, z радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ точки M называются *координатами* точки M в данной системе координат:

$$\overrightarrow{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3.$$

Первая координата называется *абсциссой*, вторая — *ординатой*, а третья — *аппликатой*.

Аналогично определяются координаты на плоскости и на прямой линии. Разумеется, точка на плоскости имеет только две координаты, а на прямой линии — одну.

Координаты точки пишут в скобках после буквы, обозначающей точку. Например, запись $A(2, 1/2)$ означает, что точка A имеет координаты 2 и 1/2 в ранее выбранной декартовой системе координат на плоскости (рис. 4).

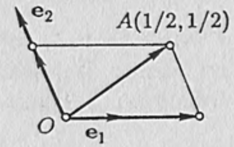

Рис. 4

Координаты точки, как и компоненты вектора, — величины безразмерные. В частности, они не зависят от выбранной единицы измерения длин. В самом деле, раскладывая векторы в теореме 1, мы сводили дело к разложению вектора по коллинеарному с ним ненулевому вектору. А в этом случае компонента равна *отношению* длин, взятому с определенным знаком (предложение 2).

Легко видеть, что при заданной системе координат координаты точки определены однозначно. С другой стороны, если задана система координат, то для каждой упорядоченной тройки чисел найдется единственная точка, имеющая эти числа в качестве координат. Система координат на плоскости определяет такое же соответствие между точками плоскости и парами чисел. Задание системы координат на прямой линии сопоставляет каждой точке вещественное число и каждому числу — точку.

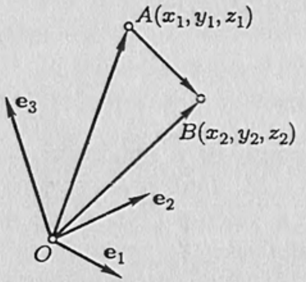

Рис. 5

Рассмотрим две точки A и B, координаты которых относительно некоторой декартовой системы координат O, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ соответственно x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2. Поставим себе задачу найти компоненты вектора $\overrightarrow{AB}$. Очевидно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (рис. 5). Компоненты радиус-векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равны (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) по определению координат. Из предложения 5 §1 следует, что $\overrightarrow{AB}$ имеет компоненты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Этим доказано следующее

Предложение 1. *Чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть координаты его начала.*

2. Деление отрезка в заданном отношении. Найдем координаты точки M на отрезке AB, которая делит этот отрезок в отношении λ/μ, т. е. удовлетворяет условию

$$\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0$$

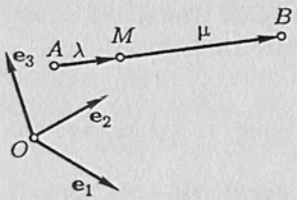

Рис. 6

(рис. 6). Это условие можно переписать в виде

$$\mu\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}. \tag{1}$$

Обозначив через (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) соответственно координаты точек A и B, а через (x, y, z) координаты точки M, разложим обе части равенства по базису, причем компоненты векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ найдем по предложению 1. Тогда

$$\mu(x - x_1) = \lambda(x_2 - x), \quad \mu(y - y_1) = \lambda(y_2 - y), \quad \mu(z - z_1) = \lambda(z_2 - z).$$

Из этих равенств можно найти x, y и z, поскольку $\lambda + \mu \neq 0$:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\lambda + \mu}, \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\lambda + \mu}, \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\lambda + \mu}. \tag{2}$$

Если в формулах (2) мы будем считать одно из чисел λ или μ отрицательным, то из равенства (1) увидим, что M находится на той же прямой вне отрезка AB, деля его в отношении $|\lambda/\mu|$. Поэтому из формул (2) можно найти координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении как внутренним, так и внешним образом.

На плоскости и на прямой линии задача о делении отрезка решается точно так же, только из трех равенств в (2) остается соответственно два и одно равенство.

3. Декартова прямоугольная система координат. Общие декартовы системы координат используются реже, чем специальный класс таких систем — декартовы прямоугольные системы координат.

Определение. Базис называется *ортонормированным*, если его векторы попарно ортогональны и по длине равны единице. Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется *декартовой прямоугольной* системой координат.

Нетрудно проверить, что координаты точки относительно декартовой прямоугольной системы координат в пространстве по абсолютной величине равны расстояниям от этой точки до соответствующих координатных плоскостей. Они имеют знак плюс или минус в зависимости от того, лежит точка по ту же или по другую сторону от плоскости, что и конец базисного вектора, перпендикулярного этой плоскости.

Аналогично находят координаты точки относительно декартовой прямоугольной системы координат на плоскости.

4. Полярная система координат. Декартовы системы координат не единственный способ определять при помощи чисел положение точки на плоскости. Для этого используются многие другие типы координатных систем. Здесь мы опишем некоторые из них.

На плоскости часто употребляется *полярная система координат.* Она определена, если задана точка O, называемая *полюсом*, и исходящий из полюса луч l, который называется *полярной осью.* Положение точки M фиксируется двумя числами: *радиусом* $r = |\overrightarrow{OM}|$ и углом φ между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$. Этот угол называется *полярным углом* (рис. 7).

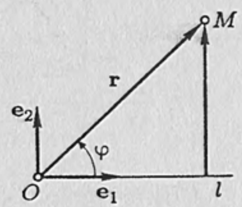

Рис. 7

Мы будем измерять полярный угол в радианах и отсчитывать от полярной оси против часовой стрелки. У полюса $r = 0$, а φ не определено. У остальных точек $r > 0$, а φ определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π. Это означает, что пары чисел (r,φ), $(r,\varphi+2\pi)$ и вообще $(r,\varphi+2k\pi)$, где k — любое целое число, представляют собой полярные координаты одной и той же точки.

Иногда ограничивают изменение полярного угла какими-нибудь условиями, например, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ или $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Это устраняет неоднозначность, но зато вводит другие неудобства.

Пусть задана полярная система координат и упорядоченная пара чисел (r,φ), из которых первое неотрицательно. Мы можем сопоставить этой паре точку, для которой эти числа являются полярными координатами. Именно, если $r=0$, мы сопоставляем полюс. Если же $r>0$, то паре (r,φ) ставим в соответствие точку, радиус-вектор которой имеет длину r и составляет с полярной осью угол φ. При этом парам чисел (r,φ) и (r_1,φ_1) сопоставляется одна и та же точка, если $r=r_1$, а $\varphi-\varphi_1=2\pi k$, где k — целое число.

Выберем на плоскости декартову прямоугольную систему координат, поместив ее начало в полюс O и приняв за базис векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ длины 1, направленные соответственно вдоль полярной оси и под углом $\pi/2$ к ней (угол отсчитывается против часовой стрелки). Как легко видеть из рис. 7, декартовы координаты точки выражаются через ее полярные координаты формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{3}$$

5. Цилиндрические и сферические координаты. В пространстве обобщением полярных систем координат являются цилиндрические и сферические системы координат. И для тех, и для других фигура, относительно которой определяется положение точки, состоит из точки O, луча l, исходящего из O, и вектора $\mathbf{n}$, равного по длине 1 и перпендикулярного к l. Через точку O проведем плоскость Θ, перпендикулярную вектору $\mathbf{n}$. Луч l лежит в этой плоскости.

Пусть дана точка M. Опустим из нее перпендикуляр MM' на плоскость Θ.

Цилиндрические координаты точки M — это три числа r, φ, h. Числа r и φ — полярные координаты точки M' по отношению к полю-

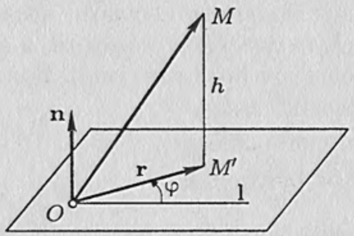

Рис. 8

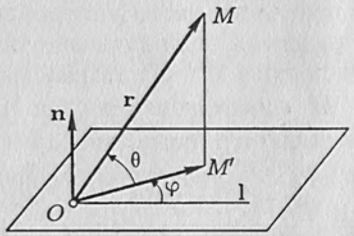

Рис. 9

су O и полярной оси l, а h — компонента вектора $\overrightarrow{M'M}$ по вектору $\mathbf{n}$. Она определена, так как эти векторы коллинеарны (рис. 8).

Сферические координаты точки — три числа (r,φ,θ). Они определяются так: $r=|\overrightarrow{OM}|$. Как и для цилиндрических координат, φ — угол вектора $\overrightarrow{OM'}$ с лучом l, а θ — угол вектора $\overrightarrow{OM}$ с плоскостью Θ (рис. 9).

Упражнения

1. Дан параллелограмм $OABC$. В нем $|\overrightarrow{OA}|=2$, $|\overrightarrow{OC}|=3$, угол AOC равен $\pi/3$. Найдите координаты точки B в системе координат O, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$.

2. Даны три точки $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$.

3. Нарисуйте на плоскости множества точек, полярные координаты которых связаны соотношениями: а) $r=2/\cos\varphi$; б) $r=2\cos\varphi$.

4. Пусть O, l, $\mathbf{n}$ — сферическая система координат. Введем декартову прямоугольную систему координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}$, где $\mathbf{e}_1$ направлен вдоль l, а угол $\pi/2$ от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ отсчитывается в сторону возрастания полярного угла. Напишите формулы, выражающие декартовы координаты через сферические.

§ 3. Замена базиса и системы координат

1. Изменение базиса. До сих пор мы предполагали, что рассматривается один базис. Однако выбор базиса ничем не ограничен, и принципиальное значение имеет задача о нахождении компонент вектора в одном базисе по его компонентам в другом базисе. При этом положение нового базиса относительно старого должно быть задано, а именно должны быть известны компоненты новых базисных векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ и $\mathbf{e}'_3$ в старом базисе $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$. Пусть[1]

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= a_1^1\mathbf{e}_1 + a_1^2\mathbf{e}_2 + a_1^3\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}'_2 &= a_2^1\mathbf{e}_1 + a_2^2\mathbf{e}_2 + a_2^3\mathbf{e}_3,\\ \mathbf{e}'_3 &= a_3^1\mathbf{e}_1 + a_3^2\mathbf{e}_2 + a_3^3\mathbf{e}_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Произвольный вектор $\mathbf{a}$ разложим по базису $\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3$:

$$\mathbf{a} = \alpha'_1\mathbf{e}'_1 + \alpha'_2\mathbf{e}'_2 + \alpha'_3\mathbf{e}'_3.$$

Компоненты этого же вектора в старом базисе обозначим $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. Раскладывая каждый член предыдущего равенства по базису $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$, в силу предложения 5 § 1 имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1^1\alpha'_1 + a_2^1\alpha'_2 + a_3^1\alpha'_3,\\ \alpha_2 &= a_1^2\alpha'_1 + a_2^2\alpha'_2 + a_3^2\alpha'_3,\\ \alpha_3 &= a_1^3\alpha'_1 + a_2^3\alpha'_2 + a_3^3\alpha'_3. \end{aligned} \tag{2}$$

*) Здесь для удобства один из индексов мы располагаем сверху. Это не показатель степени. Например, a_3^1 читается "а один-три".

Соотношения (2) и являются решением нашей задачи. Если нас заинтересует выражение новых компонент через старые, то надо будет решить систему уравнений (2) относительно неизвестных $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$. Результат будет иметь такой же вид, как (2), только коэффициентами будут компоненты старых базисных векторов в новом базисе.

Точно тем же способом получаются формулы, связывающие компоненты вектора в разных базисах на плоскости. Вот они:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_1^1\alpha'_1 + a_2^1\alpha'_2, \\ \alpha_2 &= a_1^2\alpha'_1 + a_2^2\alpha'_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Коэффициенты в формулах (2) можно записать в таблицу:

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Она называется *матрицей перехода* от базиса $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ к базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. В ее столбцах стоят компоненты векторов $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ в старом базисе.

2. Изменение системы координат. Рассмотрим теперь две декартовы системы координат: старую $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и новую $O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Пусть M — произвольная точка, и координаты ее в этих системах обозначены (x, y, z) и (x', y', z'). Поставим себе задачу выразить x, y и z через x', y' и z', считая известным положение новой системы относительно старой. Оно определяется координатами (a_0^1, a_0^2, a_0^3) точки O' в системе координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и компонентами векторов $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, составляющими матрицу перехода (4).

Радиус-векторы точки M относительно точек O и O' связаны равенством $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, которое мы можем записать в виде

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + x'\mathbf{e}'_1 + y'\mathbf{e}'_2 + z'\mathbf{e}'_3, \tag{5}$$

так как x', y' и z' — компоненты $\overrightarrow{O'M}$ в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$. Разложим каждый член равенства (5) по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, имея в виду, что компоненты векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OO'}$ равны координатам точек M и O', которые мы обозначили (x, y, z) и (a_0^1, a_0^2, a_0^3). Мы получим

$$\begin{aligned} x &= a_0^1 + a_1^1 x' + a_2^1 y' + a_3^1 z', \\ y &= a_0^2 + a_1^2 x' + a_2^2 y' + a_3^2 z', \\ z &= a_0^3 + a_1^3 x' + a_2^3 y' + a_3^3 z'. \end{aligned} \tag{6}$$

Равенства (6) представляют собой закон преобразования координат точки при переходе от одной декартовой системы координат в пространстве к другой такой же системе.

3. Замена декартовой прямоугольной системы координат на плоскости. Формулы перехода от одной декартовой системы координат на плоскости к другой получаются из (6), если там оставить

только первые два равенства и в них вычеркнуть члены с z':

$$\begin{aligned} x &= a_1^1 x' + a_2^1 y' + a_0^1, \\ y &= a_1^2 x' + a_2^2 y' + a_0^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим частный случай, когда обе системы координат декартовы прямоугольные. Через φ обозначим угол между векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}'_1$, отсчитываемый в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$. Тогда (рис. 10)

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_2 &= \cos\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{e}_1 + \sin\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

В разложении $\mathbf{e}'_2$ ставится знак плюс, если кратчайший поворот от $\mathbf{e}'_1$ к $\mathbf{e}'_2$ направлен так же, как кратчайший поворот от $\mathbf{e}'_1$ к $\mathbf{e}'_2$, т. е. если новый базис повернут относительно старого на угол φ. Знак

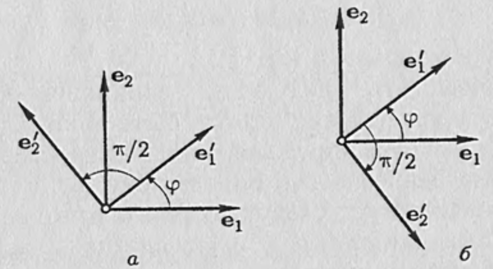

Рис. 10. Два случая взаимного расположения ортонормированных базисов на плоскости

минус в разложении $\mathbf{e}'_2$ ставится в противоположном случае, когда новый базис не может быть получен поворотом старого.

Поскольку $\cos\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\varphi$, $\sin\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\varphi$, получаем

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi \mp y'\sin\varphi + a_0^1, \\ y &= x'\sin\varphi \pm y'\cos\varphi + a_0^2, \end{aligned} \tag{8}$$

причем при повороте системы координат берутся верхние знаки.

Упражнения

1. Выведите формулы замены базиса и замены системы координат на прямой линии. Как меняются координаты точек прямой, если при неизменном начале координат длина базисного вектора увеличивается вдвое?

2. Пусть O' — середина стороны AB треугольника OAB. Напишите формулы перехода от системы координат O, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$ к системе координат O', $\overrightarrow{O'O}$, $\overrightarrow{O'B}$.

3. Дана декартова система координат O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Как расположена относительно нее система координат O', $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, если формулы перехода имеют вид $x = 1 - y' - z'$, $y = 1 - x' - z'$, $z = 1 - x' - y'$.

§ 4. Скалярное, смешанное и векторное произведения

1. Скалярное произведение. Под *углом между векторами* мы понимаем угол между векторами, равными данным и имеющими общее начало. В некоторых случаях мы будем указывать, от какого вектора и в каком направлении угол отсчитывается. Если такого указания не сделано, углом между векторами считается тот из углов, который не превосходит π. Если угол прямой, то векторы называются *ортогональными*.

Определение. *Скалярным произведением* двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хоть один из векторов нулевой, то угол не определен, и скалярное произведение по определению равно нулю.

Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначается $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ или $\mathbf{ab}$. Таким образом, мы можем написать

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Необходимо подчеркнуть следующее принципиальное обстоятельство: скалярное произведение может быть определено только после того, как будет выбрана определенная единица измерения длин векторов. Иначе приведенное выше определение не имеет смысла.

Скалярное умножение имеет следующие очевидные свойства.

- Коммутативность: для любых $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выполнено $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$.
- $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$ для любого вектора $\mathbf{a}$.
- Скалярное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда сомножители ортогональны или хотя бы один из них равен 0.
- Векторы ортонормированного базиса удовлетворяют равенствам

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = 1,$$
$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) = 0.$$

Предложение 1. *Если базисные векторы попарно ортогональны, то компоненты любого вектора* $\mathbf{a}$ *находятся по формулам*

$$\alpha_1 = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e}_1)}{|\mathbf{e}_1|^2}, \quad \alpha_2 = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)}{|\mathbf{e}_2|^2}, \quad \alpha_3 = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{e}_3|^2}.$$

В частности, если базис ортонормированный,

$$\alpha_1 = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_1), \quad \alpha_2 = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_2), \quad \alpha_3 = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_3) \quad (1)$$

и

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{a}, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3.$$

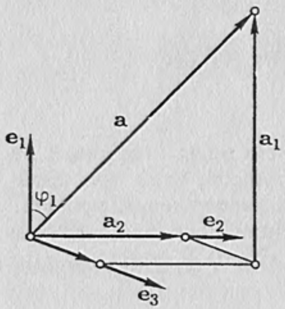

Рис. 11

Доказательство. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, причем каждое слагаемое коллинеарно соответствующему базисному вектору. Мы знаем из предложения 2 § 1, что $\alpha_1 = \pm|\mathbf{a}_1|/|\mathbf{e}_1|$, где выбирается знак + или − в зависимости от того, одинаково или противоположно направлены $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{e}_1$. Но, как видно из рис. 11, $\pm|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}| \cos\varphi_1$, где φ_1 — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{e}_1$. Итак, $\alpha_1 = |\mathbf{a}| \cos\varphi_1/|\mathbf{e}_1| = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_1)/|\mathbf{e}_1|^2$.

Аналогично вычисляются и остальные компоненты.

Определение. Косинусы углов между вектором $\mathbf{a}$ и базисными векторами декартовой прямоугольной системы координат называются *направляющими косинусами* этого вектора.

Направляющие косинусы — это компоненты вектора $\mathbf{a}^0 = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$. Их отличительная особенность состоит в том, что сумма их квадратов равна квадрату длины $\mathbf{a}^0$, т. е. 1 (см. ниже формулу (3)).

Предложение 2. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *и любых чисел* α *и* β *выполнено равенство*

$$(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

В частности, $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ *и* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Доказательство. Если $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, то утверждение очевидно. Пусть $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Примем $\mathbf{c}$ за первый вектор базиса, а остальные выберем ортогонально к нему и между собой. Число $(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c})/|\mathbf{c}|^2$ — первая компонента вектора $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Точно так же $(\mathbf{a}, \mathbf{c})/|\mathbf{c}|^2$ и $(\mathbf{b}, \mathbf{c})/|\mathbf{c}|^2$ — первые компоненты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Согласно предложению 5 § 1

$$(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \mathbf{c})/|\mathbf{c}|^2 = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{c})/|\mathbf{c}|^2 + \beta(\mathbf{b}, \mathbf{c})/|\mathbf{c}|^2.$$

Отсюда прямо получается доказываемое равенство.

Легко показать, что такая же формула справедлива и для линейной комбинации любого числа векторов. Используя коммутативность скалярного умножения, мы получаем тождество

$$(\mathbf{a}, \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

Теорема 1. *Если базис ортонормированный, то скалярное произведение векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *выражается через их компоненты* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *и* $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *по формуле*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3. \quad (2)$$

Действительно, подставим вместо $\mathbf{a}$ его разложение и воспользуемся предложением 2:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3, \mathbf{b}) = \alpha_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{b}) + \alpha_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{b}) + \alpha_3(\mathbf{e}_3, \mathbf{b}).$$

Теперь доказываемое следует из формулы (1).

Отметим, что требование ортонормированности базиса очень существенно. В произвольном базисе выражение скалярного произведения через компоненты гораздо сложнее. Поэтому в задачах, связанных со скалярным произведением, чаще всего используются ортонормированные базисы.

Если почему-либо все же надо вычислить скалярное произведение в неортонормированном базисе, следует перемножить разложения сомножителей по базису и, раскрыв скобки, подставить в полученное выражение известные скалярные произведения базисных векторов.

Теорема 1 позволяет выписать выражение длины вектора через его компоненты в ортонормированном базисе

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}, \tag{3}$$

а также выражение косинуса угла между векторами

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}. \tag{4}$$

Используя формулу (3), мы можем вычислить расстояние между точками, если заданы их координаты в декартовой прямоугольной системе координат. В самом деле, пусть точки A и B имеют координаты (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1). Тогда расстояние между ними равно

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}. \tag{5}$$

Скалярное умножение тесно связано с понятием проекции вектора. Слово "проекция" употребляется в двух смыслах. Введем соответствующие определения.

Пусть задан вектор $\overrightarrow{AB}$ и некоторая прямая l. Опустим из точек A и B перпендикуляры на прямую и обозначим их основания A' и B' (рис. 12). Вектор $\overrightarrow{A'B'}$ называется (ортогональной) *векторной проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на прямую l и обозначается $\text{Пр}_l\overrightarrow{AB}$.

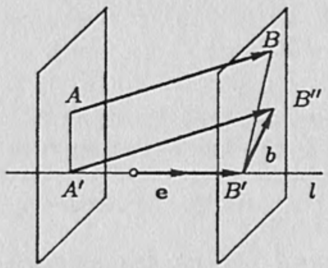

Рис. 12

Из определения сразу следует, что векторные проекции равных векторов на параллельные прямые равны между собой.

Пусть $\mathbf{e}$ — ненулевой вектор на прямой l. Тогда $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\mathbf{e}$ при некотором α. Представим $\overrightarrow{AB}$ в виде $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B''} = \alpha\mathbf{e} + \mathbf{b}$ и заметим, что вектор $\mathbf{b} = \overrightarrow{B'B''}$ ортогонален $\mathbf{e}$. Поэтому после скалярного умножения на $\mathbf{e}$ получаем $(\overrightarrow{AB}, \mathbf{e}) = \alpha(\mathbf{e}, \mathbf{e})$. Находя отсюда α, имеем

$$\text{Пр}_l\overrightarrow{AB} = \frac{(\overrightarrow{AB}, \mathbf{e})}{|\mathbf{e}|^2}\,\mathbf{e}. \tag{6}$$

Хотя на вид это выражение зависит от $\mathbf{e}$, фактически оно не меняется при замене $\mathbf{e}$ любым ненулевым вектором $\lambda\mathbf{e}$, коллинеарным $\mathbf{e}$.

Проекцию $\overrightarrow{A'B'}$ можно представить в виде

$$\frac{(\overrightarrow{AB}, \mathbf{e})}{|\mathbf{e}|}\,\frac{\mathbf{e}}{|\mathbf{e}|}$$

и заметить, что $(\overrightarrow{AB}, \mathbf{e})/|\mathbf{e}|$ — это компонента $\overrightarrow{A'B'}$ по вектору $\mathbf{e}^0 = \mathbf{e}/|\mathbf{e}|$. Так как $|\mathbf{e}^0| = 1$, компонента по абсолютной величине равна

длине $\overrightarrow{A'B'}$. Она положительна, если направление $\overrightarrow{A'B'}$ совпадает с направлением $\mathbf{e}$, и отрицательна в противоположном случае.

Величина $(\overrightarrow{AB}, \mathbf{e})/|\mathbf{e}|$ не меняется при замене $\mathbf{e}$ на сонаправленный вектор $\lambda\mathbf{e}$, $\lambda > 0$, и меняет знак при замене $\mathbf{e}$ на противоположно направленный вектор.

Прямая линия называется *направленной прямой* (употребляются также термины *ориентированная прямая* и *ось*), если на ней указано определенное направление. Подробнее это определение рассматривается в начале п. 2.

Определение. Число $(\overrightarrow{AB}, \mathbf{e})/|\mathbf{e}|$ называется *скалярной проекцией* вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l, определяемую вектором $\mathbf{e}$ (или на вектор $\mathbf{e}$), и обозначается $\text{Пр}_l\overrightarrow{AB}$ или $\text{Пр}_{\mathbf{e}}\overrightarrow{AB}$.

Из определения следует, что $\text{Пр}_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, где φ — угол между $\overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{e}$. Компоненты вектора в ортонормированном базисе равны его скалярным проекциям на оси координат.

2. Ориентация прямой, плоскости и пространства. Выше мы дали определение ориентированной прямой (оси). Скажем о нем подробнее, с тем чтобы аналогично ввести определение ориентированной плоскости и ориентированного пространства.

Все базисы (ненулевые векторы) на прямой разделяются на два класса: векторы из одного класса направлены одинаково, а векторы из разных классов направлены противоположно. Говорится, что прямая *ориентирована* или что на ней *задана ориентация*, если из двух классов базисов выбран один. Базисы выбранного класса называются *положительно ориентированными* или *положительными*.

Задать ориентацию можно, указав какой-либо базис и считая положительно ориентированными все базисы того же класса. Однако то, что прямая ориентирована, не означает, что на ней выбран какой-то определенный базис.

Два базиса на плоскости называются *одинаково ориентированными*, если в обоих базисах кратчайший поворот от первого вектора ко

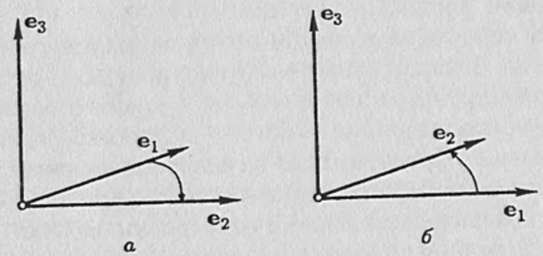

Рис. 13. Левый базис (*а*), правый базис (*б*)

второму производится в одну сторону, и *противоположно ориентированными* в противном случае. На рис. 10, *а* базисы ориентированы одинаково, а на рис. 10, *б* — противоположно. Если фиксировать какой-то базис, то любой другой ориентирован с ним либо одинаково, либо противоположно, и, таким образом, все базисы распадаются на два класса: любые два базиса одного класса ориентированы одинаково, базисы разных классов ориентированы противоположно.

Определение. *Плоскость ориентирована*, если из двух классов базисов на ней выбран один класс.

Ориентацию можно задать, выбрав базис и считая положительно ориентированными все базисы одного с ним класса. Но, конечно, задание ориентации не предполагает выбор определенного базиса.

В планиметрии часто ориентируют плоскость, считая положительными те базисы, у которых кратчайший поворот от первого вектора ко второму производится против часовой стрелки. Для плоскости в пространстве это соглашение не имеет смысла, так как видимое направление поворота зависит от того, с какой стороны смотреть на плоскость. Но если выбрать одно из полупространств, ограничиваемых плоскостью, и смотреть на повороты именно из него, то класс базиса определяется видимым направлением поворота.

Определение. Базис в пространстве называется *правым*, если (считая векторы имеющими общее начало) с конца третьего вектора мы видим кратчайший поворот от первого вектора ко второму

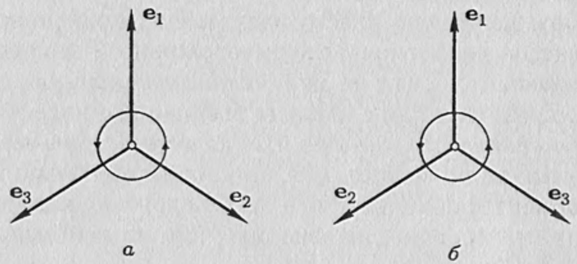

Рис. 14. Левый базис (*а*), правый базис (*б*)

направленным против часовой стрелки. В противном случае базис называется *левым* (рис. 13).

Представим себе, что на рис. 14 концы векторов лежат в плоскости рисунка, а их общее начало — за плоскостью. Тогда поворот от вектора $\mathbf{e}_1$ к вектору $\mathbf{e}_2$ и затем к $\mathbf{e}_3$ для правого базиса нам виден против часовой стрелки, а для левого — по часовой стрелке.

Определение. Пространство называется *ориентированным*, если из двух классов базисов (правых или левых) выбран один. Базисы этого класса называются *положительно ориентированными*.

Ниже мы *всегда будем выбирать правую ориентацию пространства*, считая положительными правые базисы. Но важно помнить, что выбор ориентации мог бы быть противоположным.

Если пространство ориентировано, то ориентацию любой плоскости в нем можно задать, указав ориентацию прямой, перпендикулярной этой плоскости. При этом положительным базисом $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ на плоскости считается такой, который вместе с положительным базисом $\mathbf{n}$ на прямой составляет положительный базис пространства $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n}$. Это — внешний способ задания ориентации. Говорится, что *ориентация плоскости определяется нормальным вектором* $\mathbf{n}$.

Аналогично, в ориентированном пространстве можно внешним образом задать ориентацию прямой линии. Для этого нужно задать ориентацию плоскости, перпендикулярной этой прямой. Положительным базисом на прямой будет такой базис, который вместе с положительным базисом плоскости составляет положительный базис пространства.

3. Площадь ориентированного параллелограмма, объем ориентированного параллелепипеда. Если прямая ориентирована, то длине ненулевого вектора на ней можно приписать знак: считать длину положительной, если вектор ориентирован положительно, и отрицательной в противоположном случае. Именно так мы приписываем знак длине векторной проекции, когда определяем скалярную проекцию. Обобщим это определение.

Рассмотрим параллелограмм, построенный на двух векторах так, что две его смежные стороны являются векторами с общим началом. Параллелограмм называется *ориентированным*, если пара векторов, на которой он построен, упорядочена. На ориентированной плоскости параллелограмм считается положительно или отрицательно ориентированным, смотря по тому, как ориентирована определяющая его пара векторов.

На ориентированной плоскости принято считать *площадь ориентированного параллелограмма* числом со знаком: она равна площади параллелограмма (положительна), если параллелограмм ориентирован положительно, и равна той же площади со знаком минус, если отрицательно. Мы будем обозначать площадь ориентированного параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, через $S_\pm(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Рассмотрим теперь параллелепипед, построенный на трех векторах так, что три его ребра, исходящие из одной вершины, являются векторами с общим началом. Параллелепипед называется *ориентированным*, если эти три ребра упорядочены. В ориентированном пространстве ориентация параллелепипеда положительна или отрицательна смотря по тому, какую тройку образуют векторы, на которых он построен.

В ориентированном пространстве *объем ориентированного параллелепипеда* — число со знаком: объем положительно ориентированного параллелепипеда считается положительным, а отрицательно ориентированного — отрицательным.

При выбранной нами правой ориентации пространства положительными считаются объемы ориентированных параллелепипедов, построенных на правых тройках векторов.

4. Смешанное произведение. Если пространство ориентировано, мы можем ввести

Определение. *Смешанным произведением* векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ (в данном порядке) называется число, равное объему ориентированного параллелепипеда, построенного на этих векторах, если они не компланарны, и равное нулю, если компланарны.

Смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ обозначается $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

При перестановке сомножителей в смешанном произведении, самое большее, может измениться только ориентация тройки векторов. Поэтому абсолютная величина смешанного произведения не зависит от порядка сомножителей. Для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ мы получаем, сравнивая ориентации троек векторов (см. рис. 14),

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}). \quad (7)$$

Следующее предложение устанавливает связь между скалярным произведением и смешанным произведением.

Предложение 3. *Каковы бы ни были векторы* $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$, *найдется единственный* (*не зависящий от* $\mathbf{a}$) *вектор* $\mathbf{d}$ *такой, что при любом* $\mathbf{a}$ *выполнено равенство*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{d}). \quad (8)$$

Доказательство Докажем сначала существование вектора $\mathbf{d}$, а потом установим, что такой вектор возможен только один. Пусть векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ коллинеарны. Тогда при любом $\mathbf{a}$ векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$. Поэтому мы можем положить $\mathbf{d} = \mathbf{0}$. Рассмотрим неколлинеарные векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и предположим сначала, что $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не компланарны. Построим на них ориентированный параллелепипед и примем за его основание параллелограмм, построенный на $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ (рис. 15). Введем ориентацию на прямой OH, перпендикулярной основанию. Мы зададим ее с помощью вектора $\mathbf{n}$ длины 1, составляющего с $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ правую тройку $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. (Тройка $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{n}$ также правая.)

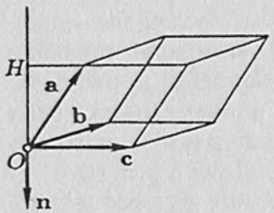

Рис. 15. Здесь тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ левая

$(\mathbf{a}, \mathbf{n})$ — скалярная проекция вектора $\mathbf{a}$ на $\mathbf{n}$. По модулю она равна высоте параллелепипеда OH, а знак ее определяется ориентацией тройки $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Действительно, $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) > 0$ тогда и только тогда, когда концы векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$ лежат в одном полупространстве, т. е. тройка $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ правая так же, как $\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Таким образом, $(\mathbf{a}, \mathbf{n})$ положительно для правой тройки $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и отрицательно для левой.

Пусть положительное число S — площадь основания параллелепипеда. Тогда произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{n})S$ по модулю равно объему параллелепипеда, а знак его совпадает со знаком $(\mathbf{a}, \mathbf{n})$. Это значит, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = S(\mathbf{a}, \mathbf{n})$. Полученное равенство совпадает с (8), если

$$\mathbf{d} = S\mathbf{n}. \quad (9)$$

Осталось рассмотреть случай, когда $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не коллинеарны, а $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны. В этом случае $\mathbf{a}$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и, следовательно, ортогонален вектору $\mathbf{d}$, вычисленному по формуле (9). Поскольку $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = 0$, вектор (9) удовлетворяет равенству (8) и в этом случае. Итак, мы нашли вектор, который удовлетворяет (8) при любом $\mathbf{a}$ и определяется только по $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Допустим, что для фиксированных $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ нашлось два вектора $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$ таких, что для любого $\mathbf{a}$ выполнено $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{d}_1)$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{d}_2)$. Отсюда следует, что $(\mathbf{a}, \mathbf{d}_1) = (\mathbf{a}, \mathbf{d}_2)$ или $(\mathbf{a}, \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2) = 0$. Поэтому вектор $\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2$ ортогонален каждому вектору пространства и, следовательно, равен нулевому вектору. Это доказывает, что вектор $\mathbf{d}$, определяемый формулой (8), может быть только один. Предложение полностью доказано.

Опишем еще раз, как вектор $\mathbf{d}$ определяется по $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

1. Если $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ коллинеарны, то $\mathbf{d} = \mathbf{0}$.
2. Если $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не коллинеарны, то:

а) $|\mathbf{d}| = S = |\mathbf{b}||\mathbf{c}| \sin\varphi$, где φ — угол между $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$;

б) вектор $\mathbf{d}$ ортогонален векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$;

в) тройка векторов $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ имеет положительную ориентацию.

При нашем выборе ориентации пространства — это правая тройка.

Определение. Вектор $\mathbf{d}$, определенный перечисленными выше условиями, или, что то же, формулой (8), называется *векторным произведением* векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Подчеркнем, что векторное произведение, как и смешанное, определено только для ориентированного пространства. Разумеется, необходим также выбор единицы измерения длин.

Векторное произведение векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ обозначают $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ или $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Используя это обозначение, мы можем записать формулу (8) в виде

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]). \quad (10)$$

Благодаря этому равенству смешанное произведение и получило свое название.

Пример 1. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — правый ортонормированный базис. Тогда при выбранной нами правой ориентации пространства

$$[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1, \quad [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2, \quad [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3. \quad (11)$$

Если $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ — левый ортонормированный базис, то

$$[\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3] = -\mathbf{f}_1, \quad [\mathbf{f}_3, \mathbf{f}_1] = -\mathbf{f}_2, \quad [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2] = -\mathbf{f}_3.$$

Предложение 4. *Векторное умножение антикоммутативно, т. е. для любых векторов* $[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{b}]$.

Действительно, если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{d})$, то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, (-\mathbf{d})).$$

Получим теперь свойство *линейности* смешанного и векторного произведений по каждому из сомножителей. Применяя предложение 2 к скалярному произведению $(\lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2, [\mathbf{b},\mathbf{c}])$, мы получим

$$(\lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}). \tag{12}$$

Из равенств (7) следуют аналогичные тождества для остальных сомножителей. Например, для второго сомножителя

$$(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}_1 + \mu\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}). \tag{13}$$

Действительно, мы можем переставить интересующий нас сомножитель на первое место, раскрыть скобки, а затем выполнить обратную перестановку.

Предложение 5. *Для любых векторов* $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ *и* $\mathbf{c}$ *и любых чисел* λ *и* μ *имеет место равенство*

$$[\lambda\mathbf{b}_1 + \mu\mathbf{b}_2, \mathbf{c}] = \lambda[\mathbf{b}_1, \mathbf{c}] + \mu[\mathbf{b}_2, \mathbf{c}].$$

В самом деле, правой части формулы (13) можно придать вид

$$(\mathbf{a}, \lambda[\mathbf{b}_1, \mathbf{c}]) + (\mathbf{a}, \mu[\mathbf{b}_2, \mathbf{c}]).$$

Поэтому по предложению 2 получаем

$$(\mathbf{a}, [\lambda\mathbf{b}_1 + \mu\mathbf{b}_2, \mathbf{c}]) = (\mathbf{a}, \lambda[\mathbf{b}_1, \mathbf{c}] + \mu[\mathbf{b}_2, \mathbf{c}]).$$

Так как это верно для любого вектора $\mathbf{a}$, мы можем, выбрав ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, подставить на место $\mathbf{a}$ последовательно каждый вектор этого базиса. В силу предложения 1 мы получим равенство всех компонент векторов $[\lambda\mathbf{b}_1 + \mu\mathbf{b}_2, \mathbf{c}]$ и $\lambda[\mathbf{b}_1, \mathbf{c}] + \mu[\mathbf{b}_2, \mathbf{c}]$, а отсюда и равенство векторов, которое нам нужно было доказать.

Линейность векторного произведения по второму сомножителю можно получить из свойства антикоммутативности.

5. Выражение векторного и смешанного произведения через компоненты сомножителей. Если заданы разложения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по векторам некоторого базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, то мы можем раскрыть скобки:

$$\begin{aligned}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= [(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3), (\beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3)] = \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + \\ &\quad + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь использовалась антикоммутативность векторного умножения и то, что векторное произведение двух одинаковых сомножителей — нулевой вектор. В примере 1 были сосчитаны попарные векторные произведения векторов ортонормированного базиса. Поэтому из формулы (14) следует

Теорема 2. *В положительно ориентированном ортонормированном базисе векторное произведение выражается через компоненты сомножителей формулой*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\mathbf{e}_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\mathbf{e}_3. \tag{15}$$

Если базис ориентирован отрицательно, перед правой частью этой формулы следует поставить знак минус.

Избежать постоянной заботы об ориентации базисов можно двумя способами. Можно договориться при правой ориентации пространства, если не оговорено противное, использовать только правые базисы. Такого соглашения мы и будем придерживаться.

Второй способ состоит в том, чтобы не фиксировать заранее ориентацию пространства, а выбирать ее так, чтобы используемый базис был ориентирован положительно. При таком подходе векторное произведение всегда вычисляется по формуле (15), но приходится следить за тем, как векторное произведение направлено. Этот подход принят, например, в литературе по физике.

Теорема 3. *Смешанное произведение векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *выражается через их компоненты* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ и $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ *в произвольном базисе* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ *по формуле* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2)(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Для доказательства заметим, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}])$ и умножим скалярно обе части равенства (14) на вектор $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$. Мы получим

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \gamma_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)(\mathbf{e}_1, [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]) + \\ + \gamma_2(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)(\mathbf{e}_2, [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]) + \gamma_3(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\mathbf{e}_3, [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]).\end{aligned}$$

(Слагаемые, содержащие смешанные произведения с одинаковыми сомножителями, мы не выписываем, так как они равны нулю.) Отсюда, учитывая равенства (7) и приводя подобные члены, получаем нужный нам результат.

6. Детерминанты второго и третьего порядков. Найденные нами формулы достаточно громоздки. Для их более компактной записи употребляются детерминанты (или определители) второго и третьего порядков.

Рассмотрим четыре числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Из них можно составить таблицу, называемую *матрицей второго порядка*:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{matrix} \right\|.$$

Число $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ называется детерминантом этой матрицы или *детерминантом второго порядка* и обозначается

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Теперь выражение векторного произведения в правом ортонормированном базисе перепишется так:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}\mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix}\mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}\mathbf{e}_3.$$

Из компонент трех векторов можно составить таблицу — *матрицу* *третьего порядка*

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{matrix} \right\|.$$

Число

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_3 & \beta_1 \\ \gamma_3 & \gamma_1 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

или, что то же самое,

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

называется детерминантом этой матрицы или *детерминантом третьего порядка* и обозначается

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

По теореме 3 в новых обозначениях

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3). \tag{16}$$

В частности, в правом ортонормированном базисе

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \tag{17}$$

При помощи теоремы 2 и определения детерминанта можно получить следующее выражение векторного произведения через компоненты сомножителей в правом ортонормированном базисе:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Детерминанты тесно связаны с системами линейных уравнений, решения которых удобно записывать с их помощью. Этим мы займемся в гл. V, а сейчас дадим только геометрическую иллюстрацию.

Пусть дана система из трех уравнений

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned}$$

Выберем в пространстве некоторый базис и рассмотрим векторы $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$ и $\mathbf{d}(d_1, d_2, d_3)$. Тогда система является координатной записью векторного равенства

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{d}. \tag{19}$$

Поэтому решение системы x, y, z — коэффициенты разложения $\mathbf{d}$ по $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Мы можем быть уверены, что система имеет единственное решение, если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не компланарны, т. е. $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \neq 0$. Предположим, что это условие выполнено, и найдем решение. Для этого умножим обе части равенства (19) скалярно на векторное произведение $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Мы получим $x(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$, и, следовательно, x равен отношению детерминантов

$$\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Аналогично находятся и остальные неизвестные.

Остановимся на следующих свойствах детерминантов. Из равенств (7) следует, что детерминант меняет знак при перестановке каких-либо двух строк матрицы. Формула (12) означает, что

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1' + \mu a_1'' & \lambda a_2' + \mu a_2'' & \lambda a_3' + \mu a_3'' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_1'' & a_2'' & a_3'' \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

7. Условия коллинеарности и компланарности. Начнем со следующего полезного предложения.

Предложение 6. *Каков бы ни был базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, попарные векторные произведения базисных векторов линейно независимы.*

Докажем это от противного. Рассмотрим равенство

$$\lambda[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] + \mu[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] + \nu[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = 0$$

и допустим, что какой-нибудь коэффициент, пусть для определенности λ, отличен от нуля. Умножив обе части равенства скалярно на $\mathbf{e}_1$, мы получим $\lambda(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$. Полученное противоречие доказывает наше предложение.

Следующие предложения дают условия на компоненты векторов в произвольном базисе, необходимые и достаточные для компланарности или коллинеарности векторов.

Предложение 7. *Равенство нулю детерминанта матрицы из компонент трех векторов необходимо и достаточно для компланарности векторов.*

Это сразу следует из формулы (16), поскольку $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \neq 0$.

Предложение 8. *Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — компоненты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в некотором базисе. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 \\ \beta_3 & \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Достаточность условия очевидна: из равенств (20) по формуле (14) следует обращение в нуль $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, что равносильно коллинеарности векторов. Заметим, что мы пользуемся формулой (14), которая справедлива для произвольного базиса. Наоборот, из обращения в нуль $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ и формулы (14) мы можем вывести (20), так как в силу предложения 6 векторы $[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1]$ и $[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]$ линейно независимы.

В планиметрии признак коллинеарности двух векторов дает

Предложение 9. *Обращение в нуль детерминанта матрицы из компонент двух векторов на плоскости необходимо и достаточно для коллинеарности этих векторов.*

Для доказательства будем считать, что плоскость помещена в пространство и базис в этой плоскости дополнен третьим вектором до базиса в пространстве. Тогда векторы $\mathbf{a}(\alpha_1,\alpha_2)$ и $\mathbf{b}(\beta_1,\beta_2)$ на плоскости имеют компоненты $(\alpha_1,\alpha_2,0)$ и $(\beta_1,\beta_2,0)$ относительно базиса в пространстве. Применяя предложение 8, получаем условие

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Остальные два детерминанта равны нулю, так как $\alpha_3=\beta_3=0$.

8. Площадь параллелограмма. Если в пространстве заданы два неколлинеарных вектора, имеющих общее начало, то площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, может быть найдена через их компоненты в ортонормированном базисе по формуле

$$S = |[\mathbf{a},\mathbf{b}]| = \sqrt{(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)^2+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)^2+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2}. \tag{21}$$

Еще одно выражение для площади параллелограмма мы получим, если заметим, что

$$|[\mathbf{a},\mathbf{b}]|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\varphi = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1-\cos^2\varphi).$$

В результате

$$S^2 = \begin{vmatrix} |\mathbf{a}|^2 & (\mathbf{a},\mathbf{b}) \\ (\mathbf{a},\mathbf{b}) & |\mathbf{b}|^2 \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Найдем теперь площадь ориентированного параллелограмма на ориентированной плоскости. Можно считать, что ориентация плоскости определена вектором $\mathbf{n}$, перпендикулярным плоскости и составляющим правую тройку с положительным базисом на плоскости. Более того, будем предполагать, что $|\mathbf{n}|=1$.

Пусть дан ориентированный параллелограмм, построенный на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Рассмотрим скалярную проекцию $\text{Пр}_{\mathbf{n}}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. Так как $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ и $\mathbf{n}$ коллинеарны, проекция по модулю равна $|[\mathbf{a},\mathbf{b}]|$, т. е. площади параллелограмма. Она положительна, если $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ и $\mathbf{n}$ сонаправлены, и отрицательна в противном случае. Но вектор $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ сонаправлен с $\mathbf{n}$, если пара векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ на плоскости ориентирована положительно. Поэтому $\text{Пр}_{\mathbf{n}}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ равна площади ориентированного параллелограмма, построенного на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. По определению проекции

$$S_{\pm}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{n},\mathbf{a},\mathbf{b})$$

(напомним, что $|\mathbf{n}|=1$). На плоскости выберем произвольный (не обязательно положительный) базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Примем $\mathbf{n}$ за третий базисный вектор и выразим смешанное произведение через координаты сомножителей:

$$S_{\pm}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix} (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{n}).$$

Вычисляя детерминант, находим, что он равен $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$, и получаем окончательное выражение

$$S_{\pm}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} S_{\pm}(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2). \tag{23}$$

Эта формула сходна с формулой (16). По существу это та же формула, написанная для двумерного пространства. Если $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — положительный ортонормированный базис, то

$$S_{\pm}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1. \tag{24}$$

Для площади неориентированного параллелограмма в ортонормированном базисе мы получаем формулу

$$S = |\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1|, \tag{25}$$

которая следует и из (21).

9. Двойное векторное произведение. Выражение $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]$ называется *двойным векторным произведением.* Докажем, что

$$[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = (\mathbf{a},\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{c}. \tag{26}$$

С этой целью выберем правый ортонормированный базис $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ так, чтобы $\mathbf{e}_1$ был коллинеарен $\mathbf{b}$, а $\mathbf{e}_2$ был компланарен $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Тогда $\mathbf{b}=\beta\mathbf{e}_1$, $\mathbf{c}=\gamma_1\mathbf{e}_1+\gamma_2\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3$. Отсюда получаем $[\mathbf{b},\mathbf{c}]=\beta\gamma_2\mathbf{e}_3$ и

$$[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = -\alpha_1\beta\gamma_2\mathbf{e}_2+\alpha_2\beta\gamma_2\mathbf{e}_1.$$

С другой стороны,

$$(\mathbf{a},\mathbf{c})\mathbf{b} = (\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2)\beta\mathbf{e}_1, \quad (\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{c} = \alpha_1\beta(\gamma_1\mathbf{e}_1+\gamma_2\mathbf{e}_2).$$

Разность правых частей двух последних равенств совпадает с найденным выше двойным векторным произведением. Это заканчивает доказательство.

10. Биортогональный базис. Дадим следующее

Определение. Базис, составленный из векторов

$$\mathbf{e}_1^* = \frac{[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}_2^* = \frac{[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)}, \quad \mathbf{e}_3^* = \frac{[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)},$$

называется *взаимным* или *биортогональным* для базиса $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$.

Из предложения 6 вытекает, что $\mathbf{e}_1^*,\mathbf{e}_2^*,\mathbf{e}_3^*$ не компланарны и действительно образуют базис. Название “биортогональный” связано с тем, что векторы обоих базисов, имеющие разные номера, ортогональны: $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^*) = 0$ при $i \neq j$. Кроме того, $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i^*) = 1$ для всех i.

Нетрудно проверить, что ортонормированный базис совпадает со своим взаимным.

Предложение 10. *Если $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ — базис, взаимный с $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, то произвольный вектор $\mathbf{a}$ раскладывается по этим базисам так:*

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_1^*)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{a}, \mathbf{e}_2^*)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{a}, \mathbf{e}_3^*)\mathbf{e}_3, \tag{27}$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1^* + (\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2^* + (\mathbf{a}, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3^*. \tag{28}$$

Чтобы доказать (27), умножим равенство $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ скалярно сначала на $\mathbf{e}_1^*$, затем на $\mathbf{e}_2^*$ и на $\mathbf{e}_3^*$. Мы получим $\alpha_1 = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_1^*)$, $\alpha_2 = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_2^*)$, $\alpha_3 = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_3^*)$. Аналогично доказывается равенство (28).

Предложение 11. *Если $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ — базис, взаимный с $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, то базис $\mathbf{e}_1^{**}, \mathbf{e}_2^{**}, \mathbf{e}_3^{**}$, взаимный с $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$, совпадает с $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.*

Действительно, равенство (28), написанное для базиса $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$, имеет вид

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_1^*)\,\mathbf{e}_1^{**} + (\mathbf{a}, \mathbf{e}_2^*)\,\mathbf{e}_2^{**} + (\mathbf{a}, \mathbf{e}_3^*)\,\mathbf{e}_3^{**}.$$

Подставляя сюда вместо $\mathbf{a}$ последовательно $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ и учитывая, что $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j^*) = 0$ при $i \neq j$, а $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i^*) = 1$, получаем $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^{**}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2^{**}$ и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^{**}$.

Числа $(\mathbf{a}, \mathbf{e}_1)$, $(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2)$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{e}_3)$ однозначно определяют вектор $\mathbf{a}$ с помощью векторов базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Они называются *ковариантными* координатами вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. По отношению к базису $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ — это обычные координаты вектора. Обычные координаты, чтобы подчеркнуть их отличие от ковариантных координат, называют *контрвариантными* координатами.

11. О векторных величинах. В приложениях математики часто рассматриваются величины, изображаемые векторами: силы, скорости, моменты сил и т. д. Векторам, изображающим такие величины, приписывается размерность. Не вдаваясь в существо дела, мы ограничимся изложением формальных правил действий с размерностями.

С формальной точки зрения, размерность — это одночлен, составленный из какого-то набора символов. Такие одночлены перемножаются и делятся, как обычные одночлены. Имеют место следующие правила действий с векторными величинами.

• Модуль векторной величины имеет ту же размерность, что и сама величина.

• Складывать векторные величины можно только в том случае, когда их размерности совпадают. При этом размерность суммы та же, что и у слагаемых.

• При умножении векторной величины на скалярную их размерности перемножаются.

• Скалярное, векторное и смешанное произведения имеют размерность, равную произведению размерностей сомножителей. Это легко следует из первого правила, определений скалярного и векторного произведений и формулы (10).

Для того чтобы изобразить векторную величину на чертеже, мы должны условиться о масштабе: сколькими единицами длины (например, см) мы будем изображать одну единицу данной размерности (например, км, м/с, Н).

Если в векторном произведении сомножители имеют размерность длины, то произведение имеет размерность площади. Масштаб для изображения единиц площади выбирается так, чтобы одна единица площади изображалась одной линейной единицей. При этом длина векторного произведения будет численно равна площади параллелограмма, построенного на сомножителях.

Поскольку единица длины у нас выбрана и не меняется, указанное соглашение ни к каким противоречиям привести не может. Однако оно не так безобидно, как может показаться. Именно, два математика, пользующиеся этим соглашением, но разными единицами длины (например, француз, пользующийся сантиметрами, и англичанин — дюймами), для одних и тех же векторов нарисуют несовпадающие векторные произведения. Как связаны длины этих произведений, если дюйм равен примерно 2,5 см?

Упражнения

1. Пусть в некотором базисе скалярное произведение вычисляется по формуле (2). Докажите, что базис ортонормированный.

2. Используя свойства скалярного умножения, докажите, что высоты произвольного треугольника пересекаются в одной точке.

3. Найдите сумму векторных проекций вектора $\mathbf{a}$ на стороны заданного правильного треугольника.

4. Построены векторы, перпендикулярные граням произвольного тетраэдра, равные по длине площадям этих граней и направленные в стороны вершин, противоположных граням. Докажите, что сумма этих векторов равна $\mathbf{0}$.

5. Дан трехгранный угол. Используя свойства векторного произведения, найдите выражение какого-либо из его двугранных углов через плоские углы.

6. Пусть дан положительный базис на ориентированной плоскости такой, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$ и $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 2$. Найдите площадь ориентированного параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}(1, 2)$ и $\mathbf{b}(2, 1)$.

7. При каком условии на матрицу перехода от одного базиса к другому оба базиса ориентированы одинаково? Вопрос поставлен как для плоскости, так и для пространства.

8. Какова размерность векторов взаимного базиса $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$, если векторы базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ измеряются в сантиметрах?

ГЛАВА II

ПРЯМЫЕ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ

§ 1. Общее понятие об уравнениях

1. Определения. Начнем с простого примера. Пусть в пространстве задана декартова прямоугольная система координат. Рассмотрим сферу радиуса r, центр которой находится в точке P с координатами (a, b, c). Сфера — множество всех точек, отстоящих от центра на одно и то же расстояние r. Обозначим через (x, y, z) координаты некоторой точки M и выразим через них равенство $|\overrightarrow{PM}| = r$:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r. \tag{1}$$

Возводя в квадрат обе части равенства, мы придадим ему более удобную форму

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2. \tag{2}$$

Очевидно, что это равенство выполнено для всех точек сферы и только для них, и, следовательно, его можно рассматривать как запись определения сферы при помощи координат. Равенство (2) называется *уравнением сферы* в рассматриваемой системе координат.

Приведем пример из геометрии на плоскости. *Графиком* функции f называется линия L, состоящая из точек, координаты которых связаны соотношением $y = f(x)$. Если нас интересует в первую очередь линия, а не функция, мы можем встать на другую точку зрения и считать, что соотношение $y = f(x)$ есть уравнение линии L.

Вообще, под *уравнением множества* S в некоторой системе координат следует понимать выражение определения множества S через координаты его точек, т. е. высказывание, верное для координат всех точек множества и неверное для координат точек, ему не принадлежащих.

Чаще всего уравнение представляет собой равенство, записанное математическими символами, но это вовсе не обязательно: оно может быть словесным описанием, перечислением и т. д. Например, высказывание "обе координаты точки — рациональные числа" мы будем считать уравнением соответствующего множества в какой-либо заранее выбранной системе координат. Это должно звучать естественно для читателя, знакомого со способами задания функций.

Часто уравнению множества точек в планиметрии можно придать вид $F(x, y) = 0$, а в стереометрии — вид $F(x, y, z) = 0$, где F — функция соответственно двух или трех переменных. Уравнение сферы (2)

имеет такой вид, если не замечать то несущественное обстоятельство, что член r^2 написан в другой части равенства.

Может случиться, что уравнение какого-либо множества удобнее записать в виде неравенства. Например, шар, ограниченный сферой с уравнением (2), имеет уравнение

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant r^2.$$

Однако напрасно было бы надеяться разделить множества на такие, которые задаются равенствами, и такие, которые задаются неравенствами. Действительно, равенство

$$\Phi(x, y, z) = F(x, y, z) - |F(x, y, z)| = 0$$

задает то же множество, что и неравенство $F(x, y, z) \geqslant 0$.

Следует подчеркнуть зависимость уравнения от системы координат. При изменении системы координат меняются координаты точки, а потому уравнения одного и того же множества в разных системах координат, вообще говоря, различны.

Обучаясь математике, мы знакомимся с логическими и математическими правилами, по которым из одного верного высказывания можно получить другое верное высказывание. Строгое изучение этих правил относится к специальной науке — математической логике. Мы же, формулируя приведенные ниже предложения, просто будем считать, что такие правила известны. Естественно поэтому, что о доказательстве этих предложений не может быть речи.

• Если P_S и P_T — уравнения множеств S и T, то уравнение пересечения $S \cap T$ есть высказывание, состоящее в том, что P_S и P_T верны одновременно. Такое высказывание обозначается $P_S \wedge P_T$.

В случае, когда P_S и P_T — равенства, содержащие координаты точки, $F_S(x, y, z) = 0$ и $F_T(x, y, z) = 0$, уравнение пересечения есть система уравнений

$$F_S(x, y, z) = 0, \quad F_T(x, y, z) = 0.$$

• Если P_S и P_T — уравнения множеств S и T, то уравнение объединения $S \cup T$ — высказывание, состоящее в том, что из P_S и P_T верно хотя бы одно. Такое высказывание обозначается $P_S \vee P_T$.

• В случае, когда P_S и P_T — равенства, содержащие координаты точки, $F_S(x, y, z) = 0$ и $F_T(x, y, z) = 0$, уравнение объединения можно написать в виде

$$F_S(x, y, z) F_T(x, y, z) = 0.$$

• Если P_S и P_T — уравнения множеств S и T и S есть подмножество T, то из P_S следует P_T.

• Множества S и T совпадают тогда и только тогда, когда их уравнения эквивалентны, т. е. из P_S следует P_T, а из P_T следует P_S.

Проиллюстрируем два последних утверждения. Уравнения (1) и (2) эквивалентны. Переходя от (2) к (1), мы можем не ставить двойного знака перед корнем, так как $r \geqslant 0$. Наоборот, уравнение

$$z - c = \sqrt{r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} \tag{3}$$

не эквивалентно уравнению (2). Действительно, хотя возведением в квадрат можно получить (2) из (3), при извлечении корня из (2) мы получаем

$$z - c = \pm\sqrt{r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}.$$

Это означает, что равенство (2) выполнено не только для точек, удовлетворяющих (3), но и для точек, удовлетворяющих уравнению

$$z - c = -\sqrt{r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}. \tag{4}$$

Уравнение (2) следует также и из (4). Таким образом, уравнения (3) и (4) определяют части сферы — "верхнюю" и "нижнюю" полусферы.

Иногда два последних утверждения считают определениями отношений "следует" и "эквивалентно" для уравнений.

2. Алгебраические линии и поверхности. Изучение произвольных множеств точек — задача совершенно необъятная. В этом пункте мы определим сравнительно узкий класс множеств, все еще чересчур широкий для того, чтобы быть подробно изученным.

Определение. *Алгебраической поверхностью* называется множество точек, которое в какой-нибудь декартовой системе координат может быть задано уравнением вида

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} z^{m_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} z^{m_s} = 0, \tag{5}$$

где все показатели степени — целые неотрицательные числа. Наибольшая из сумм[1] $k_1 + l_1 + m_1, \ldots, k_s + l_s + m_s$ называется *степенью уравнения*, а также *порядком алгебраической поверхности.*

Это определение означает, в частности, что сфера, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид (2), является алгебраической поверхностью второго порядка.

Определение. *Алгебраической линией на плоскости* называется множество точек плоскости, которое в какой-нибудь декартовой системе координат может быть задано уравнением вида

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} + \ldots + A_s x^{k_s} y^{l_s} = 0, \tag{6}$$

где все показатели степени — целые неотрицательные числа. Наибольшая из сумм $k_1 + l_1, \ldots, k_s + l_s$ называется *степенью уравнения*, а также *порядком алгебраической линии.*

Легко видеть, что алгебраическая поверхность не обязательно является поверхностью в том смысле, который мы интуитивно придаем

*) Разумеется, здесь имеется в виду наибольшая из сумм, фактически входящих в уравнение, т. е. предполагается, что после приведения подобных членов найдется хотя бы одно слагаемое с ненулевым коэффициентом, имеющее такую сумму показателей. Это же замечание относится и к определению порядка алгебраической линии, приводимому ниже.

этому слову. Например, уравнению $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не удовлетворяют координаты ни одной точки, уравнение

$$(x^2 + y^2 + z^2)[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] = 0$$

определяет две точки, уравнение $y^2 + z^2 = 0$ определяет линию (ось абсцисс). Такое же замечание надо сделать и об алгебраических линиях. Читатель сам сможет найти соответствующие примеры.

Приведенные определения имеют существенный недостаток. Именно, не известно, какой вид имеет уравнение поверхности в какой-нибудь другой декартовой системе координат. Если же уравнение и имеет в другой системе координат уравнение вида (5), то порядок какого из этих уравнений мы будем называть порядком поверхности? Те же вопросы возникают и об алгебраических линиях. Ответом служат следующие теоремы.

Теорема 1. *Алгебраическая поверхность порядка p в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида* (5) *порядка p.*

Теорема 2. *Алгебраическая линия порядка p на плоскости в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида* (6) *порядка p.*

Обе теоремы доказываются одинаково. Докажем, например, теорему 2. Для этого перейдем от системы координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, о которой шла речь в определении, к произвольной новой системе координат $O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$. Старые координаты x, y связаны с новыми координатами x', y' формулами (7) § 3 гл. I:

$$x = a_1^1 x' + a_2^1 y' + a_0^1, \quad x = a_1^2 x' + a_2^2 y' + a_0^2. \tag{7}$$

Чтобы получить уравнение линии в новой системе координат, подставим в ее уравнение $F(x, y) = 0$ выражения x и y через x' и y'. При умножении многочленов их степени складываются. Поэтому $(a_1^1 x' + a_2^1 y' + a_0^1)^k$ — многочлен степени k относительно x' и y', а $(a_1^2 x' + a_2^2 y' + a_0^2)^l$ — многочлен степени l. Таким образом, каждый одночлен вида $Ax^k y^l$ есть многочлен степени $k + l$ относительно x' и y'. Степень суммы многочленов не выше максимальной из степеней слагаемых. (Она окажется ниже, если члены с максимальными степенями уничтожатся.)

Итак, мы доказали пока, что алгебраическая линия в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением $G(x', y') = 0$ вида (6), причем степень многочлена $G(x', y')$ не больше степени многочлена $F(x, y)$, т. е. степень уравнения не повышается. Нам осталось доказать, что степень уравнения не может и понизиться, а потому не меняется при переходе к другой системе координат.

Это легко доказать от противного. Действительно,

$$G(x', y') = F(a_1^1 x' + a_2^1 y' + a_0^1,\ a_1^2 x' + a_2^2 y' + a_0^2).$$

Поэтому, если мы подставим в $G(x', y')$ выражения x' и y' через x и y, полученные решением уравнений (7), мы получим многочлен $F(x,y)$. Если бы степень G была меньше степени F, это означало бы, что при переходе от системы координат $O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ к системе $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ степень уравнения повысилась, чего, как мы видели, быть не может.

Порядок алгебраической линии — первый встретившийся нам пример инварианта. Вообще, *инвариантом* называют всякую величину, не меняющуюся при изменении системы координат. Только инвариантные комбинации величин (коэффициентов, показателей и т. д.), входящих в уравнение линии или поверхности, характеризуют ее геометрические свойства, не зависящие от ее расположения относительно системы координат. Какой геометрический смысл имеет порядок линии, мы увидим в конце главы.

Замечание. Свойство неизменности порядка не относится к различным уравнениям, которые линия или поверхность могут иметь в одной и той же системе координат. Хотя такие уравнения и эквивалентны, среди них могут быть уравнения различных степеней и даже не получаемые приравниванием многочлена нулю. Действительно, следующие три уравнения задают окружность радиуса 1 в декартовой прямоугольной системе координат:

$$\sqrt{x^2+y^2}=1, \quad x^2+y^2-1=0, \quad (x^2+y^2-1)^2=0.$$

Принято считать, что эквивалентные уравнения вида (6), имеющие разные степени, задают разные алгебраические линии (хотя соответствующие множества точек и совпадают). Например, говорят, что последнее из приведенных выше уравнений задает "сдвоенную окружность". Основания для такой терминологии и удобства, из нее вытекающие, в точности те же, что и в случае привычного читателю термина "кратный корень" квадратного уравнения.

Теперь мы можем указать основной предмет курса аналитической геометрии. Это — исследование линий и поверхностей первого и второго порядка, которые доступны для изучения средствами элементарной алгебры.

Однако перед этим полезно рассмотреть некоторые более общие уравнения. Мы будем говорить о линиях и поверхностях. Формулирование их общих определений не входит в нашу задачу. Читатель, который любит, чтобы все было точно определено, может под ними понимать соответственно алгебраическую линию и поверхность, однако все результаты имеют место и в более общем случае.

3. Уравнения, не содержащие одной из координат. Рассмотрим частный случай уравнения поверхности $F(x,y,z)=0$, когда левая часть уравнения не зависит от одной из переменных, например, от z, и уравнение имеет вид $F(x,y)=0$. Пусть точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ лежит на поверхности. Тогда все точки с координатами x_0, y_0, z при любых z также лежат на поверхности. Легко заметить, что все точки с координатами такого вида заполняют прямую, проходящую через M_0 в

направлении вектора $\mathbf{e}_3$. Таким образом, вместе со всякой точкой M_0 на поверхности лежит прямая, проходящая через M_0 в направлении вектора $\mathbf{e}_3$.

Определение. Поверхность, которая состоит из прямых линий, параллельных заданному направлению, называется *цилиндрической поверхностью* или *цилиндром*, а прямые линии — ее *образующими* (рис. 16). Линию, лежащую на поверхности и пересекающую все образующие, называют *направляющей*.

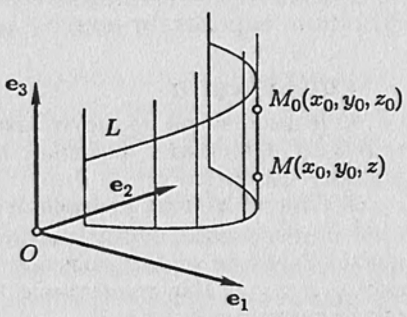

Рис. 16. L — направляющая, M_0M — образующая

Мы показали, что уравнение, не содержащее одной из координат, определяет цилиндр с образующими, параллельными соответствующей координатной оси.

В качестве примера рекомендуем читателю нарисовать поверхность, заданную уравнением $x^2 + y^2 = r^2$ в декартовой прямоугольной системе координат в пространстве. Эта поверхность — *прямой круговой цилиндр*. Еще один вопрос, над которым стоит подумать: как выглядят множества, уравнения которых не содержат двух из трех координат, т. е. имеют, например, вид $F(x)=0$?

4. Однородные уравнения. Конусы. Пусть $F(x,y,z)$ — функция от трех переменных, а s — натуральное число. Введем

Определение. Допустим, что для каждой тройки чисел (x,y,z) из области определения функции и для каждого числа λ тройка чисел $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ также принадлежит области определения, и, кроме того, $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^s F(x,y,z)$. Тогда F называется *однородной функцией степени* s.

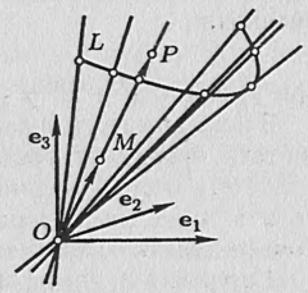

Рис. 17. L — направляющая, MP — образующая

Рассмотрим поверхность, определяемую в некоторой декартовой системе координат уравнением $F(x,y,z) = 0$, где F — однородная функция. Если точка M с координатами (x,y,z) принадлежит поверхности, то при любом λ точка $P(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ также принадлежит поверхности. Радиус-векторы точек M и P коллинеарны, и потому точка P лежит на прямой OM (рис. 17).

Определение. Поверхность, которая состоит из прямых линий, проходящих через фиксированную точку, называется *конической по-*

верхностью или *конусом*. Прямые линии называются ее *образующими*, а точка — *вершиной* конуса (рис. 17). Линию, лежащую на поверхности, не проходящую через вершину и пересекающую все образующие, называют *направляющей*.

Мы доказали, что уравнение $F(x, y, z) = 0$, где F — однородная функция, определяет конус с вершиной в начале координат.

Упражнения

1. В декартовой прямоугольной системе координат даны точки $A(1, 0)$ и $B(4, 0)$. Напишите уравнение множества точек, отстоящих от B вдвое дальше, чем от A.

2. Каждое из двух уравнений системы $(x-2)^2 + y^2 = r^2$, $(x+2)^2 + y^2 = r^2$ в декартовой прямоугольной системе координат определяет окружность. Вычитая одно уравнение из другого, мы получим следствие этой системы $x = 0$. Как геометрически истолковать этот результат? Рассмотрите случаи $r = 3$ и $r = 1$.

3. Составьте уравнение цилиндра с направляющей, заданной системой уравнений $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 1$, и образующей, параллельной вектору $\mathbf{e}_3$.

4. Напишите уравнение конуса с направляющей, заданной системой уравнений $x^2 + y^2 = 4$, $z = 1$, и с вершиной в начале координат.

§ 2. Уравнения прямых и плоскостей

1. Поверхности и линии первого порядка. Уравнение первой степени, или линейное уравнение, связывающее координаты точки в пространстве, имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

причем предполагается, что коэффициенты при переменных не равны нулю одновременно, т. е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Аналогично, линейное уравнение, связывающее координаты точки на плоскости, — это уравнение

$$Ax + By + C = 0 \tag{2}$$

при условии $A^2 + B^2 \neq 0$.

В школьном курсе доказывается, что в декартовой прямоугольной системе координат уравнения (1) и (2) определяют соответственно плоскость и прямую линию на плоскости. Из теорем 1 и 2 § 1 следует, что то же самое верно и в общей декартовой системе координат. Точнее, имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *В общей декартовой системе координат в пространстве каждая плоскость может быть задана линейным уравнением* (1). *Обратно, каждое линейное уравнение в общей декартовой системе координат определяет плоскость.*

Теорема 2. *В общей декартовой системе координат на плоскости каждая прямая может быть задана линейным уравнением* (2). *Обратно, каждое линейное уравнение в общей декартовой системе координат на плоскости определяет прямую.*

Эти теоремы полностью решают вопрос об уравнениях плоскости и прямой линии на плоскости. Однако ввиду важности этих уравнений мы рассмотрим их в других формах. При этом будут получены независимые доказательства теорем этого пункта.

2. Параметрические уравнения прямой и плоскости. Прямая линия (на плоскости или в пространстве) полностью определена, если на ней задана точка M_0 и задан ненулевой вектор $\mathbf{a}$, параллельный этой прямой. Разумеется, и точку, и вектор можно выбрать по-разному, но мы будем считать, что они как-то выбраны, и называть их *начальной точкой* и *направляющим вектором*. Аналогично, плоскость задается точкой и двумя неколлинеарными векторами, ей параллельными, — *начальной точкой* и *направляющими векторами плоскости*.

Мы будем предполагать, что задана декартова система координат в пространстве (или на плоскости, если мы изучаем прямую в планиметрии). Это, в частности, означает, что каждой точке сопоставлен ее радиус-вектор относительно начала координат.

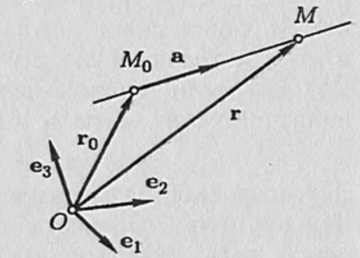

Рис. 18

Пусть дана прямая. Обозначим через $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$ соответственно радиус-вектор ее начальной точки M_0 и направляющий вектор. Рассмотрим некоторую точку M с радиус-вектором $\mathbf{r}$ (рис. 18). Вектор $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, начало которого лежит на прямой, параллелен прямой тогда и только тогда, когда M также лежит на прямой. В этом и только этом случае для точки M найдется такое число t, что

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a}. \tag{3}$$

Наоборот, какое бы число мы ни подставили в формулу (3) в качестве t, вектор $\mathbf{r}$ в этой формуле определит некоторую точку на прямой.

Уравнение (3) называется *векторным параметрическим* уравнением прямой, а переменная величина t, принимающая любые вещественные значения, называется *параметром*.

Векторное параметрическое уравнение выглядит одинаково и в планиметрии, и в стереометрии, но при разложении по базису оно сводится к двум или трем скалярным уравнениям, смотря по тому, сколько векторов составляют базис.

Рассмотрим прямую в пространстве. Пусть (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0) — координаты точек M и M_0, соответственно, а вектор $\mathbf{a}$ имеет компоненты (a_1, a_2, a_3). Тогда, раскладывая по базису обе части уравнения (3), мы получим

$$x - x_0 = a_1 t, \quad y - y_0 = a_2 t, \quad z - z_0 = a_3 t. \tag{4}$$

Для прямой на плоскости мы получаем, аналогично,

$$x - x_0 = a_1 t, \quad y - y_0 = a_2 t. \tag{5}$$

Уравнения (4) или (5) называются *параметрическими уравнениями прямой*.

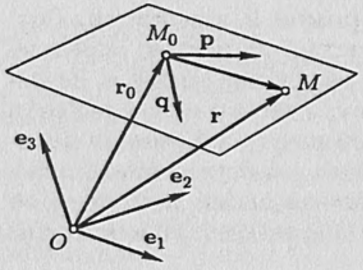

Рис. 19

Получим теперь параметрические уравнения плоскости. Обозначим через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ ее направляющие векторы, а через $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор ее начальной точки M_0. Пусть точка M с радиус-вектором $\mathbf{r}$ — произвольная точка пространства (рис. 19). Вектор $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, начало которого лежит на плоскости, параллелен ей тогда и только тогда, когда его конец M также лежит на плоскости. Так как $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ не коллинеарны, в этом и только этом случае $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ может быть по ним разложен. Поэтому, если точка M лежит в плоскости (и только в этом случае), найдутся такие числа t_1 и t_2, что

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t_1\mathbf{p} + t_2\mathbf{q}. \tag{6}$$

Это уравнение называется *параметрическим уравнением* плоскости. Каждой точке плоскости оно сопоставляет значения двух параметров t_1 и t_2. Наоборот, какие бы числа мы ни подставили как значения t_1 и t_2, уравнение (6) определит некоторую точку плоскости.

Пусть (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0) — координаты точек M и M_0 соответственно, а векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ имеют компоненты (p_1, p_2, p_3) и (q_1, q_2, q_3). Тогда, раскладывая по базису обе части уравнения (6), мы получим *параметрические уравнения плоскости*

$$x - x_0 = t_1 p_1 + t_2 q_1, \quad y - y_0 = t_1 p_2 + t_2 q_2, \quad z - z_0 = t_1 p_3 + t_2 q_3. \tag{7}$$

Отметим, что начальная точка и направляющий вектор прямой образуют на ней ее *внутреннюю декартову систему координат*. Значение параметра t, соответствующее какой-то точке, является координатой этой точки во внутренней системе координат. Точно так же на плоскости начальная точка и направляющие векторы составляют *внутреннюю систему координат*, а значения параметров, соответствующие точке, — это ее координаты в этой системе.

3. Прямая линия на плоскости. Параметрическое уравнение прямой утверждает, что точка M лежит на прямой тогда и только тогда, когда разность ее радиус-вектора и радиус-вектора начальной точки M_0 коллинеарна направляющему вектору $\mathbf{a}$. Пусть в некоторой общей декартовой системе координат на плоскости заданы координаты точек и вектора $M(x, y)$, $M_0(x_0, y_0)$, $\mathbf{a}(a_1, a_2)$. Тогда условие

коллинеарности может быть записано в виде равенства

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Поэтому имеет место

Предложение 1. *В любой декартовой системе координат на плоскости уравнение прямой с начальной точкой $M_0(x_0, y_0)$ и направляющим вектором $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ может быть записано в виде* (8).

Уравнение (8) линейное. Действительно, после преобразования оно принимает вид $a_2 x - a_1 y + (a_1 y_0 - a_2 x_0) = 0$, т. е. $Ax + By + C = 0$, где $A = a_2$, $B = -a_1$ и $C = a_1 y_0 - a_2 x_0$.

С другой стороны, при заданной системе координат для произвольного линейного многочлена $Ax + By + C$, $A^2 + B^2 \neq 0$, найдутся такая точка $M_0(x_0, y_0)$ и такой вектор $\mathbf{a}(a_1, a_2)$, что

$$Ax + By + C = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Действительно, выберем числа x_0 и y_0 так, чтобы $Ax_0 + By_0 + C = 0$. В качестве таких чисел можно взять, например,

$$x_0 = \frac{-AC}{A^2 + B^2}, \quad y_0 = \frac{-BC}{A^2 + B^2}. \tag{10}$$

Если $C = -Ax_0 - By_0$, то $Ax + By + C = A(x - x_0) + B(y - y_0)$, т. е. выполнено равенство (9) при $a_2 = A$, $a_1 = -B$. Итак, мы получили

Предложение 2. *Вектор с координатами $(-B, A)$ можно принять за направляющий вектор прямой с уравнением* (2) *в общей декартовой системе координат, а точку* (10) *за начальную точку.*

Следствие. *Если система координат декартова прямоугольная, то вектор $\mathbf{n}(A, B)$ перпендикулярен прямой с уравнением* (1).

Действительно, в этом случае $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = -BA + AB = 0$.

Заметим, что из предложений 1 и 2 вытекает теорема 2.

Пусть в уравнении прямой $Ax + By + C = 0$ коэффициент B отличен от нуля. Это означает, что отлична от нуля первая компонента направляющего вектора, и прямая не параллельна оси ординат. В этом случае уравнение прямой можно представить в виде

$$y = kx + b, \tag{11}$$

где $k = -A/B$, а $b = -C/B$. Мы видим, что k равно отношению компонент направляющего вектора: $k = a_2/a_1$ (рис. 20).

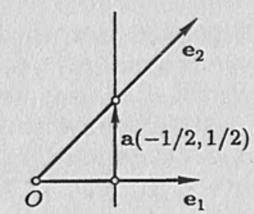

Рис. 20. $k = -1$. Прямая $y = -x + 1/2$

Определение. Отношение компонент направляющего вектора a_2/a_1 называется *угловым коэффициентом* прямой.

Угловой коэффициент прямой в декартовой прямоугольной системе координат равен тангенсу угла, который прямая образует с осью абсцисс. Угол этот отсчитывается от оси абсцисс в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ (рис. 21).

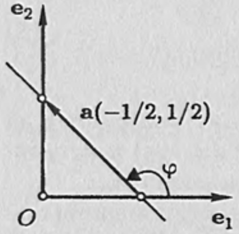

Рис. 21. $k = \operatorname{tg}\varphi = -1$. Прямая $y = -x + 1/2$

Положив $x = 0$ в уравнении (11), получаем $y = b$. Это означает, что свободный член уравнения b является ординатой точки пересечения прямой с осью ординат.

Если же в уравнении прямой $B = 0$ и ее уравнение нельзя представить в виде (11), то обязательно $A \neq 0$. В этом случае прямая параллельна оси ординат и ее уравнению можно придать вид $x = x_0$, где $x_0 = -C/A$ — абсцисса точки пересечения прямой с осью абсцисс.

4. Векторные уравнения плоскости и прямой. Параметрическое уравнение плоскости утверждает, что точка M лежит на плоскости тогда и только тогда, когда разность ее радиус-вектора и радиус-вектора начальной точки M_0 компланарна направляющим векторам $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Эту компланарность можно выразить и равенством

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0. \tag{12}$$

Вектор $\mathbf{n} = [\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ — ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости. Используя его, мы можем записать уравнение (12) в виде

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0. \tag{13}$$

Уравнения (12) и (13) называют *векторными уравнениями плоскости*. Им можно придать форму, в которую не входит радиус-вектор начальной точки. Например, положив в (13) $D = -(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$, получим

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0. \tag{14}$$

Для прямой на плоскости можно также написать *векторные уравнения*, аналогичные (13) и (14),

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0 \quad \text{или} \quad (\mathbf{r}, \mathbf{n}) + C = 0.$$

Первое из них выражает тот факт, что вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ перпендикулярен ненулевому вектору $\mathbf{n}$, перпендикулярному направляющему вектору $\mathbf{a}$, и потому коллинеарен $\mathbf{a}$.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть x, y, z — компоненты вектора $\mathbf{r}$ в общей декартовой системе координат. Тогда скалярное произведение $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})$ при $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ записывается линейным многочленом $Ax + By + Cz + D$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$.*

Обратно, для любого линейного многочлена найдутся такие векторы $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, что в заданной общей декартовой системе координат $Ax + By + Cz + D = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})$.

Первая часть предложения очевидна: подставим разложение вектора $\mathbf{r}$ по базису в данное скалярное произведение:

$$(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 - \mathbf{r}_0,\ \mathbf{n}),$$

раскроем скобки и получим многочлен $Ax + By + Cz + D$, в котором $D = -(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$ и

$$A = (\mathbf{e}_1, \mathbf{n}), \quad B = (\mathbf{e}_2, \mathbf{n}), \quad C = (\mathbf{e}_3, \mathbf{n}). \tag{15}$$

A, B и C одновременно не равны нулю, так как ненулевой вектор $\mathbf{n}$ не может быть ортогонален всем векторам базиса.

Для доказательства обратного утверждения найдем сначала вектор $\mathbf{n}$ из равенств (15), считая A, B и C заданными. Из предложения 10 § 4 гл. I следует, что

$$\mathbf{n} = \frac{A[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} + \frac{B[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)} + \frac{C[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}. \tag{16}$$

Вектор $\mathbf{r}_0$ должен удовлетворять условию $D = -(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$. Один из таких векторов можно найти в виде $\mathbf{r}_0 = \lambda\mathbf{n}$. Подставляя, видим, что $-\lambda(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = D$, откуда $\mathbf{r}_0 = -D\mathbf{n}/|\mathbf{n}|^2$.

Итак, мы нашли векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{r}_0$ такие, что линейный многочлен записывается в виде

$$x(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) + y(\mathbf{e}_2, \mathbf{n}) + z(\mathbf{e}_3, \mathbf{n}) - (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}),$$

который совпадает с требуемым $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})$.

Заметим, что из доказанного предложения вытекает теорема 1.

П р е д л о ж е н и е 4. *Если система координат декартова прямоугольная, то вектор с компонентами A, B, C является нормальным вектором для плоскости с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.*

Это сразу вытекает из формул (15) и предложения 1 § 4 гл. I.

Рассмотрим вектор $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_1\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ в общей декартовой системе координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Очевидно, что $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = \alpha_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) + \alpha_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{n}) + \alpha_3(\mathbf{e}_3, \mathbf{n})$. Теперь из формул (15) следует, что

$$(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3.$$

(Заметьте, что в общей декартовой системе координат числа A, B, C, вообще говоря, *не являются* координатами вектора $\mathbf{n}$, и скалярное произведение *не записывается* как сумма произведений одноименных компонент, но $(\mathbf{a}, \mathbf{n})$ выглядит так же, как и в прямоугольных координатах.) Теперь очевидным становится следующее

П р е д л о ж е н и е 5. *Вектор $\mathbf{a}$ с компонентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в общей декартовой системе координат параллелен плоскости с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ тогда и только тогда, когда*

$$A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0. \tag{17}$$

С л е д с т в и е. *Любые два неколлинеарных вектора, удовлетворяющие уравнению* (17), *можно принять за направляющие векторы плоскости.*

Предложение 5 нетрудно доказать и непосредственно, рассматривая координаты вектора, параллельного плоскости, как разности соответствующих координат двух точек, лежащих в плоскости. Постарайтесь сделать это.

Все, сказанное о плоскостях, почти без изменений может быть сказано и о прямых на плоскости. В частности, имеет место

Предложение 6. *Вектор* $\mathbf{a}$ *с компонентами* α_1, α_2 *в общей декартовой системе координат параллелен прямой с уравнением* $Ax + By + C = 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$A\alpha_1 + B\alpha_2 = 0. \tag{18}$$

Действительно, α_1, α_2 должны быть пропорциональны компонентам $-B$, A направляющего вектора прямой.

Векторное уравнение прямой линии в пространстве может быть написано в виде

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0}. \tag{19}$$

Здесь $\mathbf{a}$ — направляющий вектор прямой, а $\mathbf{r}_0$ — радиус-вектор ее начальной точки. В самом деле, это уравнение, как и векторное параметрическое, выражает коллинеарность векторов $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$.

5. Параллельность плоскостей и прямых на плоскости. Ниже, говоря о параллельных прямых или плоскостях, мы будем считать, что параллельные плоскости (или прямые) не обязательно различны, т. е. что плоскость (прямая) параллельна самой себе.

Предложение 7. *Прямые линии, задаваемые в общей декартовой системе координат уравнениями*

$$Ax + By + C = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

параллельны тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты в их уравнениях пропорциональны, т. е. существует такое число λ, *что*

$$A_1 = \lambda A, \quad B_1 = \lambda B. \tag{20}$$

Прямые совпадают в том и только том случае, когда их уравнения пропорциональны, т. е. помимо уравнения (20) *выполнено* (*с тем же* λ) *равенство*

$$C_1 = \lambda C. \tag{21}$$

Доказательство. Первая часть предложения прямо следует из того, что векторы с компонентами $(-B, A)$ и $(-B_1, A_1)$ — направляющие векторы прямых.

Докажем вторую часть. В равенствах (20) и (21) $\lambda \neq 0$, так как коэффициенты в уравнении прямой одновременно нулю не равны. Поэтому, если эти равенства выполнены, уравнения эквивалентны и определяют одну и ту же прямую.

Обратно, пусть прямые параллельны. В силу первой части предложения их уравнения должны иметь вид $Ax + By + C = 0$ и $\lambda(Ax + By) + C_1 = 0$ при некотором λ. Если, кроме того, существует общая точка $M_0(x_0, y_0)$ обеих прямых, то $Ax_0 + By_0 + C = 0$ и $\lambda(Ax_0 + By_0) + C_1 = 0$. Вычитая одно равенство из другого, получаем $C_1 = \lambda C$, как и требовалось.

Предложение 8. *Плоскости, задаваемые в общей декартовой системе координат уравнениями*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

параллельны тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты в их уравнениях пропорциональны, т. е. существует такое число λ, *что*

$$A_1 = \lambda A, \quad B_1 = \lambda B, \quad C_1 = \lambda C. \tag{22}$$

Плоскости совпадают в том и только том случае, когда их уравнения пропорциональны, т. е. помимо уравнений (22) *выполнено* (*с тем же* λ) *равенство*

$$D_1 = \lambda D. \tag{23}$$

Доказательство. Если плоскости параллельны, то их нормальные векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_1$ коллинеарны, и существует такое число λ, что $\mathbf{n}_1 = \lambda\mathbf{n}$. В силу уравнений (15) $A_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{n}_1) = \lambda(\mathbf{e}_1, \mathbf{n}) = \lambda A$. Аналогично доказываются и остальные равенства (22). Обратно, если равенства (22) выполнены, то из формулы (16) следует, что $\mathbf{n}_1 = \lambda\mathbf{n}$. Это доказывает первую часть предложения. Вторая его часть доказывается так же, как вторая часть предложения 7.

Условия (20) выражают не что иное, как коллинеарность векторов с компонентами (A, B) и (A_1, B_1). Точно так же условия (22) означают коллинеарность векторов с компонентами (A, B, C) и (A_1, B_1, C_1). Поэтому согласно предложениям 9 и 10 § 3 гл. I условие параллельности прямых на плоскости можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{24}$$

а условие параллельности плоскостей — в виде

$$\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{25}$$

Предложению 7 можно придать чисто алгебраическую формулировку, если учесть, что координаты точки пересечения прямых — это решение системы, составленной из их уравнений.

Предложение 9. *При условии* (24) *система линейных уравнений*

$$Ax + By + C = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

не имеет решений или имеет бесконечно много решений (*в зависимости от* C *и* C_1). *В последнем случае система равносильна одному из составляющих ее уравнений. Если же*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то при любых C *и* C_1 *система имеет единственное решение* (x, y).

Разумеется, это предложение можно доказать и непосредственно и отсюда получить условие параллельности прямых. Исследованием произвольных систем линейных уравнений мы займемся в гл. V.

6. Уравнения прямой в пространстве. Прямая линия в пространстве может быть задана как пересечение двух плоскостей и, следовательно, в общей декартовой системе координат определяется системой уравнений вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \tag{26}$$

Пересечение плоскостей — прямая линия тогда и только тогда, когда они не параллельны, что согласно (25) означает, что хоть один из детерминантов отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}^2 \neq 0. \tag{27}$$

Разумеется, систему (26) можно заменить на любую, ей эквивалентную. При этом прямая будет представлена как пересечение двух других проходящих через нее плоскостей.

Вспомним параметрические уравнения прямой (4). Допустим, что в них ни одна из компонент направляющего вектора не равна нулю. Тогда

$$t = \frac{x - x_0}{\alpha_1}, \quad t = \frac{y - y_0}{\alpha_2}, \quad t = \frac{z - z_0}{\alpha_3},$$

и мы получаем два равенства

$$\frac{y - y_0}{\alpha_2} = \frac{z - z_0}{\alpha_3}, \quad \frac{x - x_0}{\alpha_1} = \frac{z - z_0}{\alpha_3}, \tag{28}$$

или, в более симметричном виде,

$$\frac{x - x_0}{\alpha_1} = \frac{y - y_0}{\alpha_2} = \frac{z - z_0}{\alpha_3}. \tag{29}$$

Уравнения (28) представляют прямую как линию пересечения двух плоскостей, первая из которых параллельна оси абсцисс (в ее уравнение не входит переменная x), а вторая параллельна оси ординат.

Если обращается в нуль одна из компонент направляющего вектора, например, α_1, то уравнения прямой принимают вид

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{\alpha_2} = \frac{z - z_0}{\alpha_3}. \tag{30}$$

Эта прямая лежит в плоскости $x = x_0$ и, следовательно, параллельна плоскости $x = 0$. Аналогично пишутся уравнения прямой, если в нуль обращается не α_1, а другая компонента.

Когда равны нулю две компоненты направляющего вектора, например, α_1 и α_2, то прямая имеет уравнения

$$x = x_0, \quad y = y_0. \tag{31}$$

Такая прямая параллельна одной из осей координат, в нашем случае — оси аппликат.

Важно уметь находить начальную точку и направляющий вектор прямой, заданной системой линейных уравнений (26). По условию (27) один из детерминантов отличен от нуля. Допустим для

определенности, что $AB_1 - A_1B \neq 0$. В силу предложения 9 при любом фиксированном z система уравнений будет иметь единственное решение (x, y), в котором x и y, разумеется, зависят от z. Они — линейные многочлены от z: $x = \alpha_1 z + \beta_1$, $y = \alpha_2 z + \beta_2$.

Не будем доказывать этого, хотя это и не трудно сделать. Для ясности, заменяя z на t, получаем параметрические уравнения прямой

$$x = \alpha_1 t + \beta_1, \quad y = \alpha_2 t + \beta_2, \quad z = t.$$

Первые две координаты начальной точки прямой $M_0(\beta_1, \beta_2, 0)$ можно получить, решая систему (26) при значении $z = 0$.

Из параметрических уравнений видно, что в этом случае направляющий вектор имеет координаты $(\alpha_1, \alpha_2, 1)$. Найдем его компоненты в общем виде. Если система координат декартова прямоугольная, векторы с компонентами (A, B, C) и (A_1, B_1, C_1) перпендикулярны соответствующим плоскостям, а потому их векторное произведение параллельно прямой (26), по которой плоскости пересекаются. Вычисляя векторное произведение в ортонормированном базисе, мы получаем компоненты направляющего вектора

$$\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}. \tag{32}$$

Предложение 10. *Вектор с компонентами* (32) *есть направляющий вектор прямой с уравнениями* (26), *какова бы ни была декартова система координат.*

Доказательство. Согласно предложению 5 каждый ненулевой вектор, компоненты которого $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ удовлетворяют уравнению $A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0$, параллелен плоскости с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Если, кроме того, он удовлетворяет уравнению $A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3 = 0$, то он параллелен и второй плоскости, т. е. может быть принят за направляющий вектор прямой. Вектор с компонентами (32) ненулевой в силу неравенства (27). Непосредственно легко проверить, что его компоненты удовлетворяют обоим написанным выше условиям. На этом доказательство заканчивается.

Упражнения

1. Найдите параметрические уравнения прямой с уравнениями

$$x + y + z = 4, \quad x - y + 3z = 0.$$

2. Найдите параметрические уравнения плоскости $x - 2y + 3z = 1$.

3. Найдите координаты точки пересечения прямых с уравнениями $x = 1 - t$, $y = 1 + t$, $z = 1 - t$ и $x = 3t - 1$, $y = 2t - 2$, $z = 1 + t$. Какое значение параметра соответствует этой точке на каждой из прямых? Как установить, что прямые пересекаются, не находя точки пересечения?

4. Напишите уравнения плоскости, в которой лежат прямые из упр. 3.

5. Напишите параметрические уравнения прямых, заданных векторными уравнениями:

а) $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$;

б) $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) + D_1 = 0$, $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) + D_2 = 0$, $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0$.

В задаче б) не слишком трудно получить решение и без условия $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0$. Попробуйте сделать это.

§ 3. Основные задачи о прямых и плоскостях

1. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Пусть в пространстве задана общая декартова система координат и две точки M_1 и M_2 с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2). Чтобы написать уравнение прямой M_1M_2, примем M_1 за начальную точку, а $\overrightarrow{M_1M_2}$ за направляющий вектор. Этот вектор не нулевой, если точки не совпадают. По формуле (29) § 2 мы получаем

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{1}$$

Если в этих равенствах какой-либо из знаменателей равен нулю, то следует приравнять нулю соответствующий числитель.

В планиметрии задача решается также. Отличие только в том, что координаты точек теперь (x_1, y_1) и (x_2, y_2), и мы получаем по формуле (8) § 2

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Пусть M_1, M_2 и M_3 — не лежащие на одной прямой точки с координатами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) и (x_3, y_3, z_3) в общей декартовой системе координат. Выберем M_1 в качестве начальной точки, а $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ в качестве направляющих векторов. Тогда по формулам (12) § 2 и (16) § 4 из гл. I получаем уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

3. Параллельность прямой и плоскости. Пусть известен направляющий вектор прямой $\mathbf{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, а плоскость задана одним из уравнений $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0$ или $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$. Прямая параллельна плоскости (а возможно, и лежит в ней) тогда и только тогда, когда соответственно $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = 0$ или $(\mathbf{a}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$. Если плоскость задана линейным уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то по предложению 5 § 2 условие параллельности —

$$A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0. \tag{3}$$

Пусть прямая задана системой уравнений

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тогда по предложению 10 § 2 условие (3) переписывается в виде

$$A\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Легко проверить, что все приведенные здесь условия являются не только необходимыми, но и достаточными.

Из формулы (4) следует, что три плоскости пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда коэффициенты их уравнений удовлетворяют условию

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

Действительно, это неравенство означает, что прямая, по которой пересекаются две плоскости, не параллельна третьей.

4. Полупространство. Пусть даны плоскость P и определенный ее нормальный вектор $\mathbf{n}$. *Полупространством*, определяемым P и $\mathbf{n}$, называется множество точек M таких, что для некоторой точки M_0 на плоскости вектор $\overrightarrow{M_0M}$ составляет с $\mathbf{n}$ угол, не больший $\pi/2$.

Если $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки M, а $\mathbf{r}_0$ — точки M_0, то определение полупространства, эквивалентно неравенству $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) \geqslant 0$. Это неравенство и есть *уравнение полупространства*.

Нетрудно проверить, что определение полупространства не зависит от выбора точки M_0. Действительно, если $M_1(\mathbf{r}_1)$ — другая точка плоскости, то вектор $\mathbf{a} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ лежит в плоскости, перпендикулярен $\mathbf{n}$, и мы имеем

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \mathbf{a}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}).$$

Мы получим уравнение полупространства в координатной форме, если вспомним, что согласно предложению 3 § 2 выражение $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})$ в координатах записывается линейным многочленом $Ax + By + Cz + D$. Итак, полупространство в декартовой системе координат задается линейным неравенством

$$Ax + By + Cz + D \geqslant 0.$$

Обратно, любое такое неравенство можно записать как $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) \geqslant 0$, откуда сразу видно, что оно задает полупространство.

Плоскость P и вектор $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$ задают другое полупространство с уравнением $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}_1) \geqslant 0$ или $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) \leqslant 0$. Его назовем “отрицательным”, в отличие от “положительного” полупространства $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) \geqslant 0$. Однако такое наименование условно — оно определяется выбором вектора $\mathbf{n}$. Изменение направления этого вектора равносильно умножению уравнения плоскости на (-1). При этом "положительное" полупространство становится "отрицательным", и наоборот.

Вот, однако, факт, не зависящий от выбора направления нормального вектора: если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ две точки, не лежащие в плоскости, то результаты подстановки их координат в левую часть уравнения плоскости $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ и $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ имеют один знак тогда и только тогда, когда точки лежат в одном полупространстве.

Для решения задач бывает полезно следующее замечание: если точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на плоскости, то точка с координатами $x_0 + A, y_0 + B, z_0 + C$ лежит в "положительном" полупространстве. Иначе говоря, вектор с координатами A, B, C направлен в "положительное" полупространство. Это легко проверяется подстановкой.

Вполне аналогично сказанному о полупространствах мы можем определить, что такое полуплоскость, и доказать, что неравенство $Ax + By + C \geqslant 0$, связывающее декартовы координаты точки на плоскости, определяет полуплоскость. Вторая полуплоскость, ограниченная прямой $Ax + By + C = 0$, задается неравенством $Ax + By + C \leqslant 0$.

Точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат по одну сторону от прямой тогда и только тогда, когда $(Ax_1 + By_2 + C)(Ax_2 + By_2 + C) > 0$.

5. Расстояние от точки до плоскости. Пусть дана плоскость с уравнением $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0$ и точка M с радиус-вектором $\mathbf{R}$. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{R} - \mathbf{r}_0$, соединяющий начальную точку плоскости с M (рис. 22). Расстояние от точки до плоскости равно модулю его скалярной проекции на вектор $\mathbf{n}$, т. е.

$$h = \frac{|(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|}. \tag{6}$$

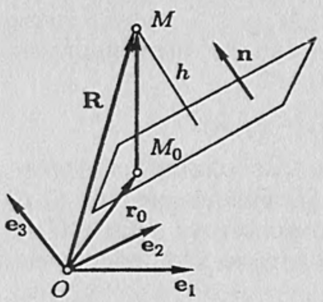

Рис. 22

Если в декартовой прямоугольной системе координат точка M имеет координаты (X, Y, Z), то равенство (6) запишется согласно предложениям 3 и 4 § 2 так:

$$h = \frac{|AX + BY + CZ + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{7}$$

6. Расстояние от точки до прямой. Если прямая задана уравнением $[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0$, то мы можем найти расстояние h от точки M с радиус-вектором $\mathbf{R}$ до этой прямой, разделив площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{R} - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$, на длину его основания

(рис. 23). Результат можно записать формулой

$$h = \frac{|[\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|} \tag{8}$$

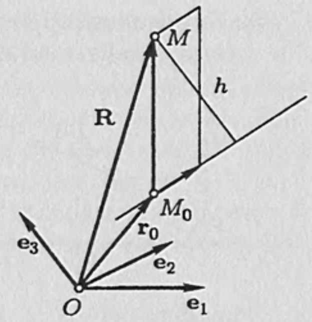

Рис. 23

Для прямой в пространстве мы не будем получать координатной записи этого выражения.

Рассмотрим прямую на плоскости, заданную уравнением $Ax + By + C = 0$ в декартовой прямоугольной системе координат. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — начальная точка прямой, а $M(X, Y)$ — некоторая точка плоскости. В качестве направляющего вектора возьмем вектор $\mathbf{a}(-B, A)$. Из формулы (25) § 4 гл. I следует, что площадь параллелограмма равна $S = |(X - x_0)A - (Y - y_0)(-B)|$. Тогда по формуле (9) § 2 $S = |AX + BY + C|$ и

$$h = \frac{|AX + BY + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{9}$$

Легко заметить также, что для нахождения расстояния от точки до прямой на плоскости можно воспользоваться формулой (6), считая, что $\mathbf{n}$ — нормальный вектор прямой.

7. Расстояние между скрещивающимися прямыми. Пусть прямые p и q не параллельны. Известно, что в этом случае существуют такие параллельные плоскости P и Q, что прямая p лежит в P, а прямая q лежит в Q. (Если уравнения прямых $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$, то плоскость P имеет начальную точку $\mathbf{r}_1$ и направляющие векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Аналогично строится плоскость Q.) Расстояние h между P и Q называется *расстоянием между прямыми p и q*. Если p и q пересекаются, то P и Q совпадают и $h = 0$.

Для того чтобы найти расстояние h, проще всего разделить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, на площадь его основания (рис. 24). Мы получим

$$h = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}.$$

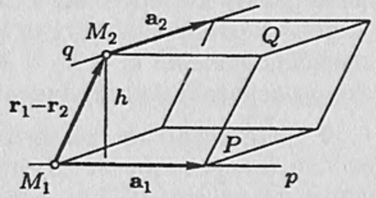

Рис. 24

Знаменатель этой дроби отличен от нуля, поскольку прямые не параллельны.

Предложение 1. *Прямые линии с уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$ пересекаются тогда и только тогда, когда $h = 0$, т. е.*

$$(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0, \quad [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \neq 0.$$

8. Вычисление углов. Чтобы найти угол между двумя прямыми, следует найти их направляющие векторы и вычислить косинус угла между ними, используя скалярное произведение. При этом следует иметь в виду, что, изменив направление одного из векторов, мы получим косинус смежного угла.

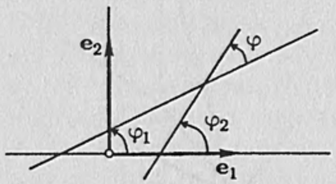

Рис. 25. $\varphi=\varphi_2=\varphi_1$

Для нахождения угла между прямой и плоскостью определяют угол θ между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости. Если векторы выбрать так, чтобы $\cos\theta \geqslant 0$, и взять $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, то искомый угол дополняет θ до $\pi/2$.

Угол между плоскостями находят как угол между их нормальными векторами.

Полезна бывает формула для угла между прямыми линиями на плоскости, заданными уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ в декартовой прямоугольной системе координат. Обозначим через φ угол между прямыми, отсчитываемый от первой прямой ко второй в том же направлении, в котором производится кратчайший поворот от первого базисного вектора ко второму. Тогда $\operatorname{tg}\varphi$ можно найти как тангенс разности углов, которые прямые составляют с осью абсцисс. Так как тангенсы этих углов равны угловым коэффициентам прямых, мы получаем

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{10}$$

Конечно, эта формула не имеет смысла, когда знаменатель дроби обращается в нуль. В этом случае прямые перпендикулярны. Действительно, согласно предложению 1 §2 векторы с компонентами $(1, k_1)$ и $(1, k_2)$ — направляющие векторы прямых, и их скалярное произведение равно $1 + k_1k_2$. Мы получили

Предложение 2. *Для перпендикулярности прямых с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 в декартовой прямоугольной системе координат необходимо и достаточно выполнение равенства $1 + k_1k_2 = 0$.*

9. Некоторые задачи на построение. а) *Перпендикуляр из точки на плоскость. Проекция точки.* Если $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0$ — уравнение плоскости и дана точка M с радиус-вектором $\mathbf{R}$, то прямая с уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{R} + t\mathbf{n}$ проходит через M и перпендикулярна плоскости. Решая совместно уравнения прямой и плоскости, найдем ортогональную проекцию M на плоскость. Из $(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0 + t\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 0$ находим t и подставляем в уравнение прямой. Мы получим радиус-вектор проекции

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}.$$

Обратите внимание на структуру этой формулы: из радиус-вектора $\mathbf{R}$ вычитается проекция $\mathbf{R} - \mathbf{r}_0$ на нормальный вектор плоскости. Из этих соображений можно было получить ответ.

б) *Перпендикуляр из точки на прямую.* Пусть прямая задана уравнением $[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0$ и дана точка M с радиус-вектором $\mathbf{R}$. Вектор $\mathbf{p} = [\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]$ перпендикулярен плоскости, проходящей через прямую и точку M. Если точка не лежит на прямой, то $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, и вектор $[\mathbf{a}, \mathbf{p}] = [\mathbf{a}, [\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]]$ также ненулевой и перпендикулярен $\mathbf{a}$ и $\mathbf{p}$. Следовательно, он лежит в указанной плоскости и перпендикулярен прямой. Итак, получено уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + t[\mathbf{a}, [\mathbf{R} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]]$$

перпендикуляра, опущенного из точки M на заданную прямую.

Применив формулу двойного векторного произведения, вы заметите, что $[\mathbf{a}, \mathbf{p}]$ коллинеарен разности вектора $\mathbf{R} - \mathbf{r}_0$ и его проекции на вектор $\mathbf{a}$. Задачу можно было решить, заметив это свойство направляющего вектора перпендикуляра.

в) *Уравнение проекции прямой на плоскость.* Его просто получить, если не требуется находить направляющий вектор и начальную точку. Пусть заданная плоскость имеет уравнение $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0$, а прямая — уравнение $[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$, причем $[\mathbf{a}, \mathbf{n}] \neq \mathbf{0}$. Тогда плоскость $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{n}) = 0$ проходит через прямую перпендикулярно заданной плоскости. Таким образом, проекция прямой может быть задана системой из двух уравнений:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{n}) = 0, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{n}) + D = 0.$$

Направляющий вектор проекции $\mathbf{b}$ — проекция $\mathbf{a}$ на плоскость. Она получается из $\mathbf{a}$ вычитанием из него его проекции на нормаль:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}.$$

За начальную точку может быть принята точка пересечения проектируемой прямой с плоскостью, если она существует, или же проекция начальной точки прямой.

г) *Общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым.* Пусть прямые с уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{a}_2$ не параллельны, т. е. $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \neq \mathbf{0}$. Вектор $\mathbf{p} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ перпендикулярен обеим прямым. Следовательно, плоскость

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = 0 \tag{11}$$

проходит через первую прямую и общий перпендикуляр к обеим прямым (рис. 26), а плоскость

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = 0 \tag{12}$$

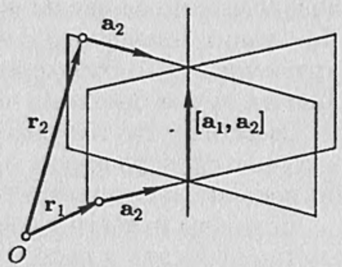

Рис. 26

— через вторую прямую и общий перпендикуляр. Поэтому общий перпендикуляр можно задать системой уравнений (11), (12). Чтобы найти его начальную точку, можно решить совместно уравнение первой прямой и плоскости (12). Направляющий вектор — $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$.

10. Пучок прямых. *Пучком прямых* на плоскости называется множество прямых, проходящих через фиксированную точку — *центр пучка*. Пусть $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ — уравнения двух прямых, принадлежащих пучку. Тогда уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \qquad (13)$$

при условии $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ называется *уравнением пучка прямых*.

Основанием для этого служит

Предложение 3. *При любых α и β ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$) уравнение* (13) *определяет прямую линию, принадлежащую пучку. Обратно, уравнение каждой прямой из пучка представимо в виде* (13).

Докажем сначала, что коэффициенты при переменных в уравнении (13) не равны нулю одновременно. Для этого перепишем его в виде

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2) = 0.$$

Допустим, что $\alpha A_1 + \beta A_2 = 0$ и $\alpha B_1 + \beta B_2 = 0$. Так как прямые пересекаются, $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ и из предложения 9 § 2 вытекает, что значения $\alpha = 0$, $\beta = 0$ единственные, которые удовлетворяют этим двум равенствам. Но эти значения мы исключили. Таким образом, уравнение (13) определяет прямую линию.

Обозначим через x_0, y_0 координаты центра пучка. По условию

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0, \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0,$$

а потому x_0, y_0 удовлетворяют уравнению (13), и прямая проходит через центр пучка.

Вторая часть предложения будет доказана, если окажется, что через любую точку, отличную от центра пучка M_0, проходит прямая линия с уравнением вида (13). Легко проверить, так ли это. Рассмотрим точку $M_1(x_1, y_1)$, отличную от M_0, и обозначим

$$u = A_1x_1 + B_1y_1 + C_1, \quad v = A_2x_1 + B_2y_1 + C_2.$$

Так как наши прямые имеют только одну общую точку, числа u и v одновременно не равны нулю, и мы вправе положить $\alpha = -v$, $\beta = u$. При таких значениях α и β координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению (13). Это означает, что соответствующая этим значениям прямая пучка проходит через M_1, и предложение доказано.

Заметим, что каждая пара чисел α и β ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$) определяет в пучке единственную прямую, но каждой прямой соответствуют бесконечно много пропорциональных между собой пар чисел.

Если нам известны координаты центра пучка, то уравнение пучка можно написать в виде

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0,$$

положив, что пучок определяется прямыми $x - x_0 = 0$ и $y - y_0 = 0$. Впрочем, и без того очевидно, что это — уравнение произвольной прямой, проходящей через M_0.

Посмотрим на уравнение пучка прямых с несколько более общей точки зрения. Систему из уравнений прямых, определяющих пучок, можно рассматривать как уравнение центра пучка. Поэтому уравнение каждой прямой пучка есть следствие этой системы. Теперь наш результат можно сформулировать так.

Предложение 4. *Если система линейных уравнений имеет решение, то некоторое линейное уравнение является ее следствием тогда и только тогда, когда оно есть сумма уравнений системы, умноженных на какие-то числа.*

Мы доказали это предложение для частного случая систем из двух уравнений с двумя неизвестными. В общем виде оно вытекает из результатов гл. V о системах линейных уравнений. Другими геометрическими интерпретациями этого предложения являются пучки и связки плоскостей.

Пучком плоскостей называется множество плоскостей, проходящих через фиксированную прямую — *ось пучка*. Уравнение пучка плоскостей имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

где $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, а в скобках стоят левые части уравнений двух различных плоскостей пучка.

Связкой плоскостей называется множество плоскостей, проходящих через фиксированную точку — *центр связки*. Уравнение связки плоскостей имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \\ + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0,$$

где $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, а в скобках стоят левые части уравнений плоскостей связки, имеющих центр своей единственной общей точкой.

Предоставим читателю самостоятельно вывести эти уравнения, если он пожелает.

11. О геометрическом смысле порядка алгебраической линии. Пусть на плоскости дана алгебраическая линия L, имеющая в декартовой системе координат уравнение

$$A_1x^{k_1}y^{l_1} + \ldots + A_sx^{k_s}y^{l_s} = 0. \qquad (14)$$

Рассмотрим произвольную прямую с параметрическими уравнениями

$$x = x_0 + a_1t, \quad y = y_0 + a_2t. \qquad (15)$$

Найдем точки пересечения L и прямой линии. Они будут известны, если мы найдем соответствующие им значения параметра t. Это будут те значения, при которых x и y, выраженные по формулам (15), удовлетворяют уравнению (14). Подставим (15) в (14):

$$A_1(x_0 + a_1 t)^{k_1}(y_0 + a_2 t)^{l_1} + \ldots + A_s(x_0 + a_1 t)^{k_s}(y_0 + a_2 t)^{l_s} = 0. \quad (16)$$

Раскрывая скобки в каждом члене, мы получим многочлены относительно t степеней $k_1 + l_1, \ldots, k_s + l_s$. Их сумма будет многочленом, степень которого не выше, чем максимальная из степеней слагаемых. Но максимальное из чисел $k_1 + l_1, \ldots, k_s + l_s$ — это порядок линии L. Поэтому степень уравнения (16) не превосходит порядка линии.

Может, конечно, случиться, что все коэффициенты этого уравнения равны нулю, и оно представляет собой тождество. Если исключить этот случай, то число корней уравнения и, следовательно, число точек пересечения не превосходит порядка линии. Мы доказали

Предложение 5. *Число точек пересечения алгебраической линии с прямой, которая на ней не лежит целиком, не превосходит порядка линии.*

Существуют линии, которые ни с одной прямой не имеют в принципе возможного числа точек пересечения, равного порядку линии. Примерами могут служить линии с уравнениями $x^2 + y^2 = 0$ или $(x^2 + y^2)^2 - 1 = 0$.

Пример. *Архимедова спираль* — линия с уравнением $r = \alpha\varphi$ в полярной системе координат — пересекает каждую прямую, проходящую через полюс, в бесконечном числе точек. Следовательно, она не является алгебраической линией.

Упражнения

1. В декартовой прямоугольной системе координат даны координаты вершин треугольника $A(20, -15)$, $B(-16, 0)$ и $C(-8, 6)$. Найдите координаты центра и радиус окружности, вписанной в треугольник.

2. Начало координат лежит в одном из углов, образованных прямыми с уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. При каком необходимом и достаточном условии на коэффициенты уравнений этот угол острый?

3. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат и пересекающей прямые с уравнениями $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = -t$ и $x = 4t$, $y = 5 - 5t$, $z = 3 + 2t$.

4. В декартовой прямоугольной системе координат найдите координаты центра и радиус сферы, проходящей через точку $A(0, 1, 0)$ и касающейся плоскостей с уравнениями $x + y = 0$, $x - y = 0$ и $x + y + 4z = 0$.

5. В декартовой прямоугольной системе координат даны координаты вершин треугольника $A(1, 2, 3)$, $B(1, 5, -1)$ и $C(5, 3, -5)$. Найдите координаты центра окружности, описанной около треугольника.

6. Напишите уравнения прямой, которая параллельна прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}_0 t$ и пересекает прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$.

ГЛАВА III

ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Исследование уравнения второго порядка

В общей декартовой системе координат линия второго порядка может быть задана уравнением[1]

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

в котором коэффициенты A, B и C не равны нулю одновременно. Исследуем множество точек, которые ему удовлетворяют, не предполагая заранее, что хоть одна такая точка существует. С этой целью мы будем менять систему координат так, чтобы уравнение стало возможно проще. С самого начала можно считать систему координат декартовой прямоугольной, так как при переходе к прямоугольной системе координат общий вид уравнения (1) не изменится.

При повороте базиса декартовой прямоугольной системы координат на угол φ старые координаты точки x, y будут связаны с ее новыми координатами x', y' формулами (8) § 3 гл. I

$$x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \quad y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi.$$

В новых координатах уравнение (1) примет вид

$$A(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2 + 2B(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)\times$$
$$\times(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi) + C(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2 + \ldots = 0.$$

Здесь многоточием обозначены члены первой степени относительно x', y' и свободный член, которые нет необходимости выписывать. Нас будет интересовать член с произведением $x'y'$ в преобразованном уравнении. В невыписанные члены это произведение не входит, и мы подсчитаем, что половина коэффициента при $x'y'$ есть

$$B' = -A\sin\varphi\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + C\sin\varphi\cos\varphi.$$

Если $B = 0$, то поворачивать систему координат не будем. Если же $B \neq 0$, то выберем угол φ так, чтобы B' обратилось в нуль.

Это требование приведет к уравнению

$$2B\cos 2\varphi = (A - C)\sin 2\varphi. \qquad (2)$$

Если $A = C$, то $\cos 2\varphi = 0$, и можно положить $\varphi = \pi/4$. Если же $A \neq C$, то выбираем $\varphi = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left[\dfrac{2B}{A - C}\right]$. Для нас сейчас важно то, что хоть

*) Коэффициенты при произведении переменных и при их первых степенях обозначены $2B$, $2D$ и $2E$, так как ниже часто будут употребляться половины этих коэффициентов.

один такой угол обязательно существует. После поворота системы координат на этот угол линия будет иметь уравнение

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0. \qquad (3)$$

Выражения для коэффициентов уравнения (3) через коэффициенты (1) подсчитать не трудно, но это не нужно. Теперь коэффициент при произведении переменных равен нулю, а остальные члены мы по-прежнему считаем произвольными.

Сформулируем следующее вспомогательное

Предложение 1. *Если в уравнение* (3) *входит с ненулевым коэффициентом квадрат одной из координат, то при помощи переноса начала координат вдоль соответствующей оси можно обратить в нуль член с первой степенью этой координаты.*

В самом деле, пусть, например, $A' \neq 0$. Перепишем (3) в виде

$$A'\left(x'^2 + \frac{2D'}{A'}x' + \frac{D'^2}{A'^2}\right) + C'y'^2 + 2E'y' + F' - \frac{D'^2}{A'} = 0.$$

Если мы сделаем перенос начала координат, определяемый формулами $x'' = x' + D'/A'$, $y'' = y'$, то уравнение приведется к виду

$$A'x''^2 + C'y''^2 + 2E'y'' + F'' = 0,$$

как и требовалось.

А. Предположим, что $A'C' \neq 0$, т. е. оба коэффициента отличны от нуля. Согласно предложению 1 при помощи переноса начала координат уравнение приведется к виду

$$A'x''^2 + C'y''^2 + F'' = 0. \qquad (4)$$

Могут быть сделаны следующие предположения относительно знаков коэффициентов в этом уравнении.

А1. $A'C' > 0$ — коэффициенты A' и C' имеют один знак. Для F'' имеются следующие три возможности.

А1а. Знак F'' противоположен знаку A' и C'. Перенесем F'' в другую часть равенства и разделим на него. Уравнение примет вид

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1, \qquad (5)$$

где $a^2 = -F''/A'$, $b^2 = -F''/C'$. Можно считать, что в этом уравнении $a > 0$, $b > 0$ и $a \geqslant b$. Действительно, если последнее условие не выполнено, то можно сделать дополнительную замену координат

$$x^* = y'', \quad y^* = x''. \qquad (6)$$

Определение. Линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат может быть задана уравнением (5) при условии $a \geqslant b$, называется *эллипсом*, уравнение называется *каноническим уравнением* эллипса, а система координат — его *канонической системой координат*.

При $a = b$ уравнение (5) есть уравнение окружности радиуса a. Таким образом, окружность — частный случай эллипса.

А1б. Знак F'' совпадает с общим знаком A'' и C''. Тогда аналогично предыдущему мы можем привести уравнение к виду

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1. \qquad (7)$$

Этому уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки. Уравнение, которое приводится к каноническому виду (7), называется уравнением *мнимого эллипса*.

А1в. $F'' = 0$. Уравнение имеет вид

$$a^2x''^2 + c^2y'' = 0. \qquad (8)$$

Ему удовлетворяет только одна точка $x'' = 0$, $y'' = 0$. Уравнение, приводящееся к каноническому виду (8), называется *уравнением пары мнимых пересекающихся прямых*. Основанием для этого названия служит сходство с приведенным ниже уравнением (10).

А2. $A'C' < 0$ — коэффициенты A' и C' имеют разные знаки. Относительно F'' имеются следующие две возможности.

А2а. $F'' \neq 0$. В случае необходимости, делая замену (6), мы можем считать, что знак F'' противоположен знаку A'. Тогда уравнение приводится к виду

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1, \qquad (9)$$

где $a^2 = -F''/A'$, $b^2 = F''/C'$.

Определение. Линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат может быть задана уравнением (9), называется *гиперболой*, уравнение называется *каноническим уравнением* гиперболы, а система координат — ее *канонической системой координат*.

А2б. $F'' = 0$. Уравнение имеет вид

$$a^2x''^2 - c^2y''^2 = 0. \qquad (10)$$

Его левая часть разлагается на множители $ax'' - cy''$ и $ax'' + cy''$ и, следовательно, обращается в нуль тогда и только тогда, когда равен нулю хоть один из сомножителей. Поэтому линия с уравнением (10) состоит из двух прямых. Эти прямые пересекаются в начале координат, и мы имеем, таким образом, *пару пересекающихся прямых*.

Б. Допустим теперь, что $A'C' = 0$, и, следовательно, один из коэффициентов A' или C' равен нулю. В случае необходимости, делая замену (6), мы можем считать, что $A' = 0$. При этом $C' \neq 0$, так как иначе порядок уравнения был бы меньше двух. Используя предложение 1, мы приведем уравнение к виду

$$C'y''^2 + 2D'x'' + F'' = 0.$$

Б1. Пусть $D' \neq 0$. Сгруппируем члены следующим образом:

$$C'y''^2 + 2D'\left(x'' + \frac{F''}{2D'}\right) = 0.$$

Перенесем начало координат вдоль оси абсцисс в соответствии с формулами перехода $x^* = x'' + F''/2D'$, $y^* = y''$. Тогда уравнение примет вид

$$C''y^{*2} + 2D'x^* = 0,$$

или

$$y^{*2} = 2px^*, \tag{11}$$

где $p = -D'/C'$. Мы можем считать, что $p > 0$, так как в противном случае можно сделать дополнительную замену координат, изменяющую направление оси абсцисс: $\widetilde{x} = -x^*$, $\widetilde{y} = y^*$.

Определение. Линия, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат может быть задана уравнением (11) при условии $p > 0$, называется *параболой*, уравнение называется *каноническим уравнением* параболы, а система координат — ее *канонической системой координат*.

Б2. Допустим, что $D' = 0$. Уравнение имеет вид $C'y''^2 + F'' = 0$. Относительно F'' есть следующие три возможности.

Б2а. $C'F'' < 0$ — знаки C' и F'' противоположны. Разделив на C', приведем уравнение к виду

$$y''^2 - a^2 = 0. \tag{12}$$

Левая часть уравнения разлагается на множители $y'' + a$ и $y'' - a$. Обращение в нуль каждого из них определяет прямую линию. Эти прямые параллельны, и, таким образом, уравнение определяет *пару параллельных прямых*.

Б2б. $C'F'' > 0$ — знаки C' и F'' совпадают. Разделив на C', приведем уравнение к виду

$$y''^2 + a^2 = 0. \tag{13}$$

Этому уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки. Уравнение, приводящееся к каноническому виду (13), называют уравнением *пары мнимых параллельных прямых*.

Б2в. $F'' = 0$. После деления на C' уравнение принимает вид

$$y''^2 = 0. \tag{14}$$

Это уравнение эквивалентно уравнению $y'' = 0$, и потому определяет прямую линию. Уравнение, приводящееся к каноническому виду (14), называется уравнением *пары совпавших прямых*.

Соберем вместе полученные результаты.

Теорема 1. *Пусть в декартовой системе координат задано уравнение второго порядка* (1).

Тогда существует такая декартова прямоугольная система координат, в которой это уравнение принимает один из следующих девяти канонических видов:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$; 3) $a^2x^2 + c^2y^2 = 0$;

4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; 5) $a^2x^2 - c^2y^2 = 0$; 6) $y^2 = 2px$;

7) $y^2 - a^2 = 0$; 8) $y^2 + a^2 = 0$; 9) $y^2 = 0$.

В соответствии с этим существуют семь классов линий второго порядка: 1) эллипсы; 3) точки (пары мнимых пересекающихся прямых); 4) гиперболы; 5) пары пересекающихся прямых; 6) параболы; 7) пары параллельных прямых; 9) прямые (пары совпавших прямых).

Уравнению 2) мнимого эллипса и уравнению 8) пары мнимых параллельных прямых не удовлетворяет ни одна точка.

Упражнения

1. Приведите к каноническому виду уравнение

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x + 2y - 9 = 0.$$

2. Приведите к каноническому виду уравнение

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 34x - 38y - 9 = 0.$$

3. Какого класса линию может определять уравнение второго порядка, если его левая часть раскладывается в произведение линейных многочленов?

4. При каком условии на его коэффициенты уравнение второго порядка в декартовой прямоугольной системе координат является уравнением окружности?

5. Система координат удовлетворяет условиям $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 5$, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 7$. Какая линия определяется в этой системе координат уравнением $x^2 + y^2 = 1$?

6. Докажите, что сумма коэффициентов $A + C$ в уравнении (1) не меняется при переходе от одной декартовой прямоугольной системы координат к другой такой же системе.

§ 2. Эллипс, гипербола и парабола

В предыдущем параграфе мы познакомились с классификацией линий второго порядка. Геометрические свойства только трех классов линий не являются очевидными. Ими мы сейчас займемся.

1. Эллипс. Напомним, что мы назвали эллипсом линию, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

при условии $a \geqslant b > 0$.

Из уравнения (1) следует, что для всех точек эллипса $|x| \leqslant a$ и $|y| \leqslant b$. Значит, эллипс лежит в прямоугольнике со сторонами $2a$ и $2b$.

Точки пересечения эллипса с осями канонической системы координат, имеющие координаты $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ и $(0, -b)$, называются *вершинами* эллипса. Числа a и b называются соответственно *большой* и *малой полуосями* эллипса.

В каноническое уравнение входят только квадраты координат. Поэтому, если координаты (x, y) какой-либо точки M ему удовлетворяют, то ему удовлетворяют и координаты $(-x, y)$, $(x, -y)$ и $(-x, -y)$ точек M_1, M_2 и M_3 (рис. 27). Отсюда вытекает

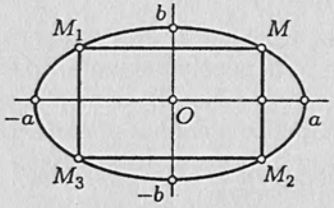

Рис. 27

Предложение 1. *Оси канонической системы координат являются осями симметрии эллипса, а начало канонической системы — его центром симметрии.*

Внешний вид эллипса проще всего описать сравнением с окружностью радиуса a с центром в центре эллипса: $x^2 + y^2 = a^2$. При каждом x таком, что $|x| < a$, найдутся две точки эллипса с ординатами $\pm b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ и две точки окружности с ординатами $\pm a\sqrt{1 - x^2/a^2}$. Пусть точке эллипса соответствует точка окружности с ординатой того же знака. Тогда отношение ординат соответствующих точек равно b/a. Итак, эллипс получается из окружности таким сжатием ее к оси абсцисс, при котором ординаты

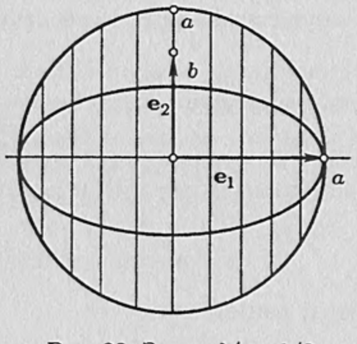

Рис. 28. Здесь $b/a = 1/2$

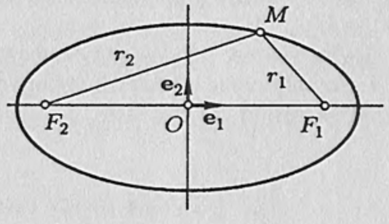

Рис. 29

всех точек уменьшаются в одном и том же отношении b/a (рис. 28).

С эллипсом связаны две замечательные точки, называемые его фокусами. Пусть по определению

$$c^2 = a^2 - b^2 \tag{2}$$

и $c \geqslant 0$. *Фокусами* называются точки F_1 и F_2 с координатами $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ в канонической системе координат (рис. 29).

Для окружности $c = 0$, и оба фокуса совпадают с центром. Ниже мы будем предполагать, что эллипс не является окружностью.

Отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \tag{3}$$

называется *эксцентриситетом* эллипса. Отметим, что $\varepsilon < 1$.

Предложение 2. *Расстояние от произвольной точки $M(x, y)$, лежащей на эллипсе, до каждого из фокусов* (см. рис. 29) *является*

линейной функцией от ее абсциссы x:

$$r_1 = |F_1M| = a - \varepsilon x, \quad r_2 = |F_2M| = a + \varepsilon x. \tag{4}$$

Доказательство Очевидно, что $r_1^2 = (x - c)^2 + y^2$. Подставим сюда выражение для y^2, найденное из уравнения эллипса. Мы получим

$$r_1^2 = x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}.$$

Учитывая равенство (2), это можно преобразовать к виду

$$r_1^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = (a - \varepsilon x)^2.$$

Так как $x \leqslant a$ и $\varepsilon < 1$, отсюда следует, что справедливо первое из равенств (4): $r_1 = a - \varepsilon x$. Второе равенство доказывается аналогично.

Предложение 3. *Для того чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы сумма ее расстояний до фокусов равнялась большой оси эллипса $2a$.*

Необходимость условия очевидна: если мы сложим равенства (4) почленно, то увидим, что

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{5}$$

Докажем достаточность. Пусть для точки $M(x, y)$ выполнено условие (5), т. е.

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Возведем обе части равенства в квадрат и приведем подобные члены:

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}. \tag{6}$$

Это равенство также возведем в квадрат и приведем подобные члены, используя соотношение (2). Мы придем к равенству $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, равносильному уравнению эллипса (1).

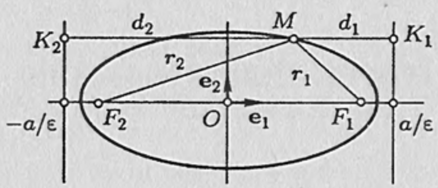

Рис. 30

С эллипсом связаны две замечательные прямые, называемые его *директрисами*. Их уравнения в канонической системе координат (рис. 30)

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Директрису и фокус, которые лежат по одну сторону от центра, будем считать соответствующими друг другу.

Предложение 4. *Для того чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение ее расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету эллипса ε.*

Докажем это предложение для фокуса $F_2(-c, 0)$. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса. Расстояние от M до директрисы с урав-

нением $x = -a/\varepsilon$ по формуле (9) § 3 гл. II равно
$$d_2 = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon x + a).$$
Из формулы (4) мы видим теперь, что $r_2/d_2 = \varepsilon$.

Обратно, пусть для какой-то точки плоскости $r_2/d_2 = \varepsilon$, т. е.
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \varepsilon\left(x + \frac{a}{\varepsilon}\right).$$
Так как $\varepsilon = c/a$, это равенство легко приводится к виду (6), из которого, как мы знаем, следует уравнение эллипса.

Выведем уравнение касательной к эллипсу, заданному каноническим уравнением. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — точка на эллипсе и $y_0 \neq 0$. Через M_0 проходит график некоторой функции $y = f(x)$, который целиком лежит на эллипсе. (Для $y_0 > 0$ это график $f_1(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, для $y_0 < 0$ — график $f_2(x) = -b\sqrt{1 - x^2/a^2}$. Не уточняя знака y_0, обозначим подходящую функцию $f(x)$.) Для нее выполнено тождество
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(f(x))^2}{b^2} = 1.$$
Дифференцируем его по x:
$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2ff'}{b^2} = 0.$$
Подставляя $x = x_0$ и $f(x_0) = y_0$, находим производную от f в точке x_0, равную угловому коэффициенту касательной:
$$f'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}.$$
Теперь мы можем написать уравнение касательной:
$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$
Упрощая это уравнение, учтем, что $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$, так как M_0 лежит на эллипсе. Результату можно придать вид
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{8}$$

При выводе уравнения (8) мы исключили вершины эллипса $(a, 0)$ и $(-a, 0)$, положив $y_0 \neq 0$. Для этих точек оно превращается, соответственно, в уравнения $x = a$ и $x = -a$. Эти уравнения определяют касательные в вершинах. Проверить это можно, заметив, что в вершинах x как функция от y достигает экстремума. Предоставим читателю проделать это подробно и показать тем самым, что уравнение (8) определяет касательную для любой точки $M_0(x_0, y_0)$ на эллипсе.

Предложение 5. *Касательная к эллипсу в точке $M_0(x_0, y_0)$ есть биссектриса угла, смежного с углом между отрезками, соединяющими эту точку с фокусами.*

Доказательство Нам надо сравнить углы φ_1 и φ_2, составленные векторами $\overrightarrow{F_1M_0}$ и $\overrightarrow{F_2M_0}$ с вектором $\mathbf{n}$, перпендикулярным касательной (рис. 31). Из уравнения (8) находим, что $\mathbf{n}(x_0/a^2, y_0/b^2)$, и потому
$$(\overrightarrow{F_1M_0}, \mathbf{n}) = \frac{x_0}{a^2}(x_0 - c) + \frac{y_0}{b^2}y_0 =$$
$$= 1 - \frac{x_0c}{a^2} = \frac{a - \varepsilon x_0}{a}.$$

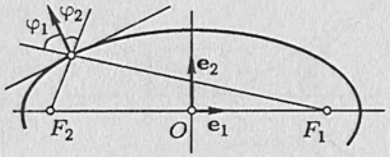

Рис. 31

Используя (4), мы получаем отсюда, что $\cos\varphi_1 = 1/(a|\mathbf{n}|)$. Аналогично находим $\cos\varphi_2 = 1/(a|\mathbf{n}|)$. Предложение доказано.

2. Гипербола. Гиперболой мы назвали линию, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{9}$$

Из этого уравнения видно, что для всех точек гиперболы $|x| \geqslant a$, т. е. все точки гиперболы лежат вне вертикальной полосы ширины $2a$ (рис. 32). Ось абсцисс канонической системы координат пересекает гиперболу в точках с координатами $(a, 0)$ и $(-a, 0)$, называемых *вершинами* гиперболы. Ось ординат не пересекает гиперболу. Таким образом, гипербола состоит из двух не связанных между собой частей. Они называются ее *ветвями*. Числа a и b называются соответственно *вещественной* и *мнимой полуосями* гиперболы.

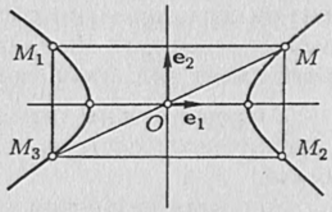

Рис. 32

В точности так же, как и для эллипса, доказывается

Предложение 6. *Для гиперболы оси канонической системы координат являются осями симметрии, а начало канонической системы — центром симметрии.*

Для исследования формы гиперболы найдем ее пересечение с произвольной прямой, проходящей через начало координат. Уравнение прямой возьмем в виде $y = kx$, поскольку мы уже знаем, что прямая $x = 0$ не пересекает гиперболу. Абсциссы точек перечения находятся из уравнения
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2x^2}{b^2} = 1.$$
Поэтому, если $b^2 - a^2k^2 > 0$, то
$$x = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2k^2}}.$$
Это позволяет указать координаты точек пересечения $(ab/v, abk/v)$ и

$(-ab/v, -abk/v)$, где обозначено $v = (b^2 - a^2k^2)^{1/2}$. В силу симметрии достаточно проследить за движением первой из точек при изменении k (рис. 33).

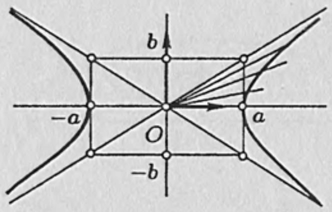

Рис. 33

Числитель дроби ab/v постоянен, а знаменатель принимает наибольшее значение при $k = 0$. Следовательно, наименьшую абсциссу имеет вершина $(a, 0)$. С ростом k знаменатель убывает, и x растет, стремясь к бесконечности, когда k приближается к числу b/a. Прямая $y = bx/a$ с угловым коэффициентом b/a не пересекает гиперболу, и прямые с большими угловыми коэффициентами ее тем более не пересекают. Любая прямая с меньшим положительным угловым коэффициентом пересекает гиперболу.

Если мы будем поворачивать прямую от горизонтального положения по часовой стрелке, то k будет убывать, k^2 расти, и прямая будет пересекать гиперболу во все удаляющихся точках, пока не займет положения с угловым коэффициентом $-b/a$.

К прямой $y = -bx/a$ относится все, что было сказано о $y = bx/a$: она не пересекает гиперболу и отделяет прямые, пересекающие ее, от не пересекающих. Из приведенных рассуждений вытекает, что гипербола имеет вид, изображенный на рис. 33.

Определение. Прямые с уравнениями $y = bx/a$ и $y = -bx/a$ в канонической системе координат называются *асимптотами* гиперболы.

Запишем уравнения асимптот в виде $bx - ay = 0$ и $bx + ay = 0$. Расстояния от точки $M(x, y)$ до асимптот равны соответственно

$$h_1 = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad h_2 = \frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Если точка M находится на гиперболе, то $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, и

$$h_1 h_2 = \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Предложение 7. *Произведение расстояний от точки гиперболы до асимптот постоянно и равно $a^2b^2/(a^2 + b^2)$.*

Отсюда следует важное свойство асимптот.

Предложение 8. *Если точка движется по гиперболе так, что ее абсцисса по абсолютной величине неограниченно возрастает, то расстояние от точки до одной из асимптот стремится к нулю.*

Действительно, хотя бы одно из расстояний h_1 или h_2 при этих условиях должно неограниченно возрастать, и, если бы предложение было неверно, произведение не было бы постоянно.

Введем число c, положив

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{10}$$

и $c > 0$. *Фокусами* гиперболы называются точки F_1 и F_2 с координатами $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ в канонической системе координат.

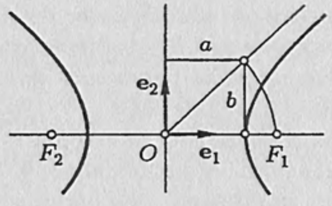

Рис. 34. $c^2 = a^2 + b^2$

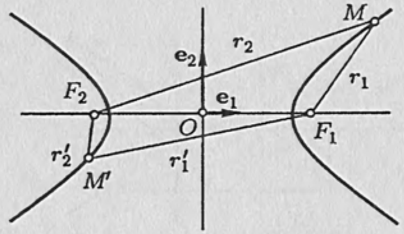

Рис. 35. $r_2 - r_1 = 2a$; $r_1' - r_2' = 2a$

Отношение $\varepsilon = c/a$, как и для эллипса, называется *эксцентриситетом*. У гиперболы $\varepsilon > 1$.

Предложение 9. *Расстояния от произвольной точки $M(x, y)$ на гиперболе до каждого из фокусов следующим образом зависят от ее абсциссы x:*

$$r_1 = |F_1M| = |a - \varepsilon x|, \quad r_2 = |F_2M| = |a + \varepsilon x|. \tag{11}$$

Доказательство этого утверждения почти дословно совпадает с доказательством предложения 2, и мы не будем его воспроизводить. Заметим, что равенства (11) можно подробнее записать так:

для правой ветви гиперболы $(x \geqslant a)$

$$r_1 = \varepsilon x - a, \quad r_2 = \varepsilon x + a;$$

для левой ветви гиперболы $(x \leqslant -a)$

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = -\varepsilon x - a.$$

Итак, для правой ветви $r_2 - r_1 = 2a$, а для левой ветви $r_1 - r_2 = 2a$. В обоих случаях

$$|r_2 - r_1| = 2a. \tag{12}$$

Предложение 10. *Для того чтобы точка M лежала на гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы разность ее расстояний до фокусов по абсолютной величине равнялась вещественной оси гиперболы $2a$.*

Необходимость условия уже доказана. Для доказательства достаточности условия его нужно представить в виде

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Дальнейшее отличается от доказательства предложения 3 только тем, что нужно воспользоваться равенством (10), а не (2).

Директрисами гиперболы называются прямые, задаваемые в канонической системе координат уравнениями

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}. \tag{13}$$

Директрисы лежат ближе к центру, чем вершины, и, следовательно, не пересекают гиперболу. Директриса и фокус, лежащие по одну сторону от центра, считаются соответствующими друг другу.

Предложение 11. *Для того чтобы точка лежала на гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы отношение ее расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету* ε (рис. 36).

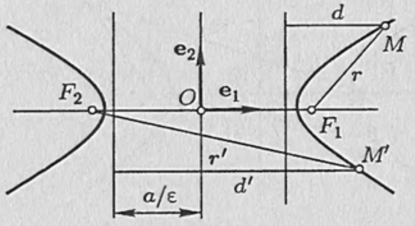

Рис. 36

Доказательство повторяет доказательство предложения 4. Докажем, например, необходимость условия для фокуса $F_2(-c, 0)$. Пусть $M'(x, y)$ — точка гиперболы. Расстояние от M' до директрисы с уравнением $x = -a/\varepsilon$ по формуле (9) § 3 гл. II равно

$$d' = \left|x + \frac{a}{\varepsilon}\right| = \frac{1}{\varepsilon}\,|\varepsilon x + a|.$$

Из формулы (11) мы видим теперь, что $r'/d' = \varepsilon$.

Уравнение касательной к гиперболе в точке $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на ней, выводится так же, как соответствующее уравнение (8) для эллипса. Оно имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{14}$$

Предложение 12. *Касательная к гиперболе в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *есть биссектриса угла между отрезками, соединяющими эту точку с фокусами.*

Доказательство почти не отличается от доказательства предложения 5. Рекомендуем читателю полностью провести доказательства этого и остальных утверждений, здесь сформулированных, но не доказанных для гиперболы.

3. Парабола. Параболой мы назвали линию, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат определяется каноническим уравнением

$$y^2 = 2px \tag{15}$$

при условии $p > 0$.

Из уравнения (15) вытекает, что для всех точек параболы $x \geqslant 0$. Парабола проходит через начало канонической системы координат. Эта точка называется *вершиной* параболы.

Форма параболы известна из курса средней школы, где она встречается в качестве графика функции $y = ax^2$. Отличие уравнений объясняется тем, что в канонической системе координат по сравнению с прежней оси координат поменялись местами, а коэффициенты связаны равенством $2p = a^{-1}$.

Фокусом параболы называется точка F с координатами $(p/2, 0)$ в канонической системе координат.

Директрисой параболы называется прямая с уравнением $x = -p/2$ в канонической системе координат (PQ на рис. 37).

Предложение 13. *Расстояние от точки* $M(x, y)$, *лежащей на параболе, до фокуса равно*

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{16}$$

Для доказательства вычислим квадрат расстояния от точки $M(x, y)$ до фокуса по координатам этих точек: $r^2 = (x - p/2)^2 + y^2$ и подставим сюда y^2 из канонического уравнения параболы. Мы получаем

$$r^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Отсюда в силу $x \geqslant 0$ следует равенство (16).

Заметим, что расстояние от точки M до директрисы по формуле 9 § 2 гл. II также равно

$$d = x + \frac{p}{2}.$$

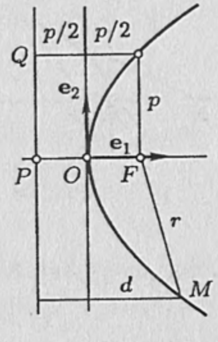

Рис. 37. $r = d$

Отсюда вытекает необходимость следующего условия.

Предложение 14. *Для того чтобы точка M лежала на параболе, необходимо и достаточно, чтобы она была одинаково удалена от фокуса и от директрисы этой параболы.*

Докажем достаточность. Пусть точка $M(x, y)$ одинаково удалена от фокуса и от директрисы параболы:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Возводя это уравнение в квадрат и приводя в нем подобные члены, мы получаем из него уравнение параболы (15). Это заканчивает доказательство.

Параболе приписывается эксцентриситет $\varepsilon = 1$. В силу этого соглашения формула

$$\frac{r}{d} = \varepsilon$$

верна и для эллипса, и для гиперболы, и для параболы.

Выведем уравнение касательной к параболе в точке $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на ней. Пусть $y_0 \neq 0$. Через точку M_0 проходит график функции $y = f(x)$, целиком лежащий на параболе. (Это $y = \sqrt{2px}$ или же $y = -\sqrt{2px}$, смотря по знаку y_0.) Для функции $f(x)$ выполнено тождество $(f(x))^2 = 2px$, дифференцируя которое имеем $2f(x)f'(x) = 2p$. Подставляя $x = x_0$ и $f(x_0) = y_0$, находим $f'(x_0) = p/y_0$. Теперь мы можем написать уравнение касательной к параболе

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0).$$

Упростим его. Для этого раскроем скобки и вспомним, что $y_0^2 = 2px_0$. Теперь уравнение касательной принимает окончательный вид

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{17}$$

Заметим, что для вершины параболы, которую мы исключили, положив $y_0 \neq 0$, уравнение (17) превращается в уравнение $x = 0$, т. е. в уравнение касательной в вершине. Поэтому уравнение (17) справедливо для любой точки на параболе.

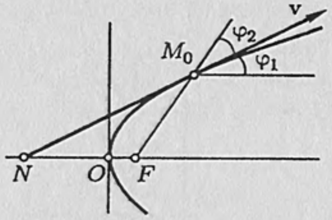

Рис. 38

Предложение 15. *Касательная к параболе в точке M_0 есть биссектриса угла, смежного с углом между отрезком, который соединяет M_0 с фокусом, и лучом, выходящим из этой точки в направлении оси параболы* (рис. 38).

Доказательство Рассмотрим касательную в точке $M_0(x_0, y_0)$. Из уравнения (17) получаем ее направляющий вектор $\mathbf{v}(y_0, p)$. Значит, $(\mathbf{v}, \mathbf{e}_1) = y_0$ и $\cos\varphi_1 = y_0/|\mathbf{v}|$. Вектор $\overrightarrow{FM_0}$ имеет компоненты $x_0 - p/2$ и y_0, а потому

$$(\overrightarrow{FM_0}, \mathbf{v}) = x_0 y_0 - \frac{p}{2} y_0 + p y_0 = y_0\Big(x_0 + \frac{p}{2}\Big).$$

Но $|\overrightarrow{FM_0}| = x_0 + p/2$. Следовательно, $\cos\varphi_2 = y_0/|\mathbf{v}|$. Это заканчивает доказательство.

Заметим, что $|FN| = |FM_0|$ (см. рис. 38).

Упражнения

1. Докажите, что вершины гиперболы и точки пересечения ее асимптот с директрисами лежат на одной окружности.

2. Фокус эллипса (гиперболы или параболы) делит проходящую через него хорду на отрезки длины u и v. Докажите, что сумма $1/u + 1/v$ постоянна.

3. Выведите уравнение эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат, приняв за полюс фокус, а за полярную ось — луч, лежащий на оси симметрии и не пересекающий директрису, соответствующую данному фокусу.

4. На плоскости нарисованы эллипс и парабола вместе с их осями симметрии. Как с помощью циркуля и линейки построить их фокусы и директрисы? Тот же вопрос относительно гиперболы, у которой нарисованы асимптоты. (Задача построения осей симметрии и асимптот решается на основании материала § 3.)

5. Пусть u и v — длины двух взаимно перпендикулярных радиусов эллипса. Найдите сумму $1/u^2 + 1/v^2$.

6. Найдите кратчайшее расстояние от параболы $y^2 = 12x$ до прямой $x - y + 7 = 0$.

7. Докажите, что отрезок касательной, заключенный между асимптотами гиперболы, делится пополам точкой касания.

8. В уравнение касательной к эллипсу (8) в качестве x_0 и y_0 подставлены координаты точки, лежащей не на эллипсе, а вне эллипса. Как расположена получившаяся прямая?

9. Из точки на директрисе проведены две касательные к параболе. Докажите, что они взаимно перпендикулярны, и отрезок, соединяющий точки касания, проходит через фокус.

§ 3. Линия второго порядка, заданная общим уравнением

1. Пересечение линии второго порядка и прямой. Рассмотрим линию второго порядка, заданную общим уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

в декартовой системе координат, и исследуем пересечение этой линии с произвольной прямой

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t. \tag{2}$$

Значения параметра t, соответствующие точкам пересечения, должны удовлетворять уравнению, получаемому подстановкой (2) в (1):

$$A(x_0 + \alpha t)^2 + 2B(x_0 + \alpha t)(y_0 + \beta t) + C(y_0 + \beta t)^2 + \\ + 2D(x_0 + \alpha t) + 2E(y_0 + \beta t) + F = 0. \tag{3}$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, мы получим уравнение

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \tag{4}$$

в котором

$$P = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2, \tag{5}$$

$$Q = (Ax_0 + By_0 + D)\alpha + (Bx_0 + Cy_0 + E)\beta, \tag{6}$$

или, при другой группировке слагаемых,

$$Q = (A\alpha + B\beta)x_0 + (B\alpha + C\beta)y_0 + D\alpha + E\beta. \tag{7}$$

Свободный член — это значение многочлена при $t = 0$, т. е.

$$R = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F = 0. \tag{8}$$

Вообще говоря, уравнение (4) квадратное, имеет не больше двух корней, и прямая пересекает линию или в двух точках, или в одной точке (кратные корни), или не пересекает ее (комплексные корни). Но возможны "исключительные" прямые, для которых $P = 0$, т. е.

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = 0, \tag{9}$$

и, следовательно, уравнение (4) является линейным. В этом случае оно имеет один корень при $Q \neq 0$, а при $Q = 0$ либо выполнено тождественно (если и $R = 0$), либо не имеет решений. Следовательно, "исключительные" прямые или пересекают линию в единственной точке, или лежат на ней целиком, или не имеют с ней общих точек.

В равенство (9) не входят координаты начальной точки прямой. Кроме того, оно остается справедливым, если умножить α и β на общий ненулевой множитель.

Определение. Направление, определяемое вектором, компоненты которого удовлетворяют уравнению (9), называется *асимптотическим направлением* линии второго порядка.

2. Тип линии. Выясним, сколько асимптотических направлений может иметь линия второго порядка. Обозначив

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix},$$

сформулируем следующее

Предложение 1. *Линия второго порядка имеет два асимптотических направления, если $\delta < 0$, одно, если $\delta = 0$, и ни одного, если $\delta > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть $A = C = 0$. Тогда $B \neq 0$ и $\delta = -B^2 < 0$. Уравнение (9) имеет вид $2B\alpha\beta = 0$, и ему удовлетворяют векторы $(1, 0)$ и $(0, 1)$.

2) Пусть $C \neq 0$. Тогда вектор $(0, 1)$ не является решением этого уравнения, и каждое решение можно задать угловым коэффициентом $k = \beta/\alpha$, удовлетворяющим уравнению $Ck^2 + 2Bk + A = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $B^2 - AC = -\delta$. Следовательно, оно имеет два вещественных корня при $\delta < 0$, один корень при $\delta = 0$ и не имеет вещественных корней при $\delta > 0$.

3) Случай $A \neq 0$ исследуется аналогично случаю 2, только нужно рассматривать не угловой коэффициент, а отношение α/β.

Поскольку разобранные выше случаи исчерпывают все возможности, предложение доказано.

От противного нетрудно проверить, что и обратно число асимптотических направлений определяет знак δ.

Мы определили асимптотические направления при помощи аналитического условия (9). Поэтому в принципе при изменении системы координат асимптотическое направление могло бы перестать быть асимптотическим, или, наоборот, обыкновенное направление стать асимптотическим. Из геометрического смысла асимптотических направлений видно, что в действительности асимптотические направления не зависят от выбора системы координат.

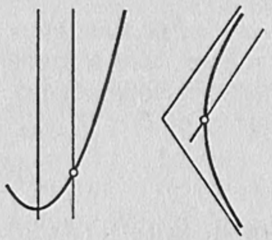

Рис. 39

Используя канонические уравнения, легко проверить, что эллипс не имеет асимптотических направлений, парабола имеет одно, а гипербола — два асимптотических направления (рис. 39). Поэтому линии второго порядка называются линиями *гиперболического*, *параболического* или *эллиптического* типа, смотря по тому, имеют они два, одно или не имеют ни одного асимптотического направления.

Для линий гиперболического типа $\delta < 0$, для параболического типа $\delta = 0$, а для эллиптического $\delta > 0$.

3. Диаметр линии второго порядка. Назовем *хордой* любой отрезок, концы которого лежат на линии, а остальные точки на ней не лежат. Таким образом, хорда не может иметь асимптотического направления.

Предположим, что рассматриваемая линия второго порядка имеет по крайней мере одну хорду. Этому условию удовлетворяют эллипсы, гиперболы, пары пересекающихся прямых, параболы и пары параллельных прямых.

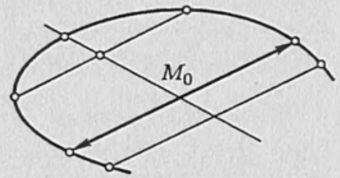

Рис. 40

Фиксируем какое-нибудь неасимптотическое направление и исследуем множество середин хорд, имеющих это направление. Если начальная точка $M_0(x_0, y_0)$ секущей (2) находится в середине хорды, то корни уравнения (4) равны по абсолютной величине и отличаются знаком (рис. 40). Это будет так в том и только том случае, когда $Q = 0$. Используя (7), мы получаем, что середины хорд направления (α, β) *) лежат на прямой

$$(A\alpha + B\beta)x + (B\alpha + C\beta)y + D\alpha + E\beta = 0. \tag{10}$$

Определение. Прямая (10) называется *диаметром* линии второго порядка, сопряженным направлению (α, β).

Стоит обратить внимание на то, что диаметром называется вся прямая. Это не означает, что середины хорд заполняют ее целиком. Так может быть, но возможно также, что множество середин хорд есть, например, отрезок или луч.

Конечно, остается сомнение, действительно ли уравнение (10) определяет прямую: не окажутся ли в нем коэффициенты при переменных оба равными нулю? Допустим, что это так, т. е.

$$A\alpha + B\beta = 0, \quad B\alpha + C\beta = 0.$$

Умножим первое из этих равенств на α, второе — на β и сложим. Мы получим равенство (9), которое по предположению не имеет места. Следовательно, уравнение (10) определяет прямую.

4. Центр линии второго порядка. Обозначим левую часть уравнения (1) через $\Phi(x, y)$ и введем

Определение. Точка $O(x_0, y_0)$ называется *центром* линии второго порядка $\Phi(x, y) = 0$, если для любого вектора $\mathbf{a}(\alpha, \beta)$ выполнено равенство

$$\Phi(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = \Phi(x_0 - \alpha, y_0 - \beta). \tag{11}$$

По-видимому, это определение зависит от выбора системы координат, так как в нем участвует не линия, а многочлен, стоящий в левой части ее уравнения. Допустим, что координаты (x_0, y_0) точки O в некоторой системе координат удовлетворяют уравнению (11). Будут ли

*) Мы обозначаем направление компонентами ненулевого вектора, имеющего это направление. Ясно, что α и β интересуют нас с точностью до общего множителя.

ее координаты $(\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0)$ в другой системе координат удовлетворять равенству того же вида для многочлена $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, задающего ту же линию в новой системе координат? Легко видеть, что это так, потому что многочлен $\widetilde{\Phi}$ так и выбирается, чтобы для координат любой точки выполнялось равенство $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \Phi(x, y)$. Нам остается только выписать это равенство для точек, получаемых из O сдвигом на векторы $\mathbf{a}$ и $-\mathbf{a}$.

Ниже мы докажем, что в том случае, когда линия содержит хоть одну точку, центры линии и только они являются ее центрами симметрии. Однако понятие центра несколько более общее: линии, являющиеся пустыми множествами, имеют вполне определенные центры, хотя говорить об их центрах симметрии смысла нет. Например, каждая точка прямой $y = 0$ является центром линии с уравнением $y^2 + 1 = 0$.

Получим систему уравнений для координат центра. С этой целью напишем подробнее равенство (11). Его левая часть равна

$$A(x_0 + \alpha)^2 + 2B(x_0 + \alpha)(y_0 + \beta) + \\ + C(y_0 + \beta)^2 + 2D(x_0 + \alpha) + 2E(y_0 + \beta) + F.$$

Правая часть отличается от левой только знаками у α и β. Поэтому при вычитании $\Phi(x_0 - \alpha, y_0 - \beta)$ из $\Phi(x_0 + \alpha, y_0 + \beta)$ уничтожаются все члены, кроме тех, в которые α и β входят в первой степени, а члены с первыми степенями удвоятся. После упрощений мы получаем

$$(Ax_0 + By_0 + D)\alpha + (Bx_0 + Cy_0 + E)\beta = 0. \qquad (12)$$

Но равенство (11), а вместе с ним и равносильное равенство (12) имеет место при любых α и β, в частности, при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и при $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Отсюда следует, что координаты (x_0, y_0) центра должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D &= 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E &= 0. \end{aligned} \qquad (13)$$

Легко видеть, что и обратно, если справедливы равенства (13), то, умножая их на произвольные числа α и β и складывая, мы получим (12), а тем самым и (11).

Исследуем, обязательно ли существуют центры у линии второго порядка, а если они существуют, то сколько их и как они расположены. Система уравнений (13) согласно предложению 9 § 2 гл. II имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (14)$$

Таким образом, условие $\delta \neq 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы линия второго порядка имела единственный центр.

Линии второго порядка, имеющие единственный центр, называются *центральными*.

Полученное условие показывает, что центральными являются линии эллиптического и гиперболического типов.

Условие $\delta = 0$ характеризует нецентральные линии. Это — линии параболического типа. При условии $\delta = 0$ система (13) либо не имеет решения, либо равносильна одному из составляющих ее уравнений (предложение 9 § 2 гл. II). Это значит, что нецентральная линия либо не имеет центра (парабола), либо ее центры заполняют прямую линию (пары параллельных прямых, вещественных и мнимых, и пары совпавших прямых).

Предложение 2. *Если линия второго порядка не является пустым множеством и имеет центр $O(x_0, y_0)$, то он — ее центр симметрии.*

В самом деле, рассмотрим произвольную точку линии $M(x, y)$ и докажем, что симметричная ей относительно O точка $M_1(x_1, y_1)$ также лежит на линии. Точка M_1 определяется равенством $\overrightarrow{OM_1} = -\overrightarrow{OM}$. Если (α, β) — координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, то $x = x_0 + \alpha$, $y = y_0 + \beta$, а $x_1 = x_0 - \alpha$, $y_1 = y_0 - \beta$. Теперь ясно, что в силу (11) из $\Phi(x, y) = 0$ следует $\Phi(x_1, y_1) = 0$. Предложение доказано.

Предложение 3. *Если линия содержит хотя бы одну точку и имеет центр симметрии $O(x_0, y_0)$, то O является центром.*

Доказательство. Рассмотрим пересечение линии с прямой, проходящей через O, приняв эту точку за начальную точку прямой. Имеются две возможности:

1) Точка O лежит на линии. Пусть прямая имеет неасимптотическое направление. Тогда O — единственная точка пересечения, так как иначе с учетом симметрии точек пересечения было бы не меньше трех. Следовательно, уравнение (4) имеет кратный корень $t = 0$, откуда вытекает $Q = 0$. Итак, координаты точки O удовлетворяют равенству (12) при любых α и β, соответствующих неасимптотическим направлениям. Выберем два различных неасимптотических направления (α, β) и (α', β') и рассмотрим равенства

$$\begin{aligned} (Ax_0 + By_0 + D)\alpha + (Bx_0 + Cy_0 + E)\beta &= 0, \\ (Ax_0 + By_0 + D)\alpha' + (Bx_0 + Cy_0 + E)\beta' &= 0 \end{aligned}$$

как систему уравнений с коэффициентами $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$, причем $(\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0)$. Мы получаем равенства (13), как и требовалось.

2) Точка O не лежит на линии. Если прямая пересекает линию в точке M, которой соответствует значение параметра $t_1 \neq 0$, то существует симметричная точка пересечения со значением параметра $-t_1$. Тогда $Pt_1^2 + 2Qt_1 + R = 0$ и $Pt_1^2 - 2Qt_1 + R = 0$, откуда следует $Q = 0$.

Таким образом, если линия имеет точки пересечения с двумя различными прямыми, проходящими через O, то, как и выше, мы можем получить равенства (13) для координат O. Докажем, что такие прямые обязательно найдутся. Действительно, в противном случае все точки линии лежат на одной прямой. Согласно теореме 1 § 1 линии только двух классов обладают этим свойством: пары совпавших прямых и пары мнимых пересекающихся прямых. Но и для того, и для другого класса все центры симметрии принадлежат линии, что противоречит сделанному предположению. Предложение доказано.

5. Сопряженные направления. Направление (α', β'), определяемое диаметром, сопряженным направлению (α, β), называется *сопряженным* направлению (α, β). Компоненты (α', β'), направляющего вектора диаметра (10) согласно предложению 6 § 2 гл. II удовлетворяют условию

$$(A\alpha + B\beta)\alpha' + (B\alpha + C\beta)\beta' = 0 \tag{15}$$

или

$$A\alpha\alpha' + B(\alpha'\beta + \alpha\beta') + C\beta\beta' = 0. \tag{16}$$

В последнее выражение пары чисел (α, β) и (α', β') входят симметричным образом. Поэтому имеет место

Предложение 4. *Если направление (α', β'), сопряженное с (α, β),*

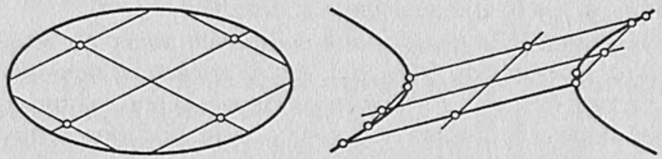

Рис. 41

не является асимптотическим, то сопряженным для (α', β') будет направление (α, β) (рис. 41).

Возникает вопрос, при каких условиях направление, сопряженное какому-нибудь направлению (α, β) может оказаться асимптотическим. Это легко выяснить. Из равенства (15) следует, что в качестве α' и β' можно выбрать соответственно $-(B\alpha + C\beta)$ и $(A\alpha + B\beta)$. Подставим это в уравнение (9) для асимптотических направлений:

$$A(B\alpha + C\beta)^2 - 2B(B\alpha + C\beta)(A\alpha + B\beta) + C(A\alpha + B\beta)^2 = 0.$$

После преобразований получаем $(AC - B^2) \times (A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2) = 0$. Поскольку исходное направление не асимптотическое, это произведение может обратиться в нуль только за счет первого сомножителя. Мы получаем

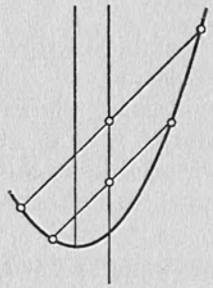

Рис. 42. Сопряженные направления у параболы

Предложение 5. *Если линия не центральная ($\delta = 0$), то для любого направления (α, β) сопряженное направление — асимптотическое* (рис. 42). *Если линия центральная ($\delta \neq 0$), то направление, сопряженное любому направлению, не асимптотическое.*

6. Главные направления. Если диаметр перпендикулярен хордам, которым он сопряжен, то он является осью симметрии рассматриваемой линии. Введем следующее

Определение. Направление (α, β) и направление (α', β') сопряженного ему диаметра называются *главными* направлениями, если они перпендикулярны.

Если система координат декартова прямоугольная, то для главного направления компоненты (α, β) должны быть пропорциональны коэффициентам уравнения (10), т. е. должно существовать такое число λ, что

$$A\alpha + B\beta = \lambda\alpha, \quad B\alpha + C\beta = \lambda\beta. \tag{17}$$

Исключая λ, мы получаем уравнение для α и β:

$$(A - C)\alpha\beta + B(\beta^2 - \alpha^2) = 0. \tag{18}$$

Если положить $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = \sin\varphi$, то уравнение (18) превратится в уравнение (2) § 1, которое, как мы видели, обязательно имеет решение относительно φ. Поэтому имеет место

Предложение 6. *Каждая линия второго порядка имеет хотя бы одну пару главных направлений.*

Более подробное исследование уравнения (18) показывает, что либо эта пара единственная, либо каждая пара перпендикулярных направлений является главной. Последний случай имеет место, когда $A = C$, $B = 0$. При этом уравнение линии приводится к одному из канонических видов: $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = -a^2$ или $x^2 + y^2 = 0$. В двух последних случаях линия не имеет хорд, и результат лишен геометрического смысла.

7. Касательная к линии второго порядка. Как известно, касательной к какой-либо линии называется предельное положение секущей, когда хорда стягивается в точку. Выведем уравнение касательной к линии второго порядка, заданной уравнением (1). Дадим предварительно следующее

Определение. *Особой точкой* линии второго порядка называется ее центр, который лежит на линии.

Особыми точками являются: точка пересечения пары пересекающихся прямых, единственная точка пары мнимых пересекающихся прямых и каждая точка пары совпавших прямых. В особой точке касательная не определена. Если точка лежит на прямой, входящей в состав линии, то касательная в этой точке совпадает с прямой. Исключив эти случаи, мы фактически ограничиваемся рассмотрением касательных к эллипсам, гиперболам и параболам.

Рассмотрим точку $M_0(x_0, y_0)$, лежащую на линии L, и прямую с начальной точкой M_0, заданную уравнением (2). С нашей точки зрения, приведенное выше определение касательной означает, что уравнение (4), определяющее точки пересечения L и прямой, имеет два совпадающих корня.

Так как начальная точка принадлежит L, в уравнении (4) $R = 0$, и один из его корней равен нулю. Корни совпадают, если и второй корень равен нулю, для чего необходимо, чтобы $Q = 0$. Если при этом окажется, что и $P = 0$, то прямая принадлежит линии второго порядка. Этот случай мы исключили, и потому уравнение имеет кратный корень $t = 0$ в том и только том случае, когда $Q = 0$. Мы рассматриваем равенство $Q = 0$ как условие, определяющее направляющий вектор касательной:

$$(Ax_0 + By_0 + D)\alpha + (Bx_0 + Cy_0 + E)\beta = 0. \qquad (19)$$

Так как M_0 не особая точка, обе скобки здесь одновременно в нуль не обращаются, и условие (19) определяет α и β с точностью до общего множителя. Точка $M(x, y)$ лежит на касательной тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарен $\mathbf{a}(\alpha, \beta)$, т. е. его координаты $x - x_0$ и $y - y_0$ удовлетворяют тому же условию, что и (α, β):

$$(Ax_0 + By_0 + D)(x - x_0) + (Bx_0 + Cy_0 + E)(y - y_0) = 0. \qquad (20)$$

Это и есть уравнение касательной к линии L в точке M_0, лежащей на линии. Уравнение (20) можно записать и иначе, если заметить, что координаты M_0 удовлетворяют уравнению (1) и, следовательно,

$$(Ax_0 + By_0 + D)x_0 + (Bx_0 + Cy_0 + E)y_0 + Dx_0 + Ey_0 + F = 0.$$

Прибавляя это равенство к (20) и группируя слагаемые, получим окончательное уравнение

$$Axx_0 + B(xy_0 + x_0y) + Cyy_0 + D(x + x_0) + E(y + y_0) + F = 0. \quad (21)$$

8. Особые точки. Напомним, что особая точка линии второго порядка — это ее центр, лежащий на линии. Исследуем, при каких условиях линия второго порядка имеет особую точку. Для координат (x_0, y_0) особой точки должны быть справедливы равенства

$$Ax_0 + By_0 + D = 0, \quad Bx_0 + Cy_0 + E = 0,$$
$$Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F = 0.$$

Умножим первое из них на x_0, второе на y_0 и вычтем из третьего. Мы получим эквивалентную систему уравнений

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D &= 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E &= 0, \\ Dx_0 + Ey_0 + F &= 0. \end{aligned} \qquad (22)$$

Выберем какой-нибудь базис в пространстве и рассмотрим вспомогательные векторы $\mathbf{p}(A, B, D)$, $\mathbf{q}(B, C, E)$ и $\mathbf{r}(D, E, F)$. Равенства (22) представляют собой координатную запись векторного равенства

$$x_0\mathbf{p} + y_0\mathbf{q} = -\mathbf{r}. \qquad (23)$$

Отсюда следует, что при наличии особой точки векторы $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ компланарны, и потому

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0. \qquad (24)$$

Если линия центральная, то векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ не коллинеарны, и условие компланарности (24) равносильно существованию разложения (23), т. е. существованию решения системы (22). Мы получили

Предложение 7. *Центральная линия имеет особую точку тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$.*

Итак, сочетание $\delta < 0$, $\Delta = 0$ характеризует пары пересекающихся прямых, а $\delta > 0$, $\Delta = 0$ — пары мнимых пересекающихся прямых.

Рассмотрим нецентральные линии. Для них существует центр, хотя бы не являющийся особой точкой, тогда и только тогда, когда $\Delta = 0$. В этом (и только этом) случае векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ коллинеарны. Действительно, так как $\delta = 0$, по предложению 9 § 2 гл. II, если система уравнений (13) имеет решение, она равносильна одному из составляющих ее уравнений: либо коэффициенты и свободный член одного из уравнений равны нулю, либо коэффициенты и свободные члены обоих уравнений пропорциональны. Тогда $\Delta = 0$ независимо от $\mathbf{r}$.

Обратно, пусть для нецентральной линии $\Delta = 0$. Докажем, что $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ коллинеарны, что равносильно совместности уравнений центра. Действительно, в противном случае $\mathbf{r}$ по ним раскладывается, и согласно (23) существует особая точка. Она — центр, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ коллинеарны, и мы получаем противоречие.

Предложение 8. *Для нецентральных линий условие $\Delta = 0$ равносильно существованию центра.*

Итак, сочетание $\delta = \Delta = 0$ характеризует пары параллельных прямых (вещественных, мнимых или совпавших).

Из предложений 7 и 8 следует, что равенство $\Delta = 0$ является инвариантным: оно не может измениться при переходе к другой системе координат.

Упражнения

1. Линия второго порядка описана около параллелограмма, если его вершины лежат на линии, а остальные точки на ней не лежат. Докажите, что такая линия обязательно центральная, и центр ее совпадает с центром параллелограмма.

2. На плоскости нарисованы эллипс, гипербола и парабола. Как с помощью циркуля и линейки построить их оси симметрии и асимптоты гиперболы?

3. Докажите, что сумма квадратов длин хорд, лежащих на сопряженных диаметрах эллипса, постоянна.

4. Не приводя уравнение к каноническому виду, найдите центр и асимптоты гиперболы $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x + 2y - 9 = 0$.

5. Не приводя уравнение к каноническому виду, укажите класс линии

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x + 2y - 1 = 0.$$

6. Как разложить на множители левую часть уравнения из упр. 5?

7. Напишите уравнение касательной к линии $x^2 - 2xy + 3y^2 = 3$ в точке $M_0(0, 1)$.

§ 4. Поверхности второго порядка

Подобно тому как в §2 были описаны все наиболее интересные линии второго порядка, в настоящем параграфе мы опишем важнейшие поверхности второго порядка, а полную классификацию таких поверхностей отложим до гл. VIII. Составить себе общее представление о большинстве поверхностей второго порядка можно, рассматривая поверхности вращения линий второго порядка вокруг их осей симметрии.

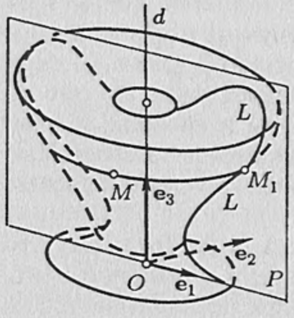

Рис. 43

1. Поверхности вращения. Поверхность S называется *поверхностью вращения* с осью d, если она составлена из окружностей, которые имеют центры на прямой d и лежат в плоскостях, перпендикулярных данной прямой. В основе этого определения лежит следующее представление. Рассмотрим линию L, которая лежит в плоскости P, проходящей через ось вращения d (рис. 43), и будем вращать ее вокруг этой оси. Каждая точка линии опишет окружность, а вся линия — поверхность вращения.

Выберем начало декартовой прямоугольной системы координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ на оси d, вектор $\mathbf{e}_3$ направим вдоль d, а вектор $\mathbf{e}_1$ поместим в плоскости P. Таким образом, $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ — декартова система координат в плоскости P. Пусть линия L имеет в этой системе координат уравнение $f(x, z) = 0$.

Рассмотрим точку $M(x, y, z)$. Через нее проходит окружность, которая имеет центр на оси d и лежит в плоскости, перпендикулярной этой оси. Радиус окружности равен расстоянию от M до оси, т. е. $\sqrt{x^2 + y^2}$. Точка M лежит на поверхности вращения тогда и только тогда, когда на указанной окружности имеется точка M_1, принадлежащая вращаемой линии L.

Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит в плоскости P, и потому $y_1 = 0$. Кроме того, $z_1 = z$ и $|x_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$, так как M_1 лежит на той же окружности, что и M. Координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению линии L: $f(x_1, z_1) = 0$. Подставляя в это уравнение x_1 и z_1, мы получаем условие на координаты точки M, необходимое и достаточное

для того, чтобы M лежала на поверхности вращения S: равенство

$$f\Big(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\Big) = 0 \qquad (1)$$

должно быть выполнено хотя бы при одном из двух знаков перед корнем. Это условие, которое можно записать также в виде

$$f\Big(\sqrt{x^2 + y^2}, z\Big) f\Big(-\sqrt{x^2 + y^2}, z\Big) = 0, \qquad (2)$$

и является уравнением поверхности вращения линии L вокруг оси d.

2. Эллипсоид. Рассмотрим поверхности, которые получаются при вращении эллипса вокруг его осей симметрии. Направив вектор $\mathbf{e}_3$ сначала вдоль малой оси эллипса, а затем вдоль большой оси, мы получим уравнения эллипса в следующих видах:

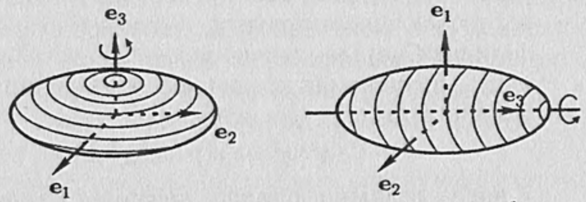

Рис. 44. Сжатый (*а*) и вытянутый (*б*) эллипсоиды вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1.$$

(Здесь через c обозначена малая полуось эллипса.) В силу формулы (1) уравнениями соответствующих поверхностей вращения будут

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{z^2}{a^2} + \frac{x^2 + y^2}{c^2} = 1 \quad (a > c). \qquad (3)$$

Поверхности с такими уравнениями называются соответственно *сжатым* и *вытянутым эллипсоидами вращения* (рис. 44).

Каждую точку $M(x, y, z)$ на сжатом эллипсоиде вращения сдвинем к плоскости $y = 0$ так, чтобы расстояние от точки до этой плоскости уменьшилось в постоянном для всех точек отношении $\lambda < 1$. После сдвига точка попадет в положение $M'(x', y', z')$, где $x' = x$, $y' = \lambda y$, $z' = z$. Таким образом, точки эллипсоида вращения переходят в точки поверхности с уравнением

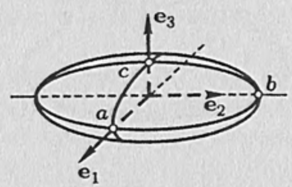

Рис. 45

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1, \qquad (4)$$

где $b = \lambda a$. Поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат имеет уравнение (4), называется *эллипсоидом* (рис. 45). Если случайно окажется, что $b = c$, мы получим снова эллипсоид вращения, но уже вытянутый.

Эллипсоид так же, как и эллипсоид вращения, из которого он получен, представляет собой замкнутую ограниченную поверхность. Из уравнения (4) видно, что начало канонической системы координат — центр симметрии эллипсоида, а координатные плоскости — его плоскости симметрии.

Эллипсоид можно получить из сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ сжатиями к плоскостям $y = 0$ и $z = 0$ в отношениях $\lambda = b/a$ и $\mu = c/a$.

В этом параграфе нам часто придется прибегать к сжатию, и мы не будем его каждый раз описывать столь подробно.

3. Конус второго порядка. Рассмотрим на плоскости P пару пересекающихся прямых, задаваемую в системе координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ уравнением $a^2x^2 - c^2z^2 = 0$. Поверхность, получаемая вращением этой линии вокруг оси аппликат, имеет уравнение

$$a^2(x^2 + y^2) - c^2z^2 = 0 \tag{5}$$

и носит название *прямого кругового конуса* (рис. 46). Сжатие к плоскости $y = 0$ переводит прямой круговой конус в поверхность с уравнением

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0, \tag{6}$$

называемую *конусом второго порядка.*

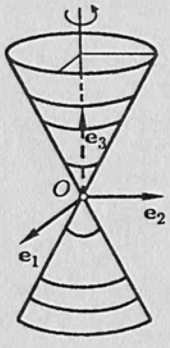

Рис. 46

Обратите внимание на то, что левая часть уравнения (6) — однородная функция, и поверхность является конусом в смысле определения, введенного в § 1 гл. II.

4. Однополостный гиперболоид. *Однополостный гиперболоид вращения* — это поверхность вращения гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

вокруг той оси, которая ее не пересекает. По формуле (1) мы получаем уравнение этой поверхности (рис. 47)

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{7}$$

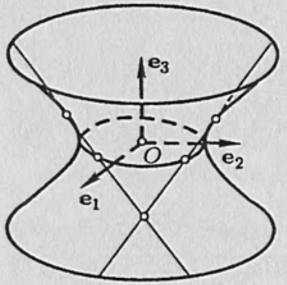

Рис. 47

В результате сжатия однополостного гиперболоида вращения к плоскости $y = 0$ мы получаем *однополостный гиперболоид* с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{8}$$

Интересное свойство однополостного гиперболоида — наличие у него *прямолинейных образующих.* Так называются прямые линии, все-

ми своими точками лежащие на поверхности. Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две прямолинейные образующие, уравнения которых можно получить следующим образом.

Уравнение (8) можно переписать в виде

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

Рассмотрим прямую линию с уравнениями

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \mu\left(1 - \frac{y}{b}\right), \end{aligned} \tag{9}$$

где λ и μ — некоторые числа ($\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$). Координаты каждой точки прямой удовлетворяют обоим уравнениям, а следовательно, и уравнению (8), которое получается их почленным перемножением. Поэтому каковы бы ни были λ и μ, прямая с уравнениями (9) лежит на однополостном гиперболоиде. Таким образом, система (9) определяет семейство прямолинейных образующих.

Второе семейство прямолинейных образующих определяется системой

$$\begin{aligned} \mu'\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) &= \lambda'\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \lambda'\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) &= \mu'\left(1 + \frac{y}{b}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Покажем на примере, как найти образующие, проходящие через данную точку поверхности. Рассмотрим поверхность $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ и точку $M_0(1,1,1)$ на ней. Подставляя координаты M_0 в уравнения (9), мы получаем условия на λ и μ: $2\lambda = 2\mu$ и $0 \cdot \lambda = 0 \cdot \mu$. Первое из них определяет λ и μ с точностью до общего множителя, но только с такой точностью они и нужны. Подставляя эти значения в (9), получаем уравнения прямолинейной образующей

$$x + z = 1 + y, \quad x - z = 1 - y.$$

Она проходит через M_0, так как λ и μ так и выбирались, чтобы координаты M_0 удовлетворяли этой системе. Аналогично, подставляя координаты M_0 в (10), находим условия на λ' и μ': $2\mu' = 0$ и $2\mu' = 0$. Коэффициент λ' можно взять любым ненулевым, и мы приходим к уравнению второй образующей: $x = z$, $y = 1$.

Если вместе с гиперболой мы будем вращать ее асимптоты, то они опишут прямой круговой конус, называемый *асимптотическим конусом* гиперболоида вращения. При сжатии гиперболоида вращения его асимптотический конус сжимается в асимптотический конус общего однополостного гиперболоида.

5. Двуполостный гиперболоид. *Двуполостный гиперболоид вращения* — это поверхность, получаемая вращением гиперболы

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

вокруг той оси, которая ее пересекает. По формуле (1) мы получаем уравнение двуполостного гиперболоида вращения

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2+y^2}{a^2} = 1. \tag{11}$$

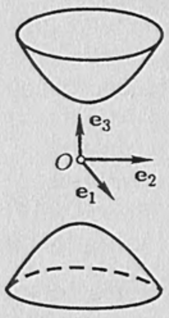

Рис. 48

В результате сжатия этой поверхности к плоскости $y=0$ получается поверхность с уравнением

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{12}$$

Поверхность, которая в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет уравнение вида (12), называется *двуполостным гиперболоидом* (рис. 48). Двум ветвям гиперболы здесь соответствуют две не связанные между собой части ("полости") поверхности, в то время как при построении однополостного гиперболоида вращения каждая ветвь гиперболы описывала всю поверхность.

Асимптотический конус двуполостного гиперболоида определяется так же, как и для однополостного.

6. Эллиптический параболоид. Вращая параболу $x^2 = 2pz$ вокруг ее оси симметрии, мы получаем поверхность с уравнением

$$x^2 + y^2 = 2pz. \tag{13}$$

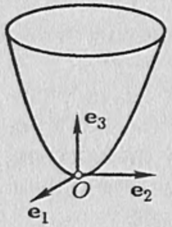

Рис. 49

Она называется *параболоидом вращения.* Сжатие к плоскости $y=0$ переводит параболоид вращения в поверхность, уравнение которой приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{14}$$

Поверхность, которая имеет такое уравнение в некоторой декартовой прямоугольной системе координат, называется *эллиптическим параболоидом* (рис. 49).

7. Гиперболический параболоид. По аналогии с уравнением (14) мы можем написать уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{15}$$

Поверхность, которая имеет уравнение вида (15) в некоторой декартовой прямоугольной системе координат, называется *гиперболическим параболоидом.*

Исследуем форму этой поверхности. Для этого рассмотрим ее сечение плоскостью $x=\alpha$ при произвольном α. В этой плоскости выберем декартову прямоугольную систему координат $O', \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ с началом в точке $O'(\alpha, 0, 0)$. Относительно этой системы координат линия пересечения имеет уравнение

$$-\frac{y^2}{b^2} = 2\Big(z - \frac{\alpha^2}{2a^2}\Big). \tag{16}$$

Эта линия — парабола, в чем легко убедиться, перенеся начало координат в точку O'' с координатами $(0, \alpha^2/(2a^2))$. (Координаты этой точки относительно исходной системы координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в пространстве равны $(\alpha, 0, \alpha^2/(2a^2))$.)

Точка O'', очевидно, является вершиной параболы, ось параболы параллельна вектору $\mathbf{e}_3$, а знак минус в левой части равенства (16) означает, что ветви параболы направлены в сторону, противоположную направлению $\mathbf{e}_3$. Заметим, что после переноса начала координат в точку O'' величина α не входит в уравнение параболы, и, следовательно, сечения гиперболического параболоида плоскостями $x=\alpha$ при всех α представляют собой равные параболы.

Будем теперь менять величину α и проследим за перемещением вершины параболы O'' в зависимости от α. Из приведенных выше координат точки O'' следует, что эта точка перемещается по линии с уравнениями

$$z = \frac{x^2}{2a^2}, \quad y = 0$$

в системе координат $O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Эта линия — парабола в плоскости $y=0$. Вершина параболы находится в начале координат, ось симметрии совпадает с осью аппликат, а ветви параболы направлены в ту же сторону, что и вектор $\mathbf{e}_3$.

Теперь мы можем построить гиперболический параболоид следующим образом: зададим две параболы и будем перемещать одну из них так, чтобы ее вершина скользила по другой, оси парабол были параллельны, параболы лежали во взаимно перпендикулярных плоскостях и ветви их были направлены в противоположные стороны. При таком перемещении подвижная парабола описывает гиперболический параболоид (рис. 50).

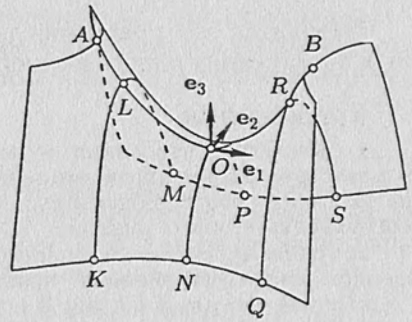

Рис. 50. OB — неподвижная парабола, KLM, NOP и QRS — разные положения подвижной параболы

Предоставим читателю проверить, что сечения гиперболического параболоида плоскостями с уравнениями $z=\alpha$ при всевозможных α — гиперболы. Эти сечения нарисованы на рис. 51.

Гиперболический параболоид, как и однополостный гиперболоид, имеет два семейства прямолинейных образующих (рис. 52). Уравнения одного семейства —

$$\lambda\Big(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\Big) = \mu, \quad \mu\Big(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\Big) = 2\lambda z,$$

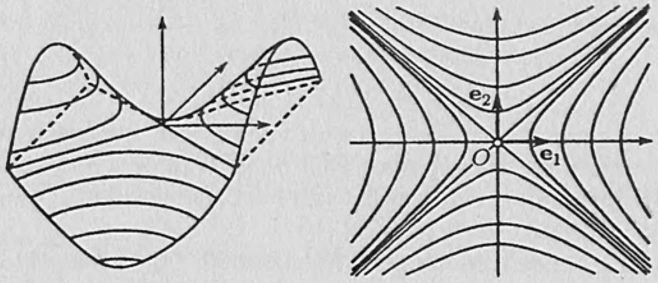

Рис. 51

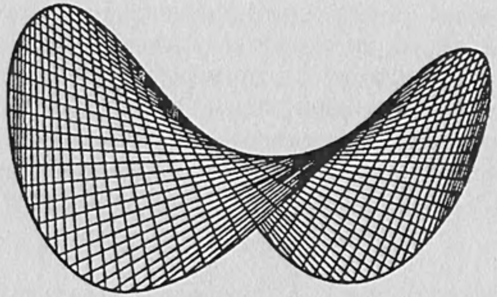

Рис. 52

а другого —

$$\lambda'\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\mu', \quad \mu'\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2\lambda' z.$$

Выводятся эти уравнения так же, как и уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида.

Упражнения

1. Докажите, что линия пересечения поверхности второго порядка с плоскостью, которая целиком на ней не лежит, есть алгебраическая линия не выше второго порядка. Сколько общих точек могут иметь прямая и поверхность второго порядка?

2. Найдите уравнение и определите вид поверхности, получаемой вращением вокруг оси аппликат прямой линии:

а) $x=1+t$, $y=3+t$, $z=3+t$; б) $x=1+t$, $y=1+t$, $z=3+t$.

3. Докажите, что прямолинейные образующие гиперболического параболоида, принадлежащие одному семейству, все параллельны какой-то одной плоскости.

4. На гиперболическом параболоиде с уравнением (15) лежат параболы $y=0$, $x^2=2a^2z$ и $x=0$, $y^2=-2b^2z$. Пусть точки A_1 и B_1 на первой параболе и точки A_2 и B_2 на второй все находятся на одинаковом расстоянии от плоскости $z=0$. Докажите, что прямые A_1B_2, A_1A_2, B_1A_2 и B_1B_2 являются прямолинейными образующими.

5. Найдите проекцию линии пересечения двуполостного гиперболоида $-x^2+y^2-z^2=1$ и конуса $5x^2-3y^2+4z^2=0$ на плоскость $z=0$.

6. Докажите, что никакая плоскость не пересекает эллиптический параболоид по гиперболе.

ГЛАВА V

МАТРИЦЫ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Матрицы

1. Определение. Мы будем называть *матрицей размеров* $m \times n$ совокупность mn чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов:

$$\begin{Vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{Vmatrix}$$

Числа, составляющие матрицу, мы будем называть *элементами* матрицы. Если число строк в матрице равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, а число строк — ее *порядком*. Остальные матрицы носят название *прямоугольных*.

Можно дать и такое определение матрицы. Рассмотрим два множества целых чисел $I = \{1, 2, ..., m\}$ и $J = \{1, 2, ..., n\}$. Через $I \times J$ обозначим множество всех пар вида (i, j), где $i \in I$, а $j \in J$. Матрицей называется числовая функция на $I \times J$, т. е. закон, сопоставляющий каждой паре (i, j) некоторое число a_j^i.

Для читателя, знакомого с программированием, заметим, что матрица — это в точности то же, что и двумерный массив.

Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковые размеры, и равны их элементы, стоящие на одинаковых местах.

Рассматривая произвольные матрицы, мы будем обозначать их элементы буквами с двумя индексами. Если оба индекса расположены внизу, то первый из них обозначает номер строки, а второй — номер столбца; если один из индексов расположен сверху, как в написанной выше матрице, то этот индекс обозначает номер строки. Не следует путать верхние индексы с показателями степени.

Матрицу размеров $1 \times n$, состоящую из одной строки, мы будем называть *строкой длины* n или просто строкой. Матрицу размеров $m \times 1$ называют *столбцом высоты* m или просто столбцом. Столбцы и строки мы будем обозначать полужирными буквами.

Часто бывает удобно записывать матрицу как столбец из строк

или как строку из столбцов. Пусть

$$\mathbf{a}_1 = \begin{Vmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{Vmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_2^m \end{Vmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{a}_n = \begin{Vmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{Vmatrix}.$$

Тогда написанную в начале матрицу можно записать в виде

$$\| \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{a}_n \|.$$

Аналогично, если $\mathbf{a}^1 = \| a_1^1 \ldots a_n^1 \|$, ..., $\mathbf{a}^m = \| a_1^m \ldots a_n^m \|$, то та же матрица записывается в виде

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу A размеров $m \times n$ и выберем какие-нибудь r номеров строк $i_1, ..., i_r$ и s номеров столбцов $j_1, ..., j_s$, причем будем предполагать, что номера выбраны в порядке возрастания: $i_1 < i_2 < ... < i_r$ и $j_1 < j_2 < ... < j_s$. Матрицу A' размеров $r \times s$, составленную из элементов A, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов, мы назовем *подматрицей* матрицы A. Итак,

$$A' = \begin{Vmatrix} a_{j_1}^{i_1} & \ldots & a_{j_s}^{i_1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{j_1}^{i_r} & \ldots & a_{j_s}^{i_r} \end{Vmatrix}.$$

Если матрица квадратная, то множество тех ее элементов a_i^i, у которых номер строки равен номеру столбца, называется *главной диагональю* или просто диагональю матрицы.

2. Транспонирование матриц. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

из m строк и n столбцов. Ей можно сопоставить матрицу B из n строк и m столбцов по следующему правилу. Элементы каждой строки матрицы A записываются в том же порядке в столбцы матрицы B, причем номер столбца равен номеру строки. Эту матрицу

$$B = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

называют *транспонированной* по отношению к A и обозначают A^T. Переход от A к A^T называют *транспонированием*.

Видно, что i-я строка B состоит из тех же элементов в том же порядке, что и i-й столбец A. Ясно также, что $(A^T)^T = A$.

Определение транспонированной матрицы можно записать в виде mn равенств, связывающих элементы матриц A и B:

$$b_{ij} = a_{ji} \quad (i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n).$$

3. Некоторые виды матриц. Введем определения некоторых часто употребляемых видов матриц. Все матрицы предполагаются квадратными.

1. Матрица A называется *симметричной* или *симметрической*, если $A^T = A$. Для такой матрицы $a_{ij} = a_{ji}$ при всех i и j — элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны.

2. Матрица A называется *кососимметричной* или *антисимметричной*, если $A^T = -A$. Для такой матрицы $a_{ij} = -a_{ji}$ при всех i и j — элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, отличаются знаком. Диагональные элементы равны нулю.

3. Матрица A называется *верхней треугольной*, если ее элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю: $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Аналогично определяется *нижняя треугольная* матрица: $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

4. Матрица A называется *диагональной*, если у нее равны нулю все недиагональные элементы: $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Другие частные виды матриц будем определять по мере необходимости.

4. Сложение и умножение на число. Пусть A и B — матрицы размеров $m \times n$. Мы можем сопоставить им третью матрицу C размеров $m \times n$, элементы которой c_{ij} связаны с элементами a_{ij} и b_{ij} матриц A и B равенствами

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n). \tag{1}$$

Определение. Матрица C, определяемая по A и B формулой (1), называется их *суммой* и обозначается $A + B$.

Определение. Матрица C, элементы которой c_{ij} равны произведениям элементов a_{ij} матрицы A на число α, называется *произведением* A на α и обозначается αA. Мы имеем

$$c_{ij} = \alpha a_{ij} \qquad (i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n). \tag{2}$$

Из свойств сложения и умножения чисел легко вытекает

Предложение 1. *Для любых матриц A, B, C и любых чисел α и β выполнены равенства*

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C),$$
$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$$
$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей*. Если O — нулевая матрица размеров $m \times n$, то для любой

матрицы тех же размеров

$$A + O = A.$$

Матрицу $(-1)A$ называют *противоположной* матрице A и обозначают $-A$. Она обладает тем свойством, что

$$A + (-A) = O.$$

Сумма матриц B и $-A$ называется *разностью* матриц B и A и обозначается $B - A$.

Мы видим, что сформулированные выше свойства линейных операций с матрицами совпадают со свойствами линейных операций с векторами, перечисленными в предложении 1 § 1 гл. I.

Используя линейные операции, мы можем составлять из матриц одинаковых размеров $A_1, ..., A_k$ и чисел $\alpha_1, ..., \alpha_k$ выражения вида

$$\alpha_1 A_1 + ... + \alpha_k A_k.$$

Такие выражения называются *линейными комбинациями* матриц. Если какая-то матрица представлена как линейная комбинация других матриц, то говорят, что она по ним разложена.

Пример 1. Пусть $\mathbf{p}_1, ..., \mathbf{p}_k$ — столбцы одинаковой высоты n. Тогда столбец $\mathbf{q}$ той же высоты по ним разложен, если при некоторых коэффициентах $\alpha_1, ..., \alpha_k$

$$\mathbf{q} = \alpha_1 \mathbf{p}_1 + ... + \alpha_k \mathbf{p}_k,$$

или, в более подробной записи,

$$\left\| \begin{matrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \end{matrix} \right\| = \alpha_1 \left\| \begin{matrix} p_1^1 \\ \vdots \\ p_1^n \end{matrix} \right\| + ... + \alpha_k \left\| \begin{matrix} p_k^1 \\ \vdots \\ p_k^n \end{matrix} \right\|.$$

В силу определения линейных операций это матричное равенство равносильно n числовым равенствам

$$q^1 = \alpha_1 p_1^1 + ... + \alpha_k p_k^1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$q^n = \alpha_1 p_1^n + ... + \alpha_k p_k^n.$$

5. Линейная зависимость матриц. Какова бы ни была система матриц фиксированных размеров $m \times n$, нулевая матрица тех же размеров раскладывается по этим матрицам в линейную комбинацию с нулевыми коэффициентами. Такую линейную комбинацию называют *тривиальной*. Как и для векторов, введем следующее

Определение. Система матриц $A_1, ..., A_k$ *линейно независима*, если нулевая матрица раскладывается по ней однозначно, т. е. из

$$\alpha_1 A_1 + ... + \alpha_k A_k = O \tag{3}$$

следует $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$. В противном случае, т. е. если существуют k чисел $\alpha_1, ..., \alpha_k$, одновременно не равных нулю и таких, что выполнено равенство (3), система матриц называется *линейно зависимой*.

Пример 2. Столбцы

$$\mathbf{e}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} \qquad (4)$$

(в столбце $\mathbf{e}_i$ на i-м месте стоит 1, а остальные элементы равны нулю) являются линейно независимыми. Действительно, равенство $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{o}$ можно записать подробнее так:

$$\alpha_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} + \alpha_2 \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда видно, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Это равенство показывает также, что произвольный столбец высоты n может быть разложен по столбцам $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Действительно, в качестве коэффициентов линейной комбинации нужно взять элементы раскладываемого столбца.

Определение. Квадратная матрица порядка n, состоящая из столбцов (4):

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix},$$

называется *единичной матрицей* порядка n или просто единичной матрицей, если порядок известен.

Строки единичной матрицы отличаются от ее столбцов только формой записи. Итак, мы можем сформулировать

Предложение 2. *Столбцы (строки) единичной матрицы линейно независимы и обладают тем свойством, что каждый столбец (строка) с тем же числом элементов раскладывается по ним.*

Укажем несколько свойств линейно зависимых и линейно независимых систем матриц. Эти свойства были доказаны в § 1 гл. I для векторов, и доказательства совпадали с приводимыми ниже.

Предложение 2. *Система из $k > 1$ матриц линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы одна из матриц есть линейная комбинация остальных.*

В самом деле, пусть система линейно зависима. По определению выполнено равенство вида (3), где хотя бы один коэффициент отличен от нуля. Допустим для определенности, что это α_1. Тогда мы можем представить первую матрицу как линейную комбинацию

$$A_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}A_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}A_k.$$

Обратно, если одна из матриц разложена по остальным, то это разложение преобразуется к виду (3), где один из коэффициентов равен 1.

Предложение 4. *Если некоторые из матриц $A_1, \ldots, A_k$ составляют сами по себе линейно зависимую систему, то вся система $A_1, \ldots, A_k$ линейно зависима.*

Действительно, пусть существует нетривиальная линейная комбинация некоторых из матриц системы, равная нулевой матрице. Если мы добавим к ней остальные матрицы с нулевыми коэффициентами, то получится равная нулевой матрице нетривиальная линейная комбинация всех матриц.

В частности, *если в систему матриц входит нулевая матрица, то система линейно зависима.*

Предложение 5. *Любые матрицы, входящие в линейно независимую систему матриц, сами по себе линейно независимы.*

В самом деле, в противном случае мы пришли бы к противоречию на основании предыдущего предложения.

Предложение 6. *Если матрица B разложена по линейно независимой системе матриц $A_1, \ldots, A_k$, то коэффициенты разложения определены однозначно.*

Действительно, пусть мы имеем два разложения

$$B = \alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k \quad \text{и} \quad B = \beta_1 A_1 + \ldots + \beta_k A_k.$$

Вычитая одно разложение из другого, мы получаем

$$O = (\alpha_1 - \beta_1)A_1 + \ldots + (\alpha_k - \beta_k)A_k.$$

Матрицы $A_1, \ldots, A_k$ линейно независимы, значит, $\alpha_i - \beta_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Итак, коэффициенты обоих разложений совпадают.

Упражнения

1. Дана матрица $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$.

а) Выпишите подматрицу, расположенную в строках 1 и 3 и столбцах 1 и 3.

б) Сколько квадратных подматриц второго порядка имеет данная матрица?

в) Сколько всего подматриц она имеет?

2. Даны матрицы $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{Vmatrix}$.

Можно ли сложить матрицы:

а) A и B; б) A^T и B; в) A и B^T; г) A^T и B^T?

3. Даны матрицы $A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{Vmatrix}$.

Вычислите матрицу $2A+3B-C$.

4. С какими коэффициентами раскладывается матрица

$$D=\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$$

по матрицам A и B и C из предыдущей задачи?

5. Можно ли разложить матрицу $\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{Vmatrix}$ по матрицам:

а) A и B из задачи 3,

б) A и B и C из задачи 3?

6. Являются ли линейно независимыми строки

$$\mathbf{a}=\|1\ 2\ 3\ 4\|,\quad \mathbf{b}=\|2\ 3\ 4\ 5\|,\quad \mathbf{c}=\|3\ 4\ 5\ 6\|?$$

7. Убедитесь, что классы матриц, определенные в п. 3, замкнуты относительно операций сложения и умножения на число.

§ 2. Умножение матриц

1. Символ $\sum$. Прежде чем двигаться дальше, остановимся на обозначениях. В математике часто приходится рассматривать суммы большого числа слагаемых, имеющих сходный вид и отличающихся только индексами. Для таких сумм принято следующее обозначение. Символ $\sum\limits_{k=1}^{n}$, после которого стоит некоторое выражение, содержащее индекс k, обозначает сумму таких выражений для всех значений индекса от 1 до n, например,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\ldots+a_n,\quad \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_k=\alpha_1\beta_1+\ldots+\alpha_n\beta_n.$$

Индекс k называется *индексом суммирования.* Разумеется, в качестве индекса суммирования может быть употреблена любая другая буква. На указанный символ и следующее за ним выражение можно смотреть как на скобку, содержащую n однотипных слагаемых.

Следующие формулы являются другой записью вынесения множителя за скобку и группировки слагаемых:

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha P_k=\alpha\sum_{k=1}^{n}P_k, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(P_k+Q_k)=\sum_{k=1}^{n}P_k+\sum_{k=1}^{n}Q_k. \tag{2}$$

Если имеется выражение, зависящее от двух индексов, принимающих значения $1,\ldots,n$ и $1,\ldots,m$, мы можем просуммировать сначала по одному из них, а затем полученные суммы — по-другому:

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m}P_{ij}\Big).$$

(Скобки обычно не пишутся.) Эта двойная сумма содержит слагаемые, соответствующие всевозможным парам значений индексов. Если мы запишем P_{ij} для всех $i=1,\ldots,n$ и $j=1,\ldots,m$ в виде матрицы, то сумма в скобках равна сумме элементов i-й строки, а во внешней сумме складываются результаты для всех строк.

То же самое число мы, конечно, получим, если сначала сложим элементы по столбцам, а затем просуммируем полученные суммы для всех столбцов. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}P_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}P_{ij}. \tag{3}$$

2. Определение и примеры. Рассмотрим сначала строку $\mathbf{a}$ с элементами a_i $(i=1,\ldots,n)$ и столбец $\mathbf{b}$ с элементами b_j $(j=1,\ldots,n)$. Существенно, что в $\mathbf{a}$ и в $\mathbf{b}$ число элементов одинаково. Произведением $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b}$ называется число, равное сумме произведений элементов с одинаковыми номерами, т. е.

$$\mathbf{ab}=a_1b_1+\ldots+a_nb_n.$$

Пусть теперь дана матрица A размеров $m\times n$ и матрица B размеров $n\times p$. Матрицы таковы, что длина строки (число столбцов) первой матрицы равна высоте столбца (числу строк) второй. Умножим каждую строку A на каждый столбец B. Полученные mp произведений запишем в виде матрицы C размеров $m\times p$. Именно, каждый столбец C составим из произведений всех строк A на соответствующий столбец матрицы B. Любая строка C состоит из произведений строки A, имеющей тот же номер, на все столбцы B. Таким образом, элементы матрицы C для всех $i=1,\ldots,m$ и $j=1,\ldots,p$ равны

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}. \tag{4}$$

Определение. Матрицу C, элементы которой выражаются через элементы матриц A и B по формулам (4), назовем *произведением* A на B и обозначим AB.

Определение произведения матриц формулируется более сложно и выглядит менее естественно, чем определение суммы. Однако из дальнейшего читатель увидит, что именно такое определение оказывается полезным в целом ряде вопросов.

Как легко заметить, если матрицу B записать как строку из столбцов, то произведение AB запишется как строка из столбцов так:

$$AB=A\|\mathbf{b}_1\ \ldots\ \mathbf{b}_p\|=\|A\mathbf{b}_1\ \ldots\ A\mathbf{b}_p\|. \tag{5}$$

Действительно, для получения j-го столбца произведения мы умножаем последовательно все строки A на столбец $\mathbf{b}_j$.

Аналогично, строки AB — произведения строк A на матрицу B:

$$AB = \left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{matrix} \right\| B = \left\| \begin{matrix} \mathbf{a}_1 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B \end{matrix} \right\|.$$

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Матрица A размеров $m \times n$ умножается на столбец $\mathbf{x}$ высоты n

$$A\mathbf{x} = \left\| \begin{matrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n \\ a_1^2 x^1 + \dots + a_n^2 x^n \\ \dots \\ a_1^m x^1 + \dots + a_n^m x^n \end{matrix} \right\|.$$

Это столбец высоты m. В обратном порядке эти матрицы при $m \neq 1$ перемножить нельзя: произведение $\mathbf{x}A$ не определено.

Правую часть последнего равенства можно записать также и как линейную комбинацию столбцов матрицы A (пример 1 §1). Это показывает, что столбец $A\mathbf{x}$ есть линейная комбинация столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам столбца $\mathbf{x}$:

$$A\mathbf{x} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n.$$

Пример 2. Произведение строки длины m на матрицу B размеров $m \times n$ будет строкой длины n:

$$\| x_1 \dots x_m \| \left\| \begin{matrix} b_1^1 & \dots & b_n^1 \\ b_1^2 & \dots & b_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ b_1^m & \dots & b_n^m \end{matrix} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^m x_i b_1^i \dots \sum_{i=1}^m x_i b_n^i \right\|.$$

Пример 3. Произведение столбца высоты m на строку длины n есть матрица размеров $m \times n$:

$$\left\| \begin{matrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^m \end{matrix} \right\| \| a_1 \dots a_n \| = \left\| \begin{matrix} x^1 a_1 & x^1 a_2 & \dots & x^1 a_n \\ x^2 a_1 & x^2 a_2 & \dots & x^2 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^m a_1 & x^m a_2 & \dots & x^m a_n \end{matrix} \right\|.$$

Пример 4. Пусть A — матрица размеров $m \times n$, $\mathbf{e}_i$ — i-й столбец единичной матрицы порядка m, а $\mathbf{e}_j$ — j-й столбец единичной матрицы порядка n. Тогда $\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j$ — матрица размеров 1×1 с элементом a_{ij}:

$$\mathbf{e}_i^T A \mathbf{e}_j = \| 0 \dots 1 \dots 0 \| \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\| = a_{ij}.$$

Предложение 1. *j-й столбец матрицы AB есть линейная комбинация столбцов матрицы A с коэффициентами равными элементам j-го столбца матрицы B.*

i-я строка матрицы AB есть линейная комбинация строк матрицы B с коэффициентами, равными элементам i-й строки матрицы A.

Оба утверждения доказываются одинаково. Докажем первое. Мы видели, что i-й столбец произведения есть произведение A на i-й столбец B (формула (5)). Но произведение матрицы A на столбец — это линейная комбинация столбцов A с элементами второго сомножителя в качестве коэффициентов (пример 1).

3. Свойства умножения матриц. Умножение матриц не коммутативно. Если A матрица размеров $m \times n$, то оба произведения AB и BA определены только в том случае, когда B имеет размеры $n \times m$, т. е. такие же, как A^T. При этом AB — квадратная матрица порядка m, а BA — порядка n. Итак, о равенстве $AB = BA$ может идти речь, только если A и B — квадратные матрицы одного порядка. Но и в этом случае равенство выполнено далеко не всегда. Например,

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Если какие-нибудь две матрицы A и B удовлетворяют равенству $AB = BA$, то они называются *перестановочными*. Перестановочные матрицы существуют. Например, единичная матрица порядка n перестановочна с любой квадратной матрицей того же порядка:

$$AE = EA = A. \tag{6}$$

Вообще, если определены произведения BE и EC, то

$$BE = B \quad \text{и} \quad EC = C.$$

Предоставим читателю самостоятельно проверить это в качестве упражнения на умножение матриц.

Равенства (6) выражают важное свойство единичной матрицы, которому она обязана своим названием. Если бы какая-нибудь другая матрица E' обладала этим свойством, мы имели бы $E'E = E$ и $E'E = E'$, откуда следовало бы $E = E'$.

Очевидно, что произведение нулевой матрицы O (справа или слева) на любую другую матрицу равно нулевой матрице:

$$AO = O', \quad OB = O''.$$

(Размеры матриц O, O' и O'', возможно, различны.)

Предложение 2. *Умножение матриц ассоциативно, т. е. если определены произведения AB и $(AB)C$, то определены BC и $A(BC)$, и выполнено равенство $(AB)C = A(BC)$.*

Действительно, пусть размеры матриц A, B и C соответственно равны $m_A \times n_A$, $m_B \times n_B$ и $m_C \times n_C$. Если AB определено, то $n_A = m_B$, и матрица AB имеет размеры $m_A \times n_B$. Поэтому, если определено $(AB)C$, то $n_B = m_C$. Матрица AB состоит из элементов

$$\sum_{k=1}^{n_A} a_{ik}b_{kl} \quad (i = 1, ..., m_A; \quad l = 1, ..., n_B)$$

и, следовательно, элементы $(AB)C$ имеют вид

$$\sum_{l=1}^{n_B} \left(\sum_{k=1}^{n_A} a_{ik}b_{kl}\right) c_{ls} \quad (i = 1, ..., m_A; \quad s = 1, ..., n_C). \tag{7}$$

Поскольку $n_B = m_C$, определено произведение BC. Его элементы

$$\sum_{l=1}^{n_B} b_{kl}c_{ls} \quad (k = 1, ..., m_B; \quad s = 1, ..., n_C).$$

Так как $n_A = m_B$, определено произведение $A(BC)$ с элементами

$$\sum_{k=1}^{n_A} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{n_B} b_{kl}c_{ls}\right) \quad (i = 1, ..., m_A; \quad s = 1, ..., n_C). \tag{8}$$

В силу формул (1) и (3) выражения (7) и (8) совпадают, и наше утверждение доказано.

Предложение 3. *Умножение матриц дистрибутивно по отношению к сложению: если имеет смысл выражение $A(B+C)$, то $A(B+C) = AB + AC$, если имеет смысл выражение $(B+C)A$, то $(B+C)A = BA + CA$.*

Обе части предложения доказываются одинаково. Докажем первую из них. Очевидно, что B и C должны иметь одинаковые размеры $m \times n$, а A — размеры $p \times m$ (p может быть любым). Выпишем элементы матрицы $A(B+C)$ через элементы A, B и C:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{si}(b_{ij} + c_{ij}) \qquad (s = 1, ..., p; \quad j = 1, ..., n).$$

Раскроем скобки в каждом слагаемом и сгруппируем члены:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{si}b_{ij} + \sum_{i=1}^{m} a_{si}c_{ij}.$$

Эти суммы равны элементам матриц AB и AC, стоящим в строке с номером s и столбце с номером j. Утверждение доказано.

Из формулы (1) следует такое свойство умножения матриц:

Предложение 4. *Если произведение AB определено, то при любом числе α*

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Предложение 5. *Если определено произведение AB, то определено и произведение $B^T A^T$ и выполнено равенство*

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Доказательство. Пусть матрицы A и B имеют, соответственно, размеры $m \times n$ и $n \times p$. В матрице AB на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит элемент

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., p). \tag{9}$$

j-я строка матрицы B^T состоит из элементов $b_{1j}, ..., b_{nj}$, а i-й столбец матрицы A^T — из элементов $a_{i1}, ..., a_{in}$. Поэтому произведение $B^T A^T$ определено, и в нем на пересечении j-й строки и i-го столбца стоит элемент

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kj}a_{ik} \quad (j = 1, ..., p; \quad i = 1, ..., m).$$

Он совпадает с элементом (9), а индексы i и j принимают в обоих выражениях одни и те же значения. Этим предложение доказано.

Последовательно применяя доказанную формулу, мы получим

$$(A_1 A_2 \dots A_k)^T = A_k^T \dots A_2^T A_1^T.$$

4. Элементарные преобразования. Элементарные матрицы. В этом пункте впервые появляются элементарные преобразования матриц. Они играют большую роль в теории матриц и широко используются в вычислениях.

Определение. Мы назовем *элементарными преобразованиями строк* матрицы следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;

2) прибавление одной строки к другой строке.

Аналогично определяются *элементарные преобразования столбцов* матрицы. Все, сказанное ниже об элементарных преобразованиях строк, переносится на элементарные преобразования столбцов.

Следующие более сложные преобразования получаются последовательным применением нескольких элементарных преобразований:

а) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на число, в частности, вычитание одной строки из другой;

б) перестановка двух строк.

Покажем, как эти преобразования сводятся к элементарным на примере матрицы, состоящей из двух строк $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Если в матрице есть еще строки, не участвующие в преобразованиях, они переписываются без изменения:

а) $\left\| \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} \alpha\mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} \alpha\mathbf{a} \\ \mathbf{b}+\alpha\mathbf{a} \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}+\alpha\mathbf{a} \end{matrix} \right\|$;

б) $\left\| \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} \mathbf{a}+\mathbf{b} \\ \mathbf{b} \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} \mathbf{a}+\mathbf{b} \\ \mathbf{b}-\mathbf{a}-\mathbf{b} \end{matrix} \right\| =$

$$= \left\| \begin{matrix} \mathbf{a}+\mathbf{b} \\ -\mathbf{a} \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{a} \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{matrix} \right\|.$$

Эти два типа преобразований также часто относят к числу элементарных. При описании длинных последовательностей элементарных преобразований мы будем включать в последовательность преобразования этих двух типов, не разлагая их на элементарные.

Возможность вычитать одну строку из другой и отличие числового множителя от нуля имеют следующее принципиальное значение: элементарные преобразования обратимы. Это значит, что перейдя от матрицы A к матрице B последовательностью элементарных преобразований, с помощью другой последовательности мы сможем вернуться от B к A.

Каждое элементарное преобразование строк матрицы A размеров $m \times n$ равносильно умножению A слева на некоторую квадратную матрицу S порядка m. При этом S не зависит от A, а полностью определяется преобразованием, которое она осуществляет.

Именно, пусть S_1 — матрица, получаемая из единичной матрицы E порядка m заменой i-й единицы на диагонали на число $\lambda \neq 0$. Тогда матрица S_1A отличается от A тем, что ее i-я строка умножена на λ. Пусть S_2 — матрица, которая отличается от E заменой на единицу нулевого элемента на пересечении i-й строки и j-го столбца. Умножение A слева на S_2 равносильно прибавлению j-й строки к i-й. Оба утверждения доказываются одинаково. Докажем второе.

Рассмотрим строку матрицы S_2A с номером $k \neq i$. Согласно предложению (1), эта строка — линейная комбинация строк A с коэффициентами равными элементам k-й строки E. Это значит, что в линейную комбинацию входит (с коэффициентом 1) только k-я строка A, и потому k-я строка S_2A равна k-й строке A. Для i-й строки положение другое: в линейную комбинацию входят i-я и j-я строки с коэффициентами 1. Значит, i-я строка S_2A равна сумме i-й и j-й строк A.

Пример 5. $\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{matrix} \right\|$,

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a & b \\ c+a & d+b \end{matrix} \right\|.$$

Те матрицы, умножение на которые осуществляет элементарные преобразования, называются *элементарными матрицами*.

Последовательное выполнение нескольких элементарных преобразований строк осуществляется умножением слева на произведение соответствующих элементарных матриц, причем множитель, который соответствует преобразованию, сделанному позже, стоит левее.

Легко найти матрицу S, умножение на которую производит заданную последовательность элементарных преобразований строк: надо осуществить эту последовательность элементарных преобразований над единичной матрицей. Это видно из равенства $SE = S$.

Элементарные преобразования столбцов сводятся к умножению матриц аналогично. Разница состоит в том, что множители помещаются справа, а не слева от преобразуемой матрицы, и эти множители получаются из единичной матрицы подходящего порядка элементарными преобразованиями ее столбцов, а не строк.

5. Вырожденные и невырожденные матрицы. Квадратная матрица называется *вырожденной*, если ее строки линейно зависимы. Вырожденной будет, например, матрица, имеющая нулевую строку, или матрица, имеющая две одинаковых строки. Примером *невырожденной* матрицы является единичная матрица (предложение 2 § 1).

Предложение 6. *Элементарные преобразования строк переводят линейно независимые строки в линейно независимые, а линейно зависимые — в линейно зависимые. Точно так же при элементарных преобразованиях столбцов сохраняются линейная зависимость и независимость столбцов.*

Докажем это предложение для строк. Пусть строки $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ линейно независимы, и мы прибавили, допустим, первую строку ко второй. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию полученных строк, равную нулевой строке:

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2) + ... + \alpha_n\mathbf{a}_n = (\alpha_1+\alpha_2)\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{a}_n = \mathbf{o}.$$

Так как исходные строки линейно независимы, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, $\alpha_2 = 0$, ..., $\alpha_n = 0$. Отсюда следует, что α_1 также нуль, и система строк, полученная прибавлением одной строки к другой, линейно независима. Сохранение линейной независимости системы строк при умножении i-й строки на число $\lambda \neq 0$ доказывается аналогично.

Пусть теперь строки линейно зависимы. Вспомним, что последовательности элементарных преобразований обратимы. Если мы из линейно зависимой системы строк с помощью элементарных преобразований получили линейно независимую, то обратный переход должен переводить линейно независимую систему в линейно зависимую, что невозможно.

Доказательство предложения для столбцов не отличается от приведенного.

Следствие. *Элементарные преобразования строк переводят невырожденную матрицу в невырожденную, а вырожденную матрицу — в вырожденную.*

Предложение 7. *Элементарные преобразования строк сохраняют линейные зависимости между столбцами. Элементарные пре-*

образования столбцов сохраняют линейные зависимости между строками.

Доказательство. Матрица $A = \|\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\|$ после элементарного преобразования строк переходит в матрицу SA, где S — соответствующая элементарная матрица. Столбцами матрицы SA будут $S\mathbf{a}_1, ..., S\mathbf{a}_n$. Пусть в матрице A столбцы связаны линейной зависимостью $\alpha_1\mathbf{a}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{a}_n = \mathbf{o}$. Умножая это равенство на S, мы получаем точно такую же зависимость между столбцами преобразованной матрицы: $\alpha_1 S\mathbf{a}_1 + ... + \alpha_n S\mathbf{a}_n = \mathbf{o}$.

Доказательство для элементарных преобразований столбцов аналогично.

Предложение 8. *Каждая невырожденная матрица с помощью элементарных преобразований строк может быть превращена в единичную матрицу.*

Доказательство. Пусть дана невырожденная квадратная матрица A порядка n. Обозначим ее строки $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$. В первой строке обязательно есть элемент, отличный от нуля, так как в противном случае матрица имела бы строку из нулей и была бы вырожденной. Пусть этот элемент имеет номер s_1, т. е. расположен в s_1-м столбце. Разделим первую строку на этот элемент. В преобразованной матрице элемент в позиции $(1, s_1)$ будет равен 1. После этого для всех $i = 2, ..., n$ вычтем из i-й строки первую строку, умноженную на a_{is_1}. Так преобразованную матрицу обозначим $A^{(1)}$. Ее s_1-й столбец — это первый столбец единичной матрицы: все его элементы равны нулю, за исключением первого элемента, равного 1.

С каждой из остальных строк будем поступать таким же образом. Пусть после очередного преобразования получена матрица $A^{(k)}$, у которой столбцы с номерами $s_1, ..., s_k$ — первые k столбцов единичной матрицы; $(k+1)$-я строка матрицы $A^{(k)}$ отлична от нуля, так как $A^{(k)}$ получена элементарными преобразованиями из A и, следовательно, не вырождена. При этом элементы строки с номерами $s_1, ..., s_k$ — нули, а значит, не равен нулю другой элемент. Пусть его номер s_{k+1}. Делим строку на него и вычитаем ее с подходящими множителями из остальных так, чтобы превратить s_{k+1}-й столбец в $k+1$-й столбец единичной матрицы. Получается матрица $A^{(k+1)}$.

После того, как будет произведена последовательность преобразований с n-й строкой, все столбцы полученной матрицы $A^{(n)}$, будут различными столбцами единичной матрицы (1-й, 2-й,..., n-й столбцы единичной матрицы стоят на местах $s_1, ..., s_n$). Одновременно строки $A^{(n)}$ являются различными строками единичной матрицы (при всех i в i-й строке на s_i-м месте стоит единица, а остальные элементы равны нулю). Переставляя строки, мы можем расположить их в естественном порядке. Это закончит преобразование исходной матрицы A в единичную при помощи элементарных преобразований строк.

Метод преобразования матрицы, примененный при доказательстве, называется *методом Гаусса*, точнее "методом Гаусса–Жордана с выбором ведущего элемента по строке". Различные варианты метода Гаусса широко применяются в вычислительной практике.

Предложение 9. *Матрица невырождена тогда и только тогда, когда она раскладывается в произведение элементарных матриц.*

Доказательство. В силу предложения 8 найдутся такие элементарные матрицы $T_1, ..., T_M$, что
$$T_M ... T_1 A = E. \tag{10}$$
Так как последовательности элементарных преобразований обратимы, существуют элементарные матрицы $S_1, ..., S_N$, для которых
$$S_1 S_2 ... S_N E = A.$$
Отбрасывая множитель E, мы получаем требуемое разложение.

Обратно, последняя формула показывает, что произведение элементарных матриц получается элементарными преобразованиями строк из единичной матрицы, которая невырождена. Поэтому, согласно следствию из предложения 6 оно невырождено.

Предложение 10. *Столбцы квадратной матрицы линейно независимы тогда и только тогда, когда матрица невырождена.*

Действительно, элементарными преобразованиями строк мы превращаем невырожденную матрицу в единичную, столбцы которой линейно независимы. По предложению 7 столбцы исходной матрицы также должны быть линейно независимы. Обратно, пусть столбцы матрицы A линейно независимы. Это значит, что транспонированная матрица A^T невырождена, и по предыдущему ее столбцы — строки матрицы A — линейно независимы.

Иначе предложение 10 можно сформулировать так.

Следствие. *Матрица A невырождена тогда и только тогда, когда невырождена ее транспонированная A^T.*

6. Обратная матрица. Введем

Определение. Матрицу X назовем *обратной* для матрицы A, если $XA = AX = E$, где E — единичная матрица.

Вспомним, что две матрицы могут быть перестановочны только в том случае, если они обе квадратные матрицы одного и того же порядка. Поэтому иметь обратную может только квадратная матрица.

Предложение 11. *Если у матрицы A существует обратная, то она единственна.*

Это легко проверяется от противного. Допустим, что их нашлось две: X_1 и X_2. Тогда $X_1 = X_1(AX_2) = (X_1 A)X_2 = X_2$.

Предложение 12. *Матрица имеет обратную тогда и только тогда, когда она невырождена.*

Доказательство. Вернемся к формуле (10) и объединим в ней все элементарные матрицы в один множитель X. Мы можем утверждать таким образом, что для любой невырожденной матрицы A существует матрица X такая, что $XA = E$. Докажем, что X удовлетворяет также и второму равенству в определении обратной матрицы. Для этого заметим, что X невырождена как произведение элементарных матриц, и потому для нее существует такая матрица Y, что $YX = E$. Рассмотрим произведение $Y(XA) = Y$. При другой расстановке скобок мы видим, что $(YX)A = A$. Поэтому $Y = A$, и равенство $YX = E$ переписывается как $AX = E$.

Нам осталось доказать, что вырожденная матрица не имеет обратной. Пусть матрица A вырождена, т. е. существует нулевая линейная комбинация ее строк $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{o}$, причем $\lambda_1^2 + \ldots$ $\ldots + \lambda_n^2 \neq 0$. Тогда согласно предложению 1 произведение ненулевой строки $\mathbf{v} = \|\lambda_1, \ldots, \lambda_n\|$ на матрицу A — нулевая строка: $\mathbf{v}A = \mathbf{o}$. Если матрица A имеет обратную X, мы можем умножить на X справа обе части этого равенства: $\mathbf{v}AX = \mathbf{o}X$. Таким образом, $\mathbf{v} = \mathbf{o}$, что противоречит определению $\mathbf{v}$. Это заканчивает доказательство.

Обратную к матрице A принято обозначать A^{-1}. На символ -1 в обозначении обратной матрицы можно смотреть как на показатель степени. Для квадратной матрицы A целая положительная степень A^k определяется как произведение матрицы A самой на себя k раз. Положительная степень $(A^{-1})^k$ матрицы A^{-1} считается *отрицательной степенью* A^{-k} матрицы A. По определению *нулевой степенью* любой квадратной матрицы называется единичная матрица того же порядка. При этом определении для невырожденной матрицы $A^kA^l = A^{k+l}$ при любых целых k и l.

Получим основные свойства обратной матрицы.

• Из определения прямо видно, что $(A^{-1})^{-1} = A$.

• $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, так как

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E.$$

• Из $A^{-1}A = E$, получаем $A^T(A^{-1})^T = E$. Поэтому $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Опишем способ вычисления обратной матрицы. Именно, если элементарными преобразованиями строк мы обратим матрицу A в единичную, то те же преобразования переведут единичную матрицу в матрицу A^{-1}, так как для соответствующих элементарных матриц из формулы (10) имеем $T_M \ldots T_1 E = T_M \ldots T_1 = A^{-1}$.

Эти вычисления могут быть оформлены так: составим матрицу D размеров $n \times 2n$, приписав к матрице A справа единичную матрицу. Элементарными преобразованиями строк преобразуем D так, чтобы обратить ее левую половину в единичную матрицу. Тогда правая половина превратится в матрицу A^{-1}.

Теорема 1. *Пусть A — невырожденная матрица порядка n. Тогда любой столбец высоты n раскладывается по столбцам A, причем коэффициенты разложения однозначно определены.*

Доказательство. Действительно, если матрица A невырождена, то у нее существует обратная, и мы можем написать равенство $\mathbf{b} = AA^{-1}\mathbf{b}$. Из него видно, что столбец $\mathbf{b}$ получается умножением матрицы A на столбец $A^{-1}\mathbf{b}$ и, следовательно, является линейной комбинацией столбцов матрицы A.

Для доказательства последнего утверждения достаточно вспомнить, что столбцы невырожденной матрицы линейно независимы, и сослаться на предложение 6 § 1.

Применяя теорему 1 к транспонированной матрице, мы получаем

Следствие. *Пусть A — невырожденная матрица порядка n. Тогда любая строка длины n раскладывается по строкам A, причем коэффициенты разложения однозначно определены.*

Упражнения

1. Пусть аффинные преобразования f и g в некоторой системе координат записаны, соответственно, формулами

$$\begin{cases} x^* = a_1x + b_1y, \\ y^* = a_2x + b_2y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^* = c_1x + d_1y, \\ y^* = c_2x + d_2y. \end{cases}$$

Докажите, что произведение f · g запишется такими же формулами, причем матрица коэффициентов будет равна

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{Vmatrix}.$$

2. Пусть $\|2\|$ — матрица размеров 1×1 с элементом 2. Верно ли, что:

а) $\|2\| \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix} \|2\| = \begin{Vmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{Vmatrix}$?

3. Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ — столбцы матрицы A, а $\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n$ — строки матрицы B. Убедитесь, что

$$AB = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i\mathbf{b}^i.$$

4. Верно ли, что для любых двух квадратных матриц одного и того же порядка:

а) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$; б) $(A+B)^2 + (A-B)^2 = 2(A^2 + B^2)$?

5. Рассмотрим матричное уравнение $X^2 + E = O$.

а) Проверьте, что матрица

$$I = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

удовлетворяет этому уравнению. Как объяснить это в терминах задачи 1?

б) Найдите все решения этого уравнения среди вещественных матриц второго порядка.

6. Сопоставим каждому комплексному числу $z = a + bi$ матрицу

$$A(z) = \begin{Vmatrix} a & -b \\ b & a \end{Vmatrix}.$$

Проверьте, что выполнены равенства $A(z_1) + A(z_2) = A(z_1 + z_2)$, $A(\overline{z}) = A^T(z)$, $A(z_1)A(z_2) = A(z_1z_2)$, $A(z^{-1}) = A^{-1}(z)$.

7. Найдите обратную для матрицы
$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

8. Разложите матрицу из упр. 7 в произведение элементарных.

§ 3. Ранг матрицы

1. Определение. Введем

Определение. Пусть в матрице A существует линейно независимая система из r строк, и нет линейно независимой системы из большего числа строк. Тогда мы будем говорить, что *строчный ранг* матрицы A равен r. Нулевая матрица не содержит никакой линейно независимой системы строк, и ее строчный ранг по определению равен нулю.

Аналогично определяется *столбцовый ранг* матрицы. Он равен r_1, если есть линейно независимая система из r_1 столбцов, и нет линейно независимой системы из большего числа столбцов. Столбцовый ранг нулевой матрицы по определению равен нулю.

Предложение 1. *Система из r строк линейно независима тогда и только тогда, когда в этих строках найдется невырожденная подматрица порядка r.*

Доказательство. 1°. Пусть r строк линейно зависимы. Рассмотрим произвольную подматрицу порядка r, расположенную в этих строках. Если строки линейно зависимы, то также линейно зависимы (с теми же коэффициентами) и отрезки этих строк, составляющие подматрицу, и подматрица является вырожденной.

2°. Обратное утверждение докажем по индукции. Одна строка линейно независима, если она не нулевая. В этом случае она содержит ненулевой элемент, составляющий невырожденную подматрицу порядка 1.

Пусть теперь даны r линейно независимых строк. Первые $r-1$ из них также линейно независимы, и по предположению индукции содержат невырожденную подматрицу порядка $r-1$. Пусть $j_1, ..., j_{r-1}$ — номера столбцов этой подматрицы. Рассмотрим отрезок r-й строки, расположенный под подматрицей, т. е. составленный из элементов с номерами $j_1, ..., j_{r-1}$. По следствию из теоремы 1 § 2 этот отрезок раскладывается в линейную комбинацию строк подматрицы. Коэффициенты этой линейной комбинации обозначим $\alpha_1, ..., \alpha_{r-1}$.

Теперь будем рассматривать полные строки. Вычтем из последней строки линейную комбинацию предыдущих с теми же коэффициентами $\alpha_1, ..., \alpha_{r-1}$. Это обратит в нуль $j_1, ..., j_{r-1}$-й элементы r-й строки, но не всю строку, так как строки линейно независимы. Таким образом, в преобразованной r-й строке есть ненулевой элемент a_j^r, и его номер j отличен от номеров $j_1, ..., j_{r-1}$.

В преобразованной матрице рассмотрим столбцы, имеющие номера $j_1, ..., j_{r-1}, j$. (Мы для удобства пишем j на последнем месте, хотя в действительности столбцы располагаются в порядке возрастания номеров.) Легко видеть, что эти столбцы линейно независимы. Действительно, пусть
$$\alpha_1 \mathbf{a}_{j_1} + ... + \alpha_{r-1}\mathbf{a}_{j_{r-1}} + \alpha \mathbf{a}_j = \mathbf{o} \tag{1}$$
их нулевая линейная комбинация. Тогда для последних элементов столбцов $\alpha_1 0 + ... + \alpha_{r-1}0 + \alpha a_j^r = 0$. Так как $a_j^r \neq 0$, отсюда следует $\alpha = 0$, и мы получаем $\alpha_1 \mathbf{a}_{j_1} + ... + \alpha_{r-1}\mathbf{a}_{j_{r-1}} = \mathbf{o}$. Если бы среди коэффициентов этой линейной комбинации были отличные от нуля, то столбцы с номерами $j_1, ..., j_{r-1}$ были бы линейно зависимы. Это противоречило бы тому, что исходная подматрица порядка $n-1$ невырождена. Таким образом, все коэффициенты в (1) равны нулю, и столбцы с номерами $j_1, ..., j_{r-1}, j$ линейно независимы. Отсюда следует, что составленная ими подматрица порядка r невырождена.

Невырождена соответствующая подматрица и в непреобразованной матрице, так как элементарными преобразованиями мы превратили ее в невырожденную матрицу. Это заканчивает доказательство.

Определение. В матрице A размеров $m \times n$ подматрица порядка r называется *базисной*, если она невырождена, а все квадратные подматрицы большего порядка, если они существуют, вырождены.

Столбцы и строки матрицы A, на пересечении которых стоит базисная подматрица, называются *базисными столбцами* и *строками* A.

В силу предложения 1 базисные столбцы и строки линейно независимы.

Определение. *Рангом матрицы* называется порядок базисной подматрицы или, иначе, самый большой порядок, для которого существуют невырожденные подматрицы. Ранг нулевой матрицы по определению считают нулем.

Отметим два очевидных свойства ранга.

• Ранг матрицы не меняется при транспонировании, так как при транспонировании матрицы все ее подматрицы транспонируются, и при этом невырожденные подматрицы остаются невырожденными, а вырожденные — вырожденными.

• Если A' — подматрица матрицы A, то ранг A' не превосходит ранга A, так как любая невырожденная подматрица, входящая в A', входит и в A.

2. Основные теоремы. Из предложения 1 прямо следует теорема *о ранге матрицы*:

Теорема 1. *Ранг любой матрицы равен ее строчному рангу и ее столбцовому рангу.*

Действительно, если строчный ранг A равен r, то в A найдется линейно независимая система из r строк, а значит, и невырожденная подматрица порядка r. Если при этом есть $p > r$ различных строк A, то они линейно зависимы, и любая подматрица порядка p в них вырождена. Столбцовый ранг равен строчному рангу A^T, значит, и рангу A^T, а потому — рангу A.

Таким образом, мы видим, что все три определения на самом деле определяют одно и то же число, и впредь не будем их различать. Будем говорить *ранг матрицы* и обозначать его $\operatorname{Rg} A$.

Из теоремы о ранге матрицы мы получаем теорему *о базисном миноре*, на которую существенно опирается все дальнейшее изложение. Слово "минор" означает "детерминант подматрицы". В частности, базисный минор — это детерминант базисной подматрицы. О детерминантах будет речь в следующем параграфе, а здесь это слово можно воспринимать просто как составную часть названия теоремы.

Теорема 2. *Каждый столбец матрицы раскладывается в линейную комбинацию ее базисных столбцов.*

Доказательство. Каждый из базисных столбцов, разумеется, раскладывается по базисным: для этого достаточно взять его самого с коэффициентом 1, а остальные с нулевыми коэффициентами.

Пусть теперь $\mathbf{a}_j$ — не базисный столбец. Базисные столбцы обозначим через $\mathbf{a}_{i_1}, ..., \mathbf{a}_{i_r}$. По теореме о ранге матрицы любые $r+1$ столбцов линейно зависимы, и найдутся такие коэффициенты, что

$$\alpha_1 \mathbf{a}_{i_1} + ... + \alpha_r \mathbf{a}_{i_r} + \alpha \mathbf{a}_j = \mathbf{o}.$$

При этом мы можем быть уверены, что $\alpha \neq 0$, так как иначе это равенство означало бы линейную зависимость базисных столбцов. Деля на α, мы получаем нужное нам разложение

$$\mathbf{a}_j = -\alpha^{-1}\alpha_1 \mathbf{a}_{i_1} - ... - \alpha^{-1}\alpha_r \mathbf{a}_{i_r}.$$

Следствие. *Каждая строка матрицы раскладывается по ее базисным строкам.*

3. Ранг произведения матриц. Согласно предложениям 6 и 7 § 2 элементарные преобразования не меняют столбцового ранга. Таким образом, справедливо

Предложение 2. *Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.*

Отсюда и из предложения 9 § 2 прямо следует

Предложение 3. *Если матрица A невырождена и определены произведения AB и CA, то $\operatorname{Rg} AB = \operatorname{Rg} B$ и $\operatorname{Rg} CA = \operatorname{Rg} C$.*

В общем случае имеет место

Предложение 4. *Ранг произведения двух матриц не превосходит рангов сомножителей.*

Доказательство. Пусть определено произведение AB. Рассмотрим матрицу D, составленную из всех столбцов матриц A и AB. Так как AB — подматрица, $\operatorname{Rg} AB \leqslant \operatorname{Rg} D$.

По предложению 1 § 2 столбцы AB — линейные комбинации столбцов A. Легко видеть, что приписывание к матрице линейной комбинации ее столбцов не меняет ранга матрицы. Действительно, не меняя ранга, элементарными преобразованиями столбцов мы можем обратить приписанный столбец в нулевой, а добавление нулевого столбца не создает новых невырожденных подматриц. Отсюда следует, что $\operatorname{Rg} D = \operatorname{Rg} A$. Итак, $\operatorname{Rg} AB \leqslant \operatorname{Rg} A$.

Аналогично доказывается, что $\operatorname{Rg} AB \leqslant \operatorname{Rg} B$. Для этого надо составить матрицу D' из всех строк матриц B и AB.

4. Нахождение ранга матрицы. Введем

Определение. Матрица размеров $m \times n$ называется *упрощенной* (или имеет *упрощенный вид*), если некоторые r ее столбцов являются первыми r столбцами единичной матрицы порядка m и, в случае $m > r$, ее последние $m - r$ строк — нулевые.

Предложение 5. *Каждую матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно превратить в упрощенную матрицу.*

Доказательство. Если матрица нулевая, то она уже упрощенная ($r = 0$). В общем случае применим метод Гаусса. В предложении 8 § 2 мы превратили квадратную невырожденную матрицу элементарными преобразованиями строк в единичную матрицу. Это — частный случай доказываемого предложения. То обстоятельство, что матрица невырождена, использовалось, когда мы в очередной строке преобразованной матрицы находили ненулевой элемент.

В общем случае ненулевой элемент может не найтись, т. е. очередная строка окажется нулевой. Все встречающиеся нулевые строки будем переставлять на последние места и будем продолжать преобразования так, как при доказательстве предложения 8 § 2.

Преобразования закончатся, когда либо будут исчерпаны все строки, либо останутся только нулевые строки. При этом не существенно, квадратная матрица или нет. Конечно, может случиться, что некоторые столбцы не будут превращены в столбцы единичной матрицы, но это нам и не требуется. Пусть всего в столбцы единичной матрицы преобразовано r столбцов. Если остались строки ниже r-й, они нулевые, иначе преобразования можно продолжить. Предложение доказано.

Пусть мы привели матрицу A к упрощенному виду, и в упрощенной матрице A', столбцы $\mathbf{a}_{j_1}, ..., \mathbf{a}_{j_r}$ $(j_1 < ... < j_r)$ превращены в столбцы единичной матрицы $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_r$. Можно считать, что $\mathbf{a}_{j_k} \to \mathbf{e}_k$ для всех $k = 1, ..., r$. Это достигается перестановкой строк.

Рассмотрим упрощенную матрицу A'. В ней есть невырожденная подматрица порядка r, а невырожденных подматриц большего порядка, очевидно, нет. Следовательно, ранг матрицы равен r, а подматрица базисная.

Из этого следует, что $\operatorname{Rg} A = r$, так как ранг не изменился при элементарных преобразованиях. За базисную подматрицу в A можно принять подматрицу, расположенную в столбцах с номерами $j_1, \dots, j_r$ и строках, которые после перестановок попали на места $1, \dots, r$ в упрощенной матрице. Это видно из того, что, преобразуя матрицу, мы не прибавляли к пересекающим ее строкам никаких строк, которые ее не пересекают.

Таким образом, если мы не знали ранга матрицы и ее базисной подматрицы, то приведя ее к упрощенному виду, мы их определим. С другой стороны, имеет место

Предложение 6. *Какова бы ни была базисная подматрица матрицы A, элементарными преобразованиями строк можно привести A к такому упрощенному виду, в котором базисные столбцы будут первыми столбцами единичной матрицы.*

Действительно, небазисные строки можно обратить в нулевые, вычитая из них подходящие линейные комбинации базисных. После этого можно превратить базисную подматрицу в единичную так, как это было сделано в предложении 8 §2. (Элементарные преобразования производятся, конечно, над полными строками.)

Упражнения

1. Дана матрица $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$.

а) Найдите ее ранг и какую-либо базисную подматрицу.

б) Найдите коэффициенты разложения небазисной строки по базисным строкам и небазисного столбца по базисным столбцам.

в) Прибавьте в матрице вторую строку к первой и убедитесь, что линейная зависимость между столбцами осталась прежней.

г) Сколько всего базисных подматриц в этой матрице?

2. Квадратная матрица порядка n имеет нулевую подматрицу порядка $n-1$. Оцените ранг матрицы.

3. Пусть A — матрица с элементами a_{ij}, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$ и $\mathrm{Rg}\, A = 1$. Докажите, что найдутся числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и $\beta_1, \dots, \beta_n$, не все равные нулю, такие, что $a_{ij} = \alpha_i \beta_j$ для всех i и j.

4. В матрице ранга r отмечены r линейно независимых строк и r линейно независимых столбцов. Докажите, что на их пересечении стоит невырожденная подматрица порядка r. Покажите на примере, что утверждение не верно, если число отмеченных строк меньше r.

5. Докажите, что для любых матриц A и B одинаковых размеров ранг суммы не больше суммы рангов.

§ 4. Детерминанты

1. Определение детерминанта. Мы будем говорить, что на множестве квадратных матриц порядка n задана числовая функция, если каждой матрице из этого множества сопоставлено некоторое число. Примерами могут служить две часто употребляемые функции:

след матрицы — функция, сопоставляющая каждой квадратной матрице сумму ее диагональных элементов $a_{11} + \dots + a_{nn}$;

евклидова норма матрицы — функция, сопоставляющая каждой матрице квадратный корень из суммы квадратов всех ее элементов.

Во многих вопросах необходимо уметь определить, вырождена данная матрица или нет. При этом полезна такая функция от матрицы, которая равна нулю для вырожденных матриц, отлична от нуля для невырожденных и при этом сравнительно просто вычисляется. Для матриц второго и третьего порядка такими функциями являются их детерминанты, уже известные нам.

Определение. Числовая функция f на множестве всех квадратных матриц порядка n называется *детерминантом* (*или определителем*) *порядка n*, а ее значение на матрице A — детерминантом A, если она обладает следующими тремя свойствами.

1. Какую бы строку матрицы мы ни взяли, функция является линейным однородным многочленом от элементов этой строки. Для i-й строки матрицы A это значит, что

$$f(A) = h_1 a_{i1} + h_2 a_{i2} + \dots + h_n a_{in}, \tag{1}$$

где $h_1, \dots, h_n$ — коэффициенты, не зависящие от элементов i-й строки $a_{i1}, \dots, a_{in}$, но зависящие от остальных элементов матрицы.

2. Значение функции на любой вырожденной матрице равно нулю.

3. Значение функции на единичной матрице равно 1.

Детерминант матрицы A обозначается $\det A$ или, если нужно выписать элементы матрицы, прямыми линиями по бокам матрицы.

Рекомендуем читателю проверить, что известные нам детерминанты второго и третьего порядков удовлетворяют приведенному определению. Для матрицы порядка 1, состоящей из одного элемента, детерминантом является этот элемент.

Когда определение состоит из условий, которым должен удовлетворять определяемый объект, заранее не ясно, выполнимы ли эти условия, т. е. существует ли объект, им удовлетворяющий. Кроме того, если такой объект существует, то не ясно, однозначно ли он определен этими условиями. Ниже мы докажем существование и единственность детерминанта.

Мы докажем также, что для любой невырожденной матрицы детерминант отличен от нуля. Однако сначала необходимо изучить условия, определяющие детерминант.

Условие 1 выражает *свойство линейности* детерминанта *по строке*. Его равносильную формулировку дает следующее

Предложение 1. *Функция f на множестве квадратных матриц порядка n обладает свойством линейности по строке тогда и только тогда, когда для каждой строки произвольной матрицы A выполнено следующее: если эта строка есть линейная комбинация $\alpha \mathrm{p} +$*

$+\beta\mathbf{q}$, *строк* $\mathbf{p}$ *и* $\mathbf{q}$, *то*

$$f(A) = \alpha f(A_p) + \beta f(A_q), \tag{2}$$

где матрицы A_p *и* A_q *получены из* A *заменой этой строки на* $\mathbf{p}$ *и* $\mathbf{q}$.

Доказательство. 1°. Пусть функция f обладает свойством линейности по строке (1). Если i-я строка A есть линейная комбинация $\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q}$, то при любом k элемент a_{ik} этой строки равен $\alpha p_k + \beta q_k$, где p_k и q_k — соответствующие элементы строк $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Следовательно,

$$f(A) = h_1(\alpha p_1 + \beta q_1) + \ldots + h_n(\alpha p_n + \beta q_n).$$

Группируя члены, мы получим

$$f(A) = \alpha(h_1 p_1 + \ldots + h_n p_n) + \beta(h_1 q_1 + \ldots + h_n q_n).$$

Здесь $h_1, \ldots, h_n$ не зависят от элементов i-й строки, и потому

$$h_1 p_1 + \ldots + h_n p_n = f(A_p) \quad \text{и} \quad h_1 q_1 + \ldots + h_n q_n = f(A_q).$$

Таким образом, получено равенство (2).

2°. Докажем обратное. Возьмем i-ю строку матрицы A и разложим ее в линейную комбинацию строк единичной матрицы

$$a_{i1}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{in}\mathbf{e}_n.$$

Последовательно применяя равенство (2), получаем отсюда

$$f(A) = a_{i1} f(A_1) + \ldots + a_{in} f(A_n),$$

где матрицы $A_1, \ldots, A_n$ получены из A заменой i-й строки на соответствующую строку единичной матрицы. Они не зависят от элементов i-й строки A, а потому значения f на данных матрицах также не зависят от этих элементов. Предложение доказано.

Сформулированное в предложении 1 свойство также называют свойством линейности по строке и часто формулируют в виде двух отдельных утверждений.

- *Множитель, общий для всех элементов строки, может быть вынесен за знак детерминанта.*
- *Если какая-либо из строк матрицы* A *есть сумма двух строк, то* $\det A$ *равен сумме детерминантов матриц, получаемых из* A *заменой этой строки на каждое из слагаемых.*

Разумеется, если строка матрицы представлена как линейная комбинация $\alpha_1\mathbf{p}_1 + \ldots + \alpha_s\mathbf{p}_s$ любого числа s строк, то

$$\det A = \alpha_1 \det A_1 + \ldots + \alpha_s \det A_s, \tag{3}$$

где $A_1, \ldots A_s$ — матрицы, получаемые из A заменой рассматриваемой строки соответственно на $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_s$.

Предложение 2. *Если к некоторой строке матрицы прибавить другую ее строку, умноженную на число, то детерминант матрицы не изменится.*

Доказательство. Пусть в матрице A мы заменили i-ю строку $\mathbf{a}_i$ на строку $\mathbf{a}_i + \lambda\mathbf{a}_j$, $i \neq j$. Тогда по свойству линейности детерминант полученной матрицы A' равен

$$\det A' = \det A + \lambda \det A_j,$$

где матрица A_j получается из A заменой i-й строки на j-ю. В эту матрицу строка $\mathbf{a}_j$ входит дважды: на i-м и на j-м местах. Поэтому матрица вырожденная, и $\det A_j = 0$. Итак, $\det A = \det A'$.

Предложение 3. *Если две строки матрицы поменять местами, то ее детерминант умножится на* (-1).

Доказательство. Пусть матрица A' получается из A перестановкой i-й и j-й строк. Выполним следующую последовательность преобразований матрицы A, не меняющих детерминанта в силу предложения 2:

$$A = \left\|\begin{matrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{matrix}\right\| \to \left\|\begin{matrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{matrix}\right\| \to \left\|\begin{matrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j \\ \vdots \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \vdots \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ -\mathbf{a}_i \\ \vdots \end{matrix}\right\| \to \left\|\begin{matrix} \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ -\mathbf{a}_i \\ \vdots \end{matrix}\right\|.$$

Детерминант последней матрицы равен детерминанту A и отличается только знаком от детерминанта матрицы A'.

Свойство, выраженное предложением 3, носит название *антисимметрии* детерминанта по строкам. В дальнейшем нам потребуется

Предложение 4. *Пусть некоторая функция* f *на множестве квадратных матриц линейна по строкам, и для матриц, имеющих две одинаковые строки, ее значение равно нулю. Тогда на всех вырожденных матрицах ее значение равно нулю.*

Доказательство. Пусть A — произвольная вырожденная матрица. Если строк больше одной, и они линейно зависимы, то одна из строк есть линейная комбинация остальных. Допустим для определенности, что строка $\mathbf{a}_1$ разложена по $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ с коэффициентами $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тогда последовательно применяя формулу (2), получаем

$$f(A) = \alpha_2 f(A_2) + \ldots + \alpha_n f(A_n),$$

где матрицы $A_2, \ldots, A_n$ получены из A заменой первой строки на ее 2-ю, ..., n-ю строки. Каждая из них имеет две одинаковых строки, и потому $f(A_i) = 0, \quad i = 2, \ldots, n$. Отсюда $f(A) = 0$, как и требовалось.

2. Единственность детерминанта. Начнем с того, что с помощью известных нам свойств детерминанта вычислим детерминанты элементарных матриц.

Если матрица S_1 получена из единичной умножением какой-либо строки на число $\lambda \neq 0$, то $\det S_1 = \lambda \det E = \lambda$, согласно свойству линейности детерминанта по строке. Если матрица S_2 получена из единичной матрицы прибавлением одной строки к другой, то из предложения 2 видно, что $\det S_2 = \det E = 1$. Таким образом, имеет место

Предложение 5. *Если существуют две функции d_1 и d_2, удовлетворяющие определению детерминанта, то для любой элементарной матрицы $d_1(S) = d_2(S)$.*

Кроме того, легко проверить, что для любой матрицы A и любой элементарной матрицы S выполнено равенство

$$\det(SA) = \det S \det A. \tag{4}$$

Действительно, достаточно вспомнить, что SA получается из A тем же элементарным преобразованием, что и S из E. Отсюда для матриц первого типа $\det(S_1 A) = \lambda \det A$. Поскольку $\det S_1 = \lambda$, равенство (4) справедливо. Точно так же, для матриц второго типа $\det(S_2 A) = \det A$ и $\det S_2 = 1$.

Теперь может быть доказана

Теорема 1. *На множестве квадратных матриц порядка n не может быть более одной функции, удовлетворяющей определению детерминанта.*

Доказательство. Пусть существуют две такие функции d_1 и d_2. Докажем, что $d_1(A) = d_2(A)$ для любой квадратной матрицы A.

Если A — вырожденная матрица, то по определению $d_1(A) = d_2(A) = 0$.

Рассмотрим невырожденную матрицу A. По предложению 9 § 2 она может быть разложена в произведение элементарных матриц. Последовательно применяя формулу (4), мы получаем

$$d_1(A) = d_1(S_1 \ldots S_N) = d_1(S_1)\, d_1(S_2 \ldots S_N) = \ldots = d_1(S_1) \ldots d_1(S_N).$$

Аналогично, $d_2(A) = d_2(S_1) \ldots d_2(S_N)$. Теперь из предложения 5 следует $d_1(A) = d_2(A)$, как и требовалось.

Вместе с доказательством теоремы, мы получили важную формулу: если невырожденная матрица A разложена в произведение элементарных матриц, то

$$\det A = \det S_1 \ldots \det S_N. \tag{5}$$

Отметим, что детерминант элементарной матрицы либо равен числу $\lambda \neq 0$, либо равен единице, т. е. в любом случае отличен от нуля. Из равенства (5) тогда следует

Предложение 6. *Если матрица невырожденная, то ее детерминант отличен от нуля.*

Следствие. *Для того чтобы матрица была вырожденной, необходимо и достаточно, чтобы ее детерминант был равен нулю.*

3. Существование детерминанта. Разложение по столбцу. *Минором* матрицы называется детерминант какой-либо ее квадратной подматрицы. В частности, вводится

Определение. Пусть a_{ij} — элемент матрицы A порядка n, расположенный в i-й строке и j-м столбце. Назовем *дополнительной подматрицей* этого элемента матрицу D_{ij} порядка $n-1$, получаемую из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. *Дополнительным минором* элемента a_{ij} назовем число $d_{ij} = \det D_{ij}$.

Разумеется, говорить о дополнительном миноре имеет смысл только в том случае, если детерминант порядка $n-1$ существует.

Теорема 2. *На множестве квадратных матриц произвольного порядка определен детерминант.*

Докажем это методом полной индукции по порядку матрицы. Начало индукции трудностей не вызывает, так как мы знаем, что известные нам детерминанты второго и третьего порядка обладают нужными свойствами.

Предположим теперь, что на множестве матриц порядка $n-1$ детерминант существует, и построим на множестве матриц порядка n функцию следующим образом. Фиксируем произвольно номер столбца j и произвольной матрице A порядка n сопоставим число

$$f_j(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j} d_{kj}, \tag{6}$$

где d_{kj} — дополнительный минор элемента a_{kj} в матрице A. Дополнительные миноры существуют в силу предположения индукции. Докажем, что функция (6) удовлетворяет трем условиям, входящим в определение детерминанта.

1. Выберем произвольную строку (пусть ее номер i) и покажем, что выражение в правой части формулы (6) есть линейный многочлен относительно элементов этой строки. В самом деле, при $k = i$ слагаемое $a_{ij}(-1)^{i+j} d_{ij}$ содержит элемент a_{ij} из i-й строки. Коэффициент при нем не зависит от элементов i-й строки, так как эта строка в подматрицу D_{ij} не входит. В остальных слагаемых (при $i \neq k$) множитель a_{kj} не принадлежит i-й строке, а d_{kj} — линейный многочлен от элементов i-й строки. Теперь свойство линейности по строке для функции f_j следует из того, что сумма линейных многочленов — линейный многочлен.

2. Докажем, что для вырожденных матриц f_j равна нулю. В силу предложения 4 и уже доказанной линейности по строке для этого достаточно проверить, что $f_j(A) = 0$ для произвольной матрицы, имеющей две одинаковые строки. Пусть в матрице A строки с номерами i и l одинаковы ($l > i$). Тогда в сумме (6) могут быть не равны нулю только два слагаемых, так как при $k \neq i$ и $k \neq l$ дополнительная подматрица D_{kj} содержит одинаковые строки, и потому минор d_{kj} равен нулю. Итак,

$$f_j(A) = (-1)^{i+j} a_{ij} d_{ij} + (-1)^{l+j} a_{lj} d_{lj}.$$

Учтем, что $a_{ij} = a_{lj}$ ввиду совпадения строк. Тогда

$$f_j(A) = (-1)^j a_{ij}((-1)^i d_{ij} + (-1)^l d_{lj}). \tag{7}$$

Дополнительные подматрицы D_{ij} и D_{lj} состоят из одинаковых элементов, но отличаются порядком строк: в каждой из них осталась одна из двух одинаковых строк, но в D_{lj} она стоит на i-м месте, а в D_{ij} — на $(l-1)$-м. Переставим в матрице D_{ij} строку с номером $l-1$ на i-е место, не нарушая взаимное расположение остальных строк. Для этого меняем ее последовательно местами с $(l-2)$-й, $(l-3)$-й, ..., i-й строками. Потребуется $(l-2)-(i-1)=l-i-1$ перестановок. Отсюда следует, что $d_{ij}=(-1)^{l-i-1}d_{lj}$. Подставив это в равенство (7), мы увидим, что $f_j(A)=0$.

3. Рассмотрим $f_j(E)$, где E — единичная матрица порядка n. В этом случае в сумме (6) только одно ненулевое слагаемое

$$f_j(E)=(-1)^{j+j}d_{jj}.$$

Но D_{jj} — единичная матрица порядка $n-1$, и ее детерминант равен 1. Отсюда $f_j(E)=1$, как и требовалось. Теорема доказана.

В силу теоремы 1 функции f_j при всех j совпадают, и мы можем написать:

$$\det A=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}(-1)^{k+j}d_{kj}. \tag{8}$$

Правая часть этой формулы — линейный многочлен от элементов j-го столбца, следовательно, имеет место

Предложение 7. *Детерминант обладает свойством линейности по столбцам.*

4. Свойства детерминантов. Используя формулу (8) разложения детерминанта по столбцу, мы можем найти коэффициенты в формуле (1).

Предложение 8. *Каков бы ни был номер строки i, детерминант матрицы A порядка n вычисляется по формуле*

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}d_{ij}, \tag{9}$$

где d_{ij} — дополнительный минор элемента a_{ij}.

Доказательство. Для того чтобы найти коэффициент h_j при a_{ij} в формуле (1), сгруппируем все члены в этой формуле, кроме интересующего нас, и обозначим их сумму через q. Тогда

$$\det A=h_ja_{ij}+q.$$

Аналогично мы можем преобразовать разложение по j-му столбцу:

$$\det A=a_{ij}(-1)^{i+j}d_{ij}+r.$$

По определению h_j не зависит от элементов i-й строки, а q содержит все ее элементы кроме a_{ij}. Точно так же, при всех k в дополнительную подматрицу D_{kj} не входит j-й столбец, и, следовательно, d_{kj} не зависит от a_{ij}. В частности, d_{ij} не зависит от a_{ij}. Отсюда же видно, что и r не зависит от этого элемента.

Заметив это, обозначим через A_0 матрицу, которая получена из матрицы A заменой элемента a_{ij} на 0, и увидим, что $\det A_0=q$ и

$\det A_0=r$. Учтем это при вычислении детерминанта матрицы A_1, отличающейся от A заменой элемента a_{ij} на 1:

$$\det A_1=h_j+r=(-1)^{i+j}d_{ij}+r.$$

Отсюда получается нужное значение для h_j.

Предложение 9. *Для любой квадратной матрицы*

$$\det A=\det A^T.$$

Для доказательства определим функцию от матрицы A равенством $f(A)=\det A^T$. По предложению 7 эта функция линейна по столбцам A^T, т. е. по строкам A. Если матрица A вырождена, то вырождена и A^T (согласно следствию из предложения 9 § 2), и потому $f(A)=\det A^T=0$. Наконец, $E^T=E$, а значит, $f(E)=\det E^T=\det E=1$.

Таким образом, f удовлетворяет всем условиям в определении детерминанта, что и заканчивает доказательство.

Из предложения 9 следует равноправность строк и столбцов. Именно, если справедливо какое-либо утверждение о детерминантах, касающееся строк матриц, то верно и аналогичное утверждение, касающееся столбцов, и обратно. Поэтому известные нам свойства детерминантов можно переформулировать для столбцов.

Предложение 10. *Столбцы матрицы линейно зависимы, тогда и только тогда, когда матрица вырождена и детерминант ее равен нулю.*

Если переставить два столбца матрицы, то ее детерминант умножится на (-1).

Если в матрице к одному из столбцов прибавить другой, умноженный на число, то детерминант ее не изменится.

Предложение 11. *Для любых двух квадратных матриц одного порядка*

$$\det AB=\det A\det B.$$

Доказательство. Пусть матрица A невырождена. Разложим ее в произведение элементарных матриц. Тогда $AB=S_1...S_NB$. Последовательно применяя формулу (4), получим

$$\det AB=\det S_1...\det S_N\det B.$$

Теперь из формулы (5) следует нужное утверждение.

Если же матрица A порядка n вырождена, то $\operatorname{Rg}A<n$. Из предложения 4 § 3 тогда следует $\operatorname{Rg}AB<n$. Значит, произведение AB также вырождено и $\det AB$ равен нулю так же, как и $\det A\det B$.

5. Формула полного разложения. Здесь мы получим *формулу полного разложения* детерминанта порядка n, представляющую его как многочлен от элементов матрицы.

Введем предварительно некоторые определения. Мы будем называть *перестановкой* чисел $1,...,n$ эти числа, написанные в каком-либо определенном порядке. Например, из чисел 1 и 2 образуются две перестановки: 1, 2 и 2, 1. Перестановку чисел $1, ..., n$ обозначим $i_1, ..., i_n$.

Число i_k виновно в *нарушении порядка* в перестановке $i_1, ..., i_n$, если оно стоит левее меньшего числа: $k < s$, но $i_k > i_s$. Например, при $n = 4$ в перестановке 2, 4, 3, 1 числа 2 и 3 виновны каждое в одном нарушении порядка, а число 4 — в двух. Итак, общее число нарушений порядка в перестановке равно четырем. Число всех нарушений порядка в перестановке $i_1, ..., i_n$ мы обозначим $N(i_1, ..., i_n)$.

Перестановка называется *четной*, если $N(i_1, ..., i_n)$ — четное число, и *нечетной* в противном случае.

Докажем формулу полного разложения:

$$\det \left\| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \hdotsfor{3} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| = \sum_{(i_1,...,i_n)} (-1)^{N(i_1,...,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}. \quad (10)$$

Сумма в правой части равенства берется по перестановкам. Это означает, что каждой перестановке чисел $1, ..., n$ соответствует слагаемое. Слагаемое для перестановки $i_1, ..., i_n$, составляют так: берут из 1-й строки i_1-й элемент, из 2-й строки — i_2-й элемент и т. д. и перемножают их. В результате в произведение входит по одному и только по одному элементу из каждой строки и каждого столбца. Произведения складываются со знаками, определяемыми четностями соответствующих перестановок.

Формулу (10) мы докажем по индукции. Пусть при $n = 2$ дана матрица

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Двум перестановкам 1, 2 и 2, 1 отвечают, соответственно, слагаемые $(-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22}$ и $(-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21}$. Их сумма равна $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, т. е. как раз детерминанту данной матрицы.

Допустим, что формула верна для матриц порядка $n - 1$, и докажем ее для произвольной матрицы A порядка n. Напишем разложение $\det A$ по первой строке:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_{1k} d_{1k}. \quad (11)$$

В k-е слагаемое этого разложения входит множитель d_{1k}, равный детерминанту подматрицы D_{1k}. Порядок этой матрицы $n - 1$, и по предположению индукции

$$d_{1k} = \det D_{1k} = \sum_{(i_1,...,i_{n-1})} (-1)^{N(i_1,...,i_{n-1})} a_{2i_1} a_{3i_2} \dots a_{ni_{n-1}}.$$

Здесь все номера $i_1, ..., i_{n-1}$ отличны от k, а первые индексы у сомножителей равны $2, ..., n$, так как, сохраняя старые обозначения для элементов матрицы A, мы должны учесть, что в D_{1k} не входят первая строка и k-й столбец.

Теперь в k-м слагаемом формулы (11) можно внести множитель $(-1)^{k+1} a_{1k}$ под знак суммы и записать это слагаемое так:

$$(-1)^{k+1} a_{1k} d_{1k} = \sum_{(i_1,...,i_{n-1})} (-1)^{N(i_1,...,i_{n-1})+k+1} a_{1k} a_{2i_1} a_{3i_2} \dots a_{ni_{n-1}}.$$

Числа $k, i_1, ..., i_{n-1}$ образуют перестановку чисел $1, ..., n$, причем

$$N(k, i_1, ..., i_{n-1}) = N(i_1, ..., i_{n-1}) + k - 1,$$

так как правее k стоит ровно $k - 1$ чисел, меньших k. Следовательно, $N(k, i_1, ..., i_{n-1})$ имеет ту же четность, что и $N(i_1, ..., i_{n-1}) + k + 1$, и мы имеем

$$(-1)^{k+1} a_{1k} d_{1k} = \sum_{(i_1,...,i_{n-1})} (-1)^{N(k,i_1,...,i_{n-1})} a_{1k} a_{2i_1} a_{3i_2} \dots a_{ni_{n-1}}.$$

В правой части этого выражения собраны все те члены из суммы (10), которые соответствуют перестановкам, имеющим k на первом месте. В сумму (11) входят слагаемые для любого k, и потому сумма (11) содержит все члены суммы (10) и, конечно, не содержит никаких других членов. Этим формула полного разложения доказана.

Упражнения

1. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Выразите $\det \alpha A$ через $\det A$.

2. Пусть A — квадратная матрица порядка $2n + 1$, и $A^T = -A$. Докажите, что $\det A = 0$.

3. Докажите, что детерминант любой треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

4. Вычислите

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Матрица A порядка n содержит нулевую подматрицу размеров $m \times k$, причем $m + k > n$. Докажите, что $\det A = 0$.

6. Пусть матрица P порядка n разделена на 4 подматрицы так:

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array} \right\|.$$

Здесь A и C — квадратные матрицы порядков k и $n - k$, а O — нулевая матрица размеров $(n - k) \times k$. Докажите, что $\det P = \det A \det C$.

7. К каждому элементу матрицы A прибавлено одно и то же число t. Пусть получившаяся матрица — $A(t)$.

а) Докажите, что $\det A(t) = kt + b$, где k и b не зависят от t.

б) Найдите k и b.

8. Вычислите детерминант порядка n:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \hdotsfor{5} \\ -1 & -1 & \dots & 2 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

9. Два квадратных многочлена ax^2+bx+c и $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, имеют общий корень. Докажите, что

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

10. Сколько нарушений порядка в перестановке (5, 4, 3, 2, 1)?

§ 5. Системы линейных уравнений (основной случай)

1. Постановка задачи. Систему уравнений вида

$$\begin{array}{c} a_1^1x^1+a_2^1x^2+\ldots+a_n^1x^n=b^1, \\ a_1^2x^1+a_2^2x^2+\ldots+a_n^2x^n=b^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^mx^1+a_2^mx^2+\ldots+a_n^mx^n=b^m \end{array} \tag{1}$$

мы будем называть *системой m линейных уравнений с n неизвестными $x^1,\ldots,x^n$*. Коэффициенты этих уравнений мы будем записывать в виде матрицы

$$A=\left\| \begin{array}{cccc} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{array} \right\|,$$

называемой *матрицей системы*. Числа, стоящие в правых частях уравнений, образуют столбец $\mathbf{b}$, называемый *столбцом свободных членов*.

Матрица системы, дополненная справа столбцом свободных членов, называется *расширенной матрицей системы* и в этой главе обозначается A^*:

$$A^*=\left\| \begin{array}{ccccc} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 & b^1 \\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m & b^m \end{array} \right\|.$$

Если свободные члены всех уравнений равны нулю, то система называется *однородной*.

Определение. Совокупность n чисел $\alpha^1,\ldots,\alpha^n$ называется *решением* системы (1), если каждое уравнение системы обращается в числовое равенство после подстановки в него чисел $\alpha^1,\ldots,\alpha^n$ вместо соответствующих неизвестных $x^1,\ldots,x^n$.

Пользуясь определением линейных операций со столбцами, мы можем записать систему (1) в виде

$$x^1\left\|\begin{array}{c} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^m \end{array}\right\| + \ldots + x^n\left\|\begin{array}{c} a_n^1 \\ \vdots \\ a_n^m \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} b^1 \\ \vdots \\ b^m \end{array}\right\|,$$

(пример 1 § 1) или, короче,

$$x^1\mathbf{a}_1+\ldots+x^n\mathbf{a}_n=\mathbf{b},$$

где $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ — столбцы матрицы системы, а $\mathbf{b}$ — столбец свободных членов. Отсюда сразу вытекает следующая интерпретация решения системы линейных уравнений.

Предложение 1. *Решение системы линейных уравнений — это совокупность коэффициентов, с которыми столбец свободных членов раскладывается по столбцам матрицы системы.*

Используя умножение матриц, можно записать систему (1) еще короче:

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

(пример 1 § 2). Выбор обозначений определяется решаемой задачей.

Наша цель состоит в нахождении всех решений системы (1), причем мы не делаем заранее никаких предположений относительно коэффициентов и свободных членов системы и даже относительно числа уравнений и неизвестных. Поэтому могут представиться различные возможности. Система может вообще не иметь решения, как система

$$\begin{array}{c} x^1+x^2=1, \\ x^1+x^2=0, \end{array}$$

определяющая две параллельные прямые. Система может иметь бесконечное множество решений, как система ($n=2$, $m=1$) $x^1+x^2=0$, решением которой является любая пара чисел, равных по модулю и отличающихся знаком. Примеры систем, имеющих одно-единственное решение, в изобилии встречаются в школьном курсе.

Системы, имеющие решения, называются *совместными*, а не имеющие решений — *несовместными*.

Как следствие предложения 1 и предложения 6 § 1 мы получаем

Предложение 2. *Если столбцы матрицы системы линейно независимы, то система не может иметь двух различных решений: она или несовместна, или имеет единственное решение.*

Основным средством исследования и решения систем линейных уравнений для нас будут элементарные преобразования матриц. Причину этого показывает

Предложение 3. *Элементарным преобразованиям строк расширенной матрицы системы* (1) *соответствуют преобразования системы уравнений, не меняющие множества ее решений.*

Действительно, если строка матрицы A^* умножается на число $\lambda\neq 0$, то преобразованная матрица является расширенной матрицей для системы, получаемой из (1) умножением соответствующего уравнения на λ. Если в матрице i-я строка прибавляется к j-й, то в системе уравнений i-е уравнение прибавляется к j-му. В любом случае преобразованная система является следствием исходной. Но элементарные преобразования обратимы, а значит, и исходная система может быть получена из преобразованной и является ее следствием. Поэтому множества решений обеих систем совпадают.

2. Основной случай. В этом параграфе мы рассмотрим основной случай, когда число уравнений равно числу неизвестных: $m = n$. Кроме того, мы наложим определенные ограничения на коэффициенты системы. Если этого не сделать, то нам придется изучать здесь, например, и систему из одного уравнения, повторенного n раз. Мы хотим, чтобы ни одно уравнение не было следствием остальных. Для этого во всяком случае необходимо, чтобы ни одно из них не было линейной комбинацией остальных (в действительности, этого и достаточно, но мы можем не вникать сейчас в этот вопрос). В случае $m = n$ для линейной независимости уравнений необходимо потребовать, чтобы матрица системы была невырожденной, или, что то же, чтобы ее детерминант был отличен от нуля. Действительно, если одно из уравнений — линейная комбинация остальных с коэффициентами $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$, то соответствующая строка расширенной матрицы есть линейная комбинация остальных строк с теми же коэффициентами. То же относится и к матрице системы.

Теорема 1. *Пусть дана система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{aligned} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + ... + a_n^1x^n &= b^1, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + ... + a_n^2x^n &= b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ a_1^nx^1 + a_2^nx^2 + ... + a_n^nx^n &= b^n. \end{aligned} \tag{2}$$

Если детерминант матрицы системы отличен от нуля, то система имеет решение, и притом только одно.

В самом деле, зная предложение 1, мы можем сформулировать эту теорему иначе. Пусть A — квадратная матрица порядка n и $\det A \neq 0$. Тогда любой столбец $\mathbf{b}$ высоты n раскладывается по столбцам A, и коэффициенты разложения определены однозначно. Так как отличие детерминанта от нуля равносильно невырожденности матрицы, это утверждение совпадает с теоремой 1 §2.

3. Правило Крамера. *Правилом Крамера* называются формулы для нахождения решения системы из n уравнений с n неизвестными и детерминантом, отличным от нуля.

Для того, чтобы найти значения неизвестных, составляющие решение, выберем произвольный номер неизвестной j и рассмотрим детерминант матрицы, получаемой из матрицы системы заменой ее i-го столбца столбцом свободных членов $\mathbf{b}$:

$$\Delta^i = \det \|\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1}\ \mathbf{b}\ \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_n\|\,.$$

Если $x^1, ..., x^n$ — решение, то $\mathbf{b} = x^1\mathbf{a}_1 + ... + x^n\mathbf{a}_n$, и в силу линейности детерминанта по столбцу

$$\Delta^i = x^1 \det\|\,\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1}\ \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_n\,\| + \dots$$
$$\dots + x^i \det\|\,\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1}\ \mathbf{a}_i\ \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_n\,\| + x^n \det\|\,\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{i-1}\ \mathbf{a}_n\ \mathbf{a}_{i+1} \dots \mathbf{a}_n\,\|\,.$$

Все слагаемые, кроме i-го, равны нулю, так как матрицы в них имеют по два одинаковых столбца. Поэтому $\Delta^i = x^i \det A$. Отсюда

$$x^i = \frac{\Delta^i}{\det A} \qquad (i = 1, ..., n) \tag{3}$$

Формулы Крамера при $n = 3$ мы вывели в п. 6 §4 гл. I.

4. Формулы для элементов обратной матрицы. Рассмотрим квадратную матрицу A с детерминантом, отличным от нуля. Правило Крамера позволяет получить формулы, выражающие элементы обратной матрицы A^{-1} через элементы A. Пусть $\mathbf{e}_j$ — j-й столбец единичной матрицы. Заметим, что j-й столбец A^{-1} при произвольном j равен $A^{-1}\mathbf{e}_j$. Если мы обозначим его $\mathbf{x}_j$, то $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$. Применим правило Крамера для нахождения i-й неизвестной в решении этой системы: $x_j^i = \Delta^i / \det A$, где Δ^i — детерминант матрицы, получаемой из A заменой ее i-го столбца на j-й столбец единичной матрицы. Разлагая Δ^i по этому столбцу, мы имеем только одно слагаемое, так как в $\mathbf{e}_j$ только j-й элемент равен 1, а остальные равны нулю. Следовательно, $\Delta^i = (-1)^{i+j} d_i^j$, где d_i^j — дополнительный минор элемента a_i^j в матрице A. Подчеркнем, что этот элемент стоит в позиции, симметричной с позицией, в которой расположен вычисляемый нами элемент x_j^i. Окончательно,

$$x_j^i = \frac{(-1)^{i+j} d_i^j}{\det A}. \tag{4}$$

Формулы (4), как и правило Крамера, имеют некоторое теоретическое значение, но для численного решения систем линейных уравнений и обращения матриц применяются совсем другие методы.

Упражнения

1. Пусть числа x_1, x_2, x_3 попарно различны. Докажите, что при любых y_1, y_2, y_3 найдется единственный многочлен степени не выше двух, график которого проходит через точки с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

2. Пользуясь формулами (4), найдите обратную для матрицы

$$\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}.$$

§ 6. Системы линейных уравнений (общая теория)

1. Условия совместности. Общие определения, касающиеся систем линейных уравнений, были введены в начале §5. Теперь мы займемся изучением систем из m уравнений с n неизвестными. Систему

$$\begin{aligned} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + ... + a_n^1x^n &= b^1, \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + ... + a_n^2x^n &= b^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots& \\ a_1^mx^1 + a_2^mx^2 + ... + a_n^mx^n &= b^m \end{aligned}$$

мы можем кратко записать в виде

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{1}$$

Система задается своей расширенной матрицей A^*, получаемой объединением матрицы системы A и столбца свободных членов $\mathbf{b}$.

Простое и эффективное условие, необходимое и достаточное для совместности системы (1), дает следующая теорема, называемая теоремой *Кронекера–Капелли*.

Теорема 1. *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.*

Иначе утверждение теоремы можно сформулировать так: приписывание к матрице A размеров $m \times n$ столбца $\mathbf{b}$ высоты m не меняет ее ранга тогда и только тогда, когда этот столбец — линейная комбинация столбцов A.

Докажем это. Если $\operatorname{Rg} A^* = \operatorname{Rg} A$, то базисный минор A является базисным и для A^*. Следовательно, $\mathbf{b}$ раскладывается по базисным столбцам A. Мы можем считать его линейной комбинацией всех столбцов A, добавив недостающие столбцы с нулевыми коэффициентами.

Обратно, если $\mathbf{b}$ раскладывается по столбцам A, то элементарными преобразованиями столбцов можно превратить A^* в матрицу A_0, получаемую из A приписыванием нулевого столбца. Согласно предложению 2 § 3, $\operatorname{Rg} A_0 = \operatorname{Rg} A^*$. С другой стороны, $\operatorname{Rg} A_0 = \operatorname{Rg} A$, так как добавление нулевого столбца не может создать новых невырожденных подматриц. Отсюда $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A^*$, как и требовалось.

Предложение 1. *Пусть матрица A^* приведена к упрощенному виду с помощью элементарных преобразований строк. Система* (1) *несовместна тогда и только тогда, когда в упрощенную матрицу входит строка* $\|0 \ \ldots \ 0 \ 1\|$.

Доказательство. Пусть рассматриваемая система не совместна, и $\operatorname{Rg} A^* > \operatorname{Rg} A = r$. В упрощенном виде матрицы A последние $m - r$ строк — нулевые. Последний столбец матрицы A^* должен быть базисным, и в упрощенном виде матрицы A^* последний столбец — $r+1$-й столбец единичной матрицы. Поэтому $r+1$-я строка этой матрицы есть $\|0 \ \ldots \ 0 \ 1\|$.

Обратно, если в матрице содержится такая строка, то последний столбец не может быть линейной комбинацией остальных, и система с упрощенной матрицей несовместна. Тогда несовместна и исходная система (предложение 3 § 5).

Иначе это предложение можно сформулировать так.

Следствие. *Система линейных уравнений несовместна тогда и только тогда, когда противоречивое равенство* $0 = 1$ *является линейной комбинацией ее уравнений.*

Равенство рангов матрицы системы и расширенной матрицы можно выразить, понимая ранг матрицы как строчный ранг. Это приведет

нас к важной теореме, известной как *теорема Фредгольма*.

Транспонируем матрицу A системы (1) и рассмотрим систему из n линейных уравнений

$$\begin{gathered}
a_1^1 y_1 + a_1^2 y_2 + \ldots + a_1^m y_m = 0, \\
a_2^1 y_1 + a_2^2 y_2 + \ldots + a_2^m y_m = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n^1 y_1 + a_n^2 y_2 + \ldots + a_n^m y_m = 0
\end{gathered} \tag{2}$$

с m неизвестными, матрицей A^T и свободными членами, равными нулю. Она называется *сопряженной однородной* системой для системы (1). Если $\mathbf{y}$ — столбец высоты m из неизвестных, то систему (2) можно записать как $A^T\mathbf{y} = \mathbf{o}$, или лучше в виде

$$\mathbf{y}^T A = \mathbf{o}, \tag{3}$$

где $\mathbf{o}$ — нулевая строка длины n.

Теорема 2. *Для того чтобы система* (1) *была совместна, необходимо и достаточно, чтобы каждое решение сопряженной однородной системы* (3) *удовлетворяло уравнению*

$$\mathbf{y}^T\mathbf{b} \equiv y_1 b^1 + \ldots + y_m b^m = 0. \tag{4}$$

Доказательство. 1°. Пусть система (1) совместна, т. е. существует столбец $\mathbf{x}$ высоты n, для которого $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Тогда для любого столбца $\mathbf{y}$ высоты m выполнено $\mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{b}$. Если $\mathbf{y}$ — решение системы (3), то $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = (\mathbf{y}^T A)\mathbf{x} = \mathbf{o}\mathbf{x} = 0$.

2°. Предположим теперь, что система (1) несовместна. Тогда согласно предложению 1 строка $\|0 \ \ldots \ 0 \ 1\|$ входит в упрощенный вид расширенной матрицы $A^* = \|A \mid \mathbf{b}\|$ и, следовательно, является линейной комбинацией ее строк. Обозначим коэффициенты этой линейной комбинации $y_1, \ldots, y_m$ и составим из них столбец $\mathbf{y}$. Для этого столбца

$$\mathbf{y}^T \|A \mid \mathbf{b}\| = \|0 \ \ldots \ 1\|$$

(предложение 1 § 2). Это же равенство можно расписать как два: $\mathbf{y}^T A = \mathbf{o}$ и $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = 1$. Итак, нам удалось найти решение системы (3), не удовлетворяющее условию (4). Это заканчивает доказательство.

В качестве примера применим теорему Фредгольма к выводу условия параллельности двух различных прямых на плоскости. Их уравнения составляют систему

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Она не имеет решений, если существуют такие числа y_1, y_2, что $y_1 A_1 + y_2 A_2 = 0$, $y_1 B_1 + y_2 B_2 = 0$, но $y_1 C_1 + y_2 C_2 \neq 0$. Ясно, что y_1 и y_2 не равны нулю. Поэтому можно положить $\lambda = -y_2/y_1$ и записать полученное условие в виде: существует число λ такое, что $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$ и $C_1 \neq \lambda C_2$. В таком виде условие нам известно из предложения 7 § 2 гл. II.

2. Нахождение решений. В этом пункте мы будем предполагать, что дана совместная система из m линейных уравнений с n неизвестными. Ранг матрицы системы обозначим r. Поскольку ранг расширенной матрицы тоже равен r, мы можем считать базисные столбцы матрицы системы базисными столбцами расширенной матрицы. Элементарными преобразованиями строк приведем расширенную матрицу к упрощенному виду (предложение 6 § 3). Наша система линейных уравнений перейдет в эквивалентную ей систему из r линейно независимых уравнений.

Для удобства записи будем предполагать, что первые r столбцов — базисные. Тогда преобразованную систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} x^1 &= \beta^1 - (\alpha^1_{r+1}x^{r+1} + \ldots + \alpha^1_n x^n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^r &= \beta^r - (\alpha^r_{r+1}x^{r+1} + \ldots + \alpha^r_n x^n). \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь α^i_j и β^i — элементы преобразованной расширенной матрицы. В левых частях равенств мы оставили неизвестные, соответствующие выбранным нами базисным столбцам, так называемые *базисные* неизвестные. Остальные неизвестные, называемые *параметрическими*, перенесены в правые части равенств.

Как бы мы ни задали значения параметрических неизвестных, по формулам (5) мы найдем значения базисных так, что они вместе со значениями параметрических неизвестных образуют решение системы (1). Легко видеть, что так мы получим все множество решений.

На формулах (5) можно было бы и остановиться, но ниже мы дадим более простое и наглядное, а также принципиально важное описание совокупности решений системы линейных уравнений.

3. Приведенная система. Сопоставим системе линейных уравнений (1) однородную систему с той же матрицей коэффициентов:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{o}. \tag{6}$$

По отношению к системе (1) она называется *приведенной*.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* $\mathbf{x}_0$ *— решение системы* (1). *Столбец* $\mathbf{x}$ *также будет ее решением тогда и только тогда, когда найдется такое решение* $\mathbf{y}$ *приведенной системы* (6), *что* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbf{x}$ — решение системы (1). Рассмотрим разность $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Для нее $A\mathbf{y} = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{o}$.

Обратно, если $\mathbf{y}$ — решение системы (6), и $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$, то $A\mathbf{x} = A\mathbf{x}_0 + A\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{o} = \mathbf{b}$.

Это предложение сводит задачу описания множества решений совместной системы линейных уравнений к описанию множества решений ее приведенной системы.

Однородная система совместна. Действительно, нулевой столбец является ее решением. Это решение называется *тривиальным*.

Пусть столбцы матрицы A линейно независимы, т. е. $\operatorname{Rg} A = n$.

Тогда система (6) имеет единственное решение (предложение 2 § 5) и, следовательно, нетривиальных решений не имеет.

П р е д л о ж е н и е 3. *Если* $\mathbf{x}_1$ *и* $\mathbf{x}_2$ *— решения однородной системы, то любая их линейная комбинация — также решение этой системы.*

Действительно, из $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{o}$ и $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{o}$ для любых α и β следует $A(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = \alpha A\mathbf{x}_1 + \beta A\mathbf{x}_2 = \mathbf{o}$.

Если однородная система имеет нетривиальные решения, то можно указать несколько линейно независимых решений таких, что любое решение является их линейной комбинацией. Сделаем это.

О п р е д е л е н и е. Матрица F, состоящая из столбцов высоты n, называется *фундаментальной матрицей* для однородной системы с матрицей A, если:

а) $AF = O$;

б) столбцы F линейно независимы;

в) ранг F максимален среди рангов матриц, удовлетворяющих условию а).

Столбцы фундаментальной матрицы называются *фундаментальной системой решений.*

Если фундаментальная матрица существует, то каждый ее столбец в силу условия (а) — решение системы. Если система не имеет нетривиальных решений, то фундаментальной матрицы нет. Это будет в том случае, когда столбцы A линейно независимы: $\operatorname{Rg} A = n$.

Ниже мы докажем, что в остальных случаях фундаментальная матрица существует, но сначала выясним, что означает третье условие в определении.

П р е д л о ж е н и е 4. *Пусть* A *— матрица размеров* $m \times n$ *и ранга* r. *Если* $AF = O$, *то* $\operatorname{Rg} F \leqslant n - r$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем матрицу A к упрощенному виду элементарными преобразованиями строк, а затем элементарными преобразованиями столбцов обратим в нулевые все небазисные столбцы. Мы получим матрицу $A' = PAQ$, где P и Q — произведения соответствующих элементарных матриц. Первые r строк A' — строки единичной матрицы порядка n, а остальные — нулевые. Обозначим $F' = Q^{-1}F$. Тогда $\operatorname{Rg} F' = \operatorname{Rg} F$. Используя предложение 1 § 2, легко заметить, что первые r строк матрицы $A'F'$ совпадают с первыми r строками F'. Но $A'F' = PAF = O$ и, следовательно, F' содержит r нулевых строк. Так как всего в ней n строк, $\operatorname{Rg} F' \leqslant n - r$. Это равносильно доказываемому утверждению.

Покажем теперь, как может быть построена фундаментальная матрица. Согласно предложению 1 § 5, решение однородной системы состоит из коэффициентов равной нулю линейной комбинации столбцов матрицы системы. Мы можем получить такие линейные комбинации, основываясь на теореме о базисном миноре. Снова для удобства записи будем считать, что в матрице A первые r столбцов — базисные. Каждый из небазисных столбцов $\mathbf{a}_j$ $(j = r+1, \ldots, n)$ раскладывается

по базисным:
$$\mathbf{a}_j = \alpha_j^1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_j^r \mathbf{a}_r. \tag{7}$$

Отсюда следует, что столбец $\left\| -\alpha_j^1 \ldots -\alpha_j^r\ 0 \ldots 0\ 1\ 0 \ldots 0 \right\|^T$ является решением. (Единица в нем стоит на j-м месте.)

Таких решений можно составить столько, сколько есть небазисных столбцов, т. е. $n-r$. Убедимся в том, что эти решения линейно независимы. Для этого объединим все столбцы в одну матрицу

$$\left\| \begin{matrix} -\alpha_{r+1}^1 & -\alpha_{r+2}^1 & \ldots & -\alpha_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\alpha_{r+1}^r & -\alpha_{r+2}^r & \ldots & -\alpha_n^r \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{8}$$

Подматрица в последних $n-r$ строках — единичная. Поэтому ранг матрицы (8) равен числу столбцов, и столбцы линейно независимы.

Таким образом, мы получили

Предложение 5. *Если ранг матрицы однородной системы линейных уравнений r меньше числа неизвестных n, то система имеет фундаментальную матрицу из $n-r$ столбцов.*

Итак, система столбцов (8) — фундаментальная система решений. Она называется *нормальной фундаментальной* системой решений. Каждому выбору базисных столбцов соответствует своя нормальная фундаментальная система решений. Вообще же, каждая система из $n-r$ линейно независимых решений является фундаментальной.

Для нахождения матрицы (8) можно привести матрицу A системы к упрощенному виду, что даст коэффициенты разложения небазисных столбцов по базисным. (См. задачу 3 § 3 и задачу 4 настоящего параграфа.)

Пусть F — фундаментальная матрица системы $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Рассмотрим произвольный столбец $\mathbf{c}$ высоты $n-r$. Произведение $F\mathbf{c}$ — столбец высоты n, и из равенства $AF\mathbf{c} = \mathbf{o}$ следует, что при любом $\mathbf{c}$ столбец $F\mathbf{c}$ — решение системы. Оказывается, имеет место

Предложение 6. *Столбец $\mathbf{x}$ — решение системы $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ тогда и только тогда, когда существует такой столбец $\mathbf{c}$, что*
$$\mathbf{x} = F\mathbf{c}. \tag{9}$$

Остается доказать необходимость условия. Пусть $\mathbf{x}$ — решение. Присоединив его к F, получим матрицу $F^* = \| \ F \mid \mathbf{x} \ \|$. Эта матрица удовлетворяет условию $AF^* = O$, так как каждый ее столбец — решение. Значит, $\operatorname{Rg} F^* = n - r$. По теореме Кронекера–Капелли мы заключаем отсюда, что существует столбец $\mathbf{c}$, удовлетворяющий системе $F\mathbf{c} = \mathbf{x}$.

4. Общее решение системы линейных уравнений. Теперь мы можем собрать воедино наши результаты — предложения 2 и 6.

Теорема 3. *Если $\mathbf{x}_0$ — некоторое решение системы* (1), *а F — фундаментальная матрица ее приведенной системы, то столбец*
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + F\mathbf{c} \tag{10}$$
при любом $\mathbf{c}$ является решением системы (1). *Наоборот, для каждого ее решения $\mathbf{x}$ найдется такой столбец $\mathbf{c}$, что оно будет представлено формулой* (10).

Выражение, стоящее в правой части формулы (10), называется *общим решением* системы линейных уравнений. Если $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{n-r}$ — фундаментальная система решений, а $c_1, \ldots, c_{n-r}$ — произвольные постоянные, то формула (10) может быть написана так:
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + c_1\mathbf{f}_1 + \ldots + c_{n-r}\mathbf{f}_{n-r}. \tag{11}$$

Теорема 3 верна, в частности, и для однородных систем. Если $\mathbf{x}_0$ — тривиальное решение, то (10) совпадает с (9).

Теорема 1 § 5 гласит, что для существования единственного решения системы из n линейных уравнений с n неизвестными достаточно, чтобы матрица системы имела детерминант, отличный от нуля. Сейчас легко получить и необходимость этого условия.

Предложение 7. *Пусть A — матрица системы из n линейных уравнений с n неизвестными. Если $\det A = 0$, то система либо не имеет решения, либо имеет бесконечно много решений.*

Доказательство. Равенство $\det A = 0$ означает, что $\operatorname{Rg} A < n$ и, следовательно, приведенная система имеет бесконечно много решений. Если данная система совместна, то из теоремы 3 следует, что и она имеет бесконечно много решений.

5. Пример. Рассмотрим уравнение плоскости как систему
$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{12}$$
из одного уравнения. Пусть $A \neq 0$ и потому является базисным минором матрицы системы. Ранг расширенной матрицы 1, значит, система совместна. Одно ее решение можно найти, положив параметрические неизвестные равными нулю: $y = z = 0$. Мы получим $x = -D/A$. Так как $n = 3$, $r = 1$, фундаментальная матрица имеет два столбца. Мы найдем их, придав параметрическим неизвестным два набора значений: $y = 1$, $z = 0$ и $y = 0$, $z = 1$. Соответствующие значения базисной неизвестной x, найденные из приведенной системы, будут $-B/A$ и $-C/A$. Итак, общее решение системы (12)
$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -D/A \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| + c_1 \left\| \begin{matrix} -B/A \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| + c_2 \left\| \begin{matrix} -C/A \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|. \tag{13}$$

Выясним геометрический смысл полученного решения. Очевидно, прежде всего, что решение $\| -D/A\ 0\ 0 \|^T$ состоит из координат некоторой (начальной) точки плоскости, или, что то же, из компонент ее радиус-вектора. В формуле (10) решение $\mathbf{x}_0$ можно выбирать произвольно. Это соответствует произволу выбора начальной точки плоскости. Согласно предложению 2 § 2 гл. II компоненты лежащих в плоскости векторов удовлетворяют уравнению $A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0$, т. е. приведенной системе. Два линейно независимых решения этой системы (фундаментальная система решений) могут быть приняты за направляющие векторы плоскости. Таким образом, формула (13) — не что иное, как параметрические уравнения плоскости.

Рекомендуем читателю рассмотреть систему уравнений двух пересекающихся плоскостей и показать, что ее общее решение представляет собой параметрические уравнения прямой.

Упражнения

1. Система линейных уравнений с матрицей A совместна при любом столбце свободных членов тогда и только тогда, когда строки матрицы A линейно независимы. Докажите это:

а) пользуясь теоремой Кронекера–Капелли;

б) пользуясь теоремой Фредгольма.

2. Даны векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. При помощи теоремы Фредгольма докажите, что уравнение $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] = \mathbf{b}$ имеет решение тогда и только тогда, когда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

3. Найдите фундаментальную матрицу для системы с матрицей

$$\|1\ 1\ 1\|.$$

4. Пусть $\|E_r \mid B\|$ — упрощенный вид матрицы однородной системы уравнений. Найдите фундаментальную матрицу системы.

5. Пусть F — фундаментальная матрица системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ и строки A линейно независимы. Какая будет фундаментальная матрица у системы: а) $F\mathbf{y} = \mathbf{0}$; б) $F^T\mathbf{z} = \mathbf{0}$?

6. Напишите общее решение системы с расширенной матрицей

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{array}\right\|.$$

7. Пусть матрица F размеров $n \times p$ — фундаментальная матрица некоторой системы уравнений. Докажите, что F' будет фундаментальной матрицей той же системы тогда и только тогда, когда найдется невырожденная матрица Q порядка p, такая, что $F' = FQ$.

8. Рассматривается система из трех уравнений с двумя неизвестными. Убедитесь, что применение теоремы Фредгольма к этой системе равносильно такому (геометрически очевидному) утверждению: вектор $\mathbf{b}$ раскладывается по векторам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ тогда и только тогда, когда он ортогонален каждому вектору $\mathbf{y}$, ортогональному этим векторам.

9. Пусть строки матрицы A линейно независимы, F – соответствующая фундаментальная матрица, а матрица D получена из A приписыванием к ней снизу матрицы F^T. Докажите, что D невырождена.

УКАЗАНИЯ И ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В конце каждого параграфа приведены упражнения, относящиеся к материалу данного параграфа. Решая их, надо иметь в виду, что получение верного ответа необходимо, но не оно является основной целью. Эта цель — посмотреть на конкретные частные случаи общих фактов, поупражняться в применении методов, изложенных в соответствующем параграфе. Поэтому не все предлагаемые способы решения одинаково полезны.

Часто встречается тенденция решать задачи не теми методами, которые в данный момент изучаются, например, в начале изучения аналитической геометрии студент бывает склонен решать предложенные ему задачи методами элементарной геометрии. Это бессмысленно: элементарная геометрия уже изучена, сейчас нужно овладеть новым материалом.

Иногда есть возможность догадаться, каков должен быть ответ, а затем проверить свою догадку. Это, конечно, прекрасно, но мало чему учит. Сделав это, подумайте, как бы вы стали решать, если бы вам не удалось догадаться.

Как правило, решение задач не требует длительных рассуждений или громоздких вычислений. Если найденный вами способ решения трудоемок, посмотрите, нельзя ли сделать задачу иначе. В некоторых упражнениях указания приведены для того, чтобы обратить внимание читателя на тот путь решения, который кажется автору предпочтительным. В любом случае перед тем, как окончательно остановиться на определенном способе решения, полезно сравнить его с другими возможными способами. После того как решение получено, подумайте, нельзя ли получить его проще.

Ответы ко всем упражнениям приведены, но в жизни приходится решать задачи без готовых ответов, и потому полезно выработать в себе привычку делать проверку. Там, где это возможно, следует подставить полученный ответ в условие задачи и убедиться, что он удовлетворяет условию. Это, однако, не гарантирует, что найдены все возможные решения задачи. Если полная проверка невозможна, то следует проделать частичную проверку: удовлетворяет ли полученное решение хотя бы части условий задачи и естественным требованиям, которым оно необходимо должно удовлетворять (скажем, является ли вычисленная длина положительной)? Сколько решений должна иметь задача из общих соображений? Совпадает ли размерность найденной величины с размерностью искомой? Верна ли найденная общая формула в простейших частных случаях?

Важно обратить внимание на обоснованность ответа. Особенно это относится к задачам на доказательство, которые можно рассматривать как задачи с готовым ответом. Не каждый текст, заканчивающийся словами “что и требовалось доказать", является доказательством. Здесь трудно дать общие рекомендации, однако, закончив доказательство, задайте себе два вопроса: положились бы вы на это рассуждение, если бы от его результата зависело что-то очень важное для вас, или потребовали бы дополнительных гарантий? Если бы кто-то привел вам это доказательство, то что бы вы возразили?

Часто ошибка в рассуждении находится там, где написано "очевидно". Вы в этом уверены, но на чем основывается эта уверенность? Очевидные вещи тем и хороши, что их легко доказать. Если нет полной ясности, то копайтесь, пока ее не будет.

Приведенные ниже указания к задачам иногда имеют форму утверждения. На такое утверждение надо смотреть как на вспомогательный результат, который еще нужно проверить.

УКАЗАНИЯ

Глава I

§ 1

4. Если такая точка существует, то $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=3\overrightarrow{PO}$ для любой точки P.

§ 4

3. Разложите $\mathbf{a}$ по сторонам треугольника. Проекция линейной комбинации равна линейной комбинации (с теми же коэффициентами) проекций этих же векторов.

5. Заметьте, что $([\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{a},\mathbf{c}])=(\mathbf{a},[\mathbf{b},[\mathbf{a},\mathbf{c}]])$. Далее можно применить формулу двойного векторного произведения. Это преобразование бывает полезно и в других случаях.

Глава II

§ 2

5. Если два данных вектора не коллинеарны, то часто бывает удобно использовать базис, составленный из этих векторов и их векторного произведения.

§ 3

2. Если умножить уравнение на его свободный член, то свободный член полученного уравнения будет положителен.

Глава III

§ 1

2. Члены второй степени составляют квадрат двучлена $3x-4y$. Мы не можем положить $y'=3x-4y$, $x'=x$, так как при этом мы перейдем к непрямоугольной системе координат. Но замена $y'=(-3x+4y)/5$, $x'=(4x+3y)/5$ переводит прямоугольную систему в прямоугольную.

5. Так как базисные векторы равны по длине, векторы $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$ взаимно перпендикулярны. Удобно выбрать оси декартовой прямоугольной системы координат направленными вдоль этих векторов.

§ 2

2. Факт очевиден, если использовать результат упр. 3. Но попробуйте доказать это непосредственно.

5. Непосредственный подсчет не сложен, но можно ввести декартову прямоугольную систему координат, оси которой направлены вдоль радиусов, и сослаться на результат упр. 6 § 1.

6. Проведите касательную к параболе, параллельную данной прямой.

§ 3

6. Посмотрите на упр. 4.

§ 4

1. Следует различать два случая: когда пересечение есть прямая, и когда оно — пара совпавших прямых.

5. Решение. Уравнением линии пересечения является система
$$5x^2-3y^2+4z^2=0,\quad -x^2+y^2-z^2=1.$$
Если мы исключим z (т. е. найдем его из второго уравнения и подставим в первое), то получим уравнение $x^2+y^2=4$. Это уравнение — следствие системы, и потому определяет множество, содержащее линию пересечения. Так как в уравнение не входит z, это множество — цилиндр с образующими, параллельными $\mathbf{e}_3$. Пересекая цилиндр плоскостью $z=0$, мы получаем окружность с уравнением $z=0$, $x^2+y^2=4$, на которой лежит проекция. Однако проекция не совпадает с окружностью. Исключая z, мы должны были запомнить условие $z^2=-1-x^2+y^2\geqslant 0$. Итак, проекция — две дуги окружности: $x^2+y^2=4$, $y^2-x^2\geqslant 1$ на плоскости $z=0$.

6. Гипербола не умещается в полуплоскости.

Глава IV

§ 2

8. Посмотрите, во что переходят начало координат и базисные векторы.

9. Множество образов всех точек при линейном неаффинном преобразовании — прямая линия или точка.

11. Гомотетия с центром в точке пересечения медиан.

§ 3

1. Преобразуйте плоскость так, чтобы две из прямых перешли в оси координат.

3. Искомые направления совпадают с теми, о которых идет речь в предложении 7.

4. Обратите внимание на то, что прямая, имеющая единственную общую точку с параболой или гиперболой, не обязательно является касательной.

Глава V

§ 3

3. б) Коэффициенты разложения те же, что и в упрощенной матрице.

4. Что означает теорема о базисном миноре при $\operatorname{Rg} A=1$?

5. Элементарными преобразованиями строк обратите в нулевые все строки, кроме отмеченных.

6. Оцените ранги матриц $\|A|B\|$, $\|A|A+B\|$.

§ 4

5. Индукция. Разложите детерминант по столбцу, не пересекающему подматрицу.

6. При произвольном n индукция по k. Разложите по первому столбцу.

8. Используйте результат задачи 7, а).

9. Пусть общий корень t. Умножим первый столбец на t^3, второй — на t^2, третий — на t и все прибавим к четвертому столбцу.

§ 6

4. Используйте упр. 3, б) из § 3 и способ построения матрицы (8) из § 6.

Глава VI

§ 2

2. Вектор с координатами ξ^1, ξ^2, ξ^3, ξ^4 принадлежит $\mathscr{L}'$ тогда и только тогда, когда совместна система уравнений с неизвестными α и β:

$$\alpha \left\| \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \right\| + \beta \left\| \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \\ \xi^4 \end{matrix} \right\|.$$

4. Для нахождения линейных зависимостей между векторами можно привести матрицу из их координатных столбцов к упрощенному виду с помощью элементарных преобразований строк. Находим, что a_1, a_2 и b_1 линейно независимы, а $b_2 = \frac{1}{4}a_1 - \frac{1}{4}a_2 + 3b_1$. Поэтому $z = a_1 - a_2 = 4(b_2 - 3b_1)$ принадлежит $\mathscr{L}' \cap \mathscr{L}''$.

§ 4

3. В инвариантном подпространстве нечетной размерности найдется собственный вектор.

8. $T^2 = E$. Отсюда следует, что $\lambda^2 = 1$.

9. $A^{-1}ABA = BA$.

10. Воспользуйтесь теоремой 4.

§ 6

6. Если B — матрица билинейной функции, то $B\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ — система уравнений ее нуль-пространства (см. упр. 5). Пересечение нуль-пространств всех форм задается системой $D\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$. Поместим в этом пересечении последние $n-k$ базисных векторов.

7. Если $A^T A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{\xi}^T A^T A\boldsymbol{\xi} = (A\boldsymbol{\xi})^T(A\boldsymbol{\xi}) = 0$, и потому $A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$.

8. Найдется верхняя треугольная матрица S такая, что $S^T BS = E$ (см. доказательство критерия Сильвестра).

9. Пусть $\mathrm{k}(x_1) > 0$, а $\mathrm{k}(x_2) < 0$. Рассмотрим многочлен $\mathrm{k}(tx_1 + x_2)$ от переменной t.

Глава VII

§ 1

4. б) Если вы нашли такую матрицу, то постарайтесь с ее помощью построить матрицу такого типа вдвое большего порядка. Что это за матрицы для $n = 1$ и $n = 2$?

5. $R = Q^T A$.

§ 2

6. Чтобы найти инвариантные подпространства, представьте характеристический многочлен $\lambda^4 + 1$ как $(\lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + 1)(\lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1)$ и воспользуйтесь предложением 8 § 4 гл. VI. Второе подпространство — ортогональное дополнение первого.

§ 3

7. См. задачу 9.

§ 4

3. Преобразование унитарного пространства, имеющее такую матрицу в ортонормированном базисе, является унитарным.

Глава VIII

§ 2

2. $R = 4$, $r = 2$. Малая квадратичная форма не является ни положительно, ни отрицательно полуопределенной.

ОТВЕТЫ

Глава I

§ 1

1. $|BC|/|CA| = \lambda/(1-\lambda)$. **2.** $\overrightarrow{AC}(1, 1/2)$. **3.** $(5, -3)$.

4. Точка пересечения медиан: $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

§ 2

1. $(1, 1)$. **2.** $D(x_1 - x_2 + x_3, y_1 - y_2 + y_3)$.

4. $x = r\cos\varphi\cos\theta$; $y = r\sin\varphi\cos\theta$; $z = r\sin\theta$.

§ 3

1. $\alpha = a\alpha'$, $x = ax' + a_0$. Координаты уменьшаются вдвое.

2. $x = \frac{1}{2}(-x' + y' + 1)$, $y = -\frac{1}{2}(x' + y' - 1)$.

3. O' — противоположная O вершина параллелепипеда, построенного на базисных векторах. Концы соответствующих базисных векторов совпадают.

§ 4

3. $(3/2)\mathrm{a}$. **5.** $\cos\theta = (\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma)/(\sin\beta\sin\gamma)$. **6.** $-12\sqrt{2}$.

7. Необходимо и достаточно, чтобы детерминант матрицы был положителен.

8. $(\text{см})^{-1}$.

Глава II

§ 1

1. $x^2+y^2=4$. **3.** $x^2+xy+y^2-x-y=0$. **4.** $x^2+y^2=4z^2$.

§ 2

1. $x=2-2t,\ y=2+t,\ z=t$. **2.** $x=1+2t_1-3t_2,\ y=t_1,\ z=t_2$.

3. $(2,0,2),\ t_1=-1,\ t_2=1$. **4.** $3x-2y-5z+4=0$.

5. а) $\mathbf{r}=\dfrac{[\mathbf{a},\mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}+t\mathbf{a}$; б) $\mathbf{r}=-\dfrac{D_1\mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}_1|^2}-\dfrac{D_2\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_2|^2}+t[\mathbf{n}_1,\mathbf{n}_2]$.

§ 3

1. $O(-8,1),\ r=4$. **2.** $(A_1A_2+B_1B_2)C_1C_2<0$.

3. $x=8t,\ y=65t,\ z=49t$.

4. $O_1(0,2,1),\ r_1=\sqrt{2}$; $O_2\Big(0,\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\Big),\ r_2=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

5. $O\Big(\dfrac{31}{8},\dfrac{6}{5},-\dfrac{29}{40}\Big)$.

6. $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{a}_1\dfrac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2,\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_2)}{(\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)}+\mathbf{a}_0t$.

Глава III

§ 1

1. $x'^2-\dfrac{y'^2}{4}=1$; $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')-\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')+\dfrac{1}{2}$.

2. $y'^2=2x'$; $x'=\dfrac{4x+3y+1}{5},\ y'=\dfrac{-3x+4y-1}{5}$.

3. Возможны: пары пересекающихся, параллельных и совпавших прямых.

4. $A=C,\ B=0,\ D^2+E^2>AF$. **5.** Эллипс с полуосями $4\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$.

§ 2

3. Для эллипса, параболы и ближайшей к фокусу ветви гиперболы $r=p/(1-\varepsilon\cos\varphi)$. Для второй ветви гиперболы $r=-p/(1+\varepsilon\cos\varphi)$.

5. $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$. **6.** $2\sqrt{2}$.

8. Прямая соединяет точки касания касательных, проведенных к линии из данной точки.

§ 3

4. $O\Big(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\Big)$; $3x+y+1=0,\ x+3y-1=0$.

5. Пара пересекающихся прямых.

7. $x-3y+3=0$.

§ 4

2. а) Однополостный гиперболоид $x^2+y^2-2z^2+4z=4$;

б) конус $x^2+y^2=2(z-2)^2$.

3. Для гиперболического параболоида, заданного каноническим уравнением, нормальные векторы плоскостей $\mathbf{n}_1(b,a,0)$ и $\mathbf{n}_2(-b,a,0)$.

Глава IV

§ 1

1. б) Да; в) нет. **2.** $(\mathsf{fgh})^{-1}=\mathsf{h}^{-1}\mathsf{g}^{-1}\mathsf{f}^{-1}$.

3. $x^*=5-y,\ y^*=5-x$.

§ 2

1. а) Да. б) нет. **2.** Прямая $y=3$. **4.** $(1,1)$.

6. Свободные члены заменятся на нуль.

7. а) $x^*=b_2x+a_2y+c_2$;

б) $x^*=a_1x+2b_1y+c_1,\ y^*=b_1x+a_1y+c_1$; $y^*=\dfrac{1}{2}a_2x+b_2y+\dfrac{1}{2}c_2$.

8. $y=x\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$. **9.** Нет.

10. В любом случае — векторы, коллинеарные $\mathbf{e}_2$, при $a+b\neq 0$ еще и коллинеарные $(a+b,-1)$.

11. $x^*=-\dfrac{1}{2}x,\ y^*=-\dfrac{1}{2}y$.

12. Осевая симметрия относительно $y=-x\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$.

§ 3

1. 1/3.

3. Векторы, коллинеарные вектору: а) $\mathbf{a}(3,2)$; б) $\mathbf{b}(-2,3)$. Соответствующие растяжения: а) $2\sqrt{26}$; б) $\sqrt{26}$.

6. а) Ось одной симметрии перпендикулярна $\mathbf{a}$, ось другой получена из нее параллельным переносом на $(1/2)\mathbf{a}$.

б) Оси обеих симметрий проходят через O, ось второй получена поворотом оси первой на угол $\varphi/2$.

7. gf, где f: $\{x^*=x,\ y^*=\lambda y-a\}$, g: $\{x^*=x,\ y^*=y+a\}$; f — сжатие к прямой $y=-a/(1-\lambda)$.

Глава V

§ 1

1. а) $\begin{Vmatrix}1&3\\7&9\end{Vmatrix}$; б) 9; в) 48, не считая ее самой.

2. а) Нет; б) да; в) да; г) нет; **3.** $2B$.

4. $D=(3-2\lambda)A-(1+\lambda)B+\overline{\lambda C}$, λ произвольно. **5.** а) Нет; б) нет.

6. Нет, $\mathbf{a}=2\mathbf{b}-\mathbf{c}$.

§ 2

2. а) Да; б) нет. **4.** а) Нет. б) да.

5. а) Матрице $(-E)$ отвечает центральная симметрия, а I — поворот на $\pi/2$;

б) $\left\|\begin{matrix} a & b \\ -(a^2+1)/b & -a \end{matrix}\right\|$, где a и $b \neq 0$ произвольны.

7. $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix}\right\|$.

8.

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

§ 3

1. а) $\operatorname{Rg} A = 2$, базисная подматрица, например, $\left\|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{matrix}\right\|$;

б) $\|7\ 8\ 9\| = 2\|4\ 5\ 6\| - \|1\ 2\ 3\|$; $\left\|\begin{matrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{matrix}\right\| = 2\left\|\begin{matrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{matrix}\right\| - \left\|\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}\right\|$;

г) 9 — все квадратные подматрицы второго порядка.

2. а) Ранг не больше двух; б) Ранг не больше $n/2$.

3. а) $\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$; б) $\left\|\begin{matrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{matrix}\right\| = -3\left\|\begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{matrix}\right\| + 4\left\|\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{matrix}\right\|$.

§ 4

1. $\alpha^n \det A$. **4.** 46.

7. б) $b = \det A$, $k = \sum\limits_{ij} (-1)^{i+j} d_{ij}$, где d_{ij} — дополнительный минор элемента a_{ij} матрицы A.

8. $(3^n+1)/2$. **10.** 10.

§ 5

2. $\dfrac{1}{ad-bc}\left\|\begin{matrix} d & -b \\ -c & a \end{matrix}\right\|$.

§ 6

3. $\left\|\begin{matrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\|$. **4.** $\left\|\begin{matrix} -B \\ \hline E_{n-r} \end{matrix}\right\|$. **5.** а) Не существует; б) A^T.

6. $\left\|\begin{matrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right\| + c\left\|\begin{matrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{matrix}\right\|$.

Глава VI

§ 1

1. $A = \sum\limits_{i,j} a_{ij} E_{ij}$.

2. $n(n+1)/2$. За базис можно принять матрицы E_{ij} $(i \geqslant j)$ стандартного базиса пространства квадратных матриц порядка n.

3. $\left\|\begin{matrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$;

$p(t) = p(a) + p'(a)(t-a) + \frac{1}{2}p''(a)(t-a)^2 + \frac{1}{6}p'''(a)(t-a)^3$ (штрих обозначает дифференцирование по t).

4. f_1 раскладывается по e_1; f_2 раскладывается по e_1, e_2; f_3 раскладывается по e_1, e_2, e_3; ...; f_{n-1} раскладывается по e_1, ..., e_{n-1}.

5. Ориентированы одинаково.

§ 2

1. Например, a_1, a_2. **2.** $\begin{cases} \xi^1 - 2\xi^2 + \xi^3 = 0, \\ 2\xi^1 - 3\xi^2 + \xi^4 = 0. \end{cases}$

3. Например, линейная оболочка векторов e_3 и e_4.

4. а) a_1, a_2, b_1; б) $a_1 - a_2$.

5. а) Да; б) да; в) нет.

§ 3

1. а) $\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{matrix}\right\|$; б) $\left\|\begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix}\right\|$;

в) $\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$, $\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}\right\|$.

2. Инъективно при $\operatorname{Rg} C = 2$. Сюръективным быть не может.

3. а) Нет; б) да. **7.** а) Нет; б) да.

§ 4

5. $\left\|\begin{array}{c|c} A_1 & O \\ \hline O & O \end{array}\right\|$, где A_1 — квадратная подматрица порядка r и ранга r.

7. Для $\lambda_1 = 7$ базис в собственном подпространстве — векторы с координатами $\|1\ \ -2\ \ 0\|^T$ и $\|0\ \ 3\ \ 1\|^T$. Для $\lambda = -7$ собственный вектор с координатами $\|\,2\ \ 1\ \ -3\,\|^T$.

8. Для $\lambda_1 = 1$ собственное подпространство — множество симметричных матриц. Для $\lambda_2 = -1$ собственное подпространство — множество кососимметричных матриц.

11. $S = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A' = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$

§ 5

1. а) Нет; б) да, если $\mathrm{f}(x) = 0$ для всех x.

2. $\|\beta q - \alpha q\|$, где $q = S_{\pm}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

3. а) $\varphi_i = 0$, $i \leqslant k$; $\varphi_i = (i-1)...(i-k)a^{i-k-1}$, $i > k$ $(i = 1, ..., n)$;
б) $\varphi'_i = 0$, $i \neq k+1$; $\varphi'_{k+1} = k!$.

§ 6

1. а) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

2. $\begin{Vmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$. **3.** $\begin{Vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{Vmatrix}$.

4. а) $(\xi'^1)^2 + (\xi'^2)^2 - (\xi'^3)^2$; $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

б) $(\xi'^1)^2 + (\xi'^2)^2 - (\xi'^3)^2$; $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{Vmatrix} \sqrt{2} & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

5. $s = n - \operatorname{Rg} \mathrm{b}$. Последние s строк и последние s столбцов нулевые.

6. Пусть D — матрица, составленная из матриц всех форм, написанных одна под другой. Необходимо и достаточно $\operatorname{Rg} D \leqslant k$.

7. а) r; б) 0.

9. k не является ни положительно, ни отрицательно определенной.

10. Миноры четного порядка > 0, а нечетного порядка < 0.

11. Нет.

§ 7

1. а) 3; б) 6; в) 14.

2. а) $A' = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}, \quad S = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$;

б) $A' = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad S = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{Vmatrix}.$

Глава VII

§ 1

1. а) $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{Vmatrix}$; б) $\begin{Vmatrix} 2 & -2 & 8/3 \\ -2 & 8/3 & -4 \\ 8/3 & -4 & 32/5 \end{Vmatrix}$; в) $\arccos\sqrt{\frac{5}{7}}$.

2. $\frac{1}{2}\|-1\ 1\ 1\ -1\|^T$, $\frac{1}{2}\|1\ -1\ 1\ -1\|^T$, $\frac{1}{2}\|1\ 1\ -1\ -1\|^T$.

3. а) $\|0\ 1\ 1\ 1\|^T$, $\|1\ 1\ 1\ 0\|^T$; б) $\|1\ -1\ 0\ 1\|^T$. **4.** $1/\sqrt{n}$.

5. а) $Q = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}, \ R = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{Vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

б) $Q = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{Vmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{Vmatrix}, \quad R = \begin{Vmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{Vmatrix}.$

6. $4\sqrt{2}$.

§ 2

1. $\begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Собственные подпространства A: $\|1\ -1\|^T$, $\|2\ -3\|^T$. Собственные подпространства A^*: $\|4\ -1\|^T$, $\|1\ 0\|^T$.

3. Или тождественное преобразование, или отражение в подпространстве $\mathscr{E}'$: если $x = x' + x''$, $x' \in \mathscr{E}'$, $x'' \in \mathscr{E}'^{\perp}$, то $A(x) = x' - x''$. Если $\mathscr{E}' = \{o\}$, то $A = -E$.

4. а) $2^n n!$; б) бесконечно много; в) да, в случае б).

5. $S = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{Vmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}, \ A' = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}.$

6. Поворот на $5\pi/4$ в плоскости векторов a_1, a_2 и поворот на $\pi/4$ в плоскости векторов b_1, b_2. (Углы отсчитываются от a_1 к a_2 и от b_1 к b_2.) Координатные столбцы a_1, a_2, b_1, b_2 соответственно

$$\frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{Vmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{Vmatrix}.$$

7. а) $\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

б) $Q = \dfrac{1}{3} \begin{Vmatrix} \sqrt{8} & 1 \\ -1 & \sqrt{8} \end{Vmatrix}, \ S = \dfrac{1}{3} \begin{Vmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5 \end{Vmatrix}.$

8. $A = \begin{Vmatrix} \sqrt{2/3} & -\sqrt{1/3} \\ \sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} \\ -\sqrt{2/3} & \sqrt{1/3} \end{Vmatrix}.$

§ 3

1. $(9-15t^2)/8$. **2.** $\mathrm{b}^*(x,y)=\mathrm{b}(y,x)$. **3.** $\begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

5. $S=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{Vmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{Vmatrix}$, $4(\eta^1)^2+4(\eta^2)^2+(\eta^3)^2$.

6. Да; **7.** а) $(\xi^1)^2-(\xi^2)^2$ и $2\xi^1\xi^2$; б) $(\xi^1)^2$ и $(\xi^1)^2-(\xi^2)^2$.

8. $S=\dfrac{1}{\sqrt{26}}\begin{Vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 21 \end{Vmatrix}$; $\mathrm{k}(x)=26(\eta^2)^2$, $\mathrm{h}(x)=(\eta^1)^2+(\eta^2)^2$.

9. Без ограничения на размерность условие только достаточно. Пример: $(\xi^1)^2$ и $(\xi^3)^2$.

§ 4

1. а) $|a|=2$, $|b|=3$, $\cos(\widehat{a,b})=(3+i)/6$, $\cos(\widehat{b,a})=(3-i)/6$;

б) Векторы a и $b'(-2-3i/2, 3/2-i)$ ортогональны, $b'=b-\alpha a$, $\alpha = (3-i)/4$.

4. $A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$, $S=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$; A и самосопряженное, и унитарное.

5. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\|\, i\ 1\,\|^T$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\|\, -i\ 1\,\|^T$.

Глава VIII

§ 1

1. $$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + t_1 \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + t_2 \begin{Vmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

а) Пустое множество или плоскость; б) $\dim P \geqslant k_1+k_2-n$.

§ 2

1. $$-\frac{(\eta^1)^2}{5}+(\eta^2)^2-(\eta^3)^2=1,\quad \left\{\begin{aligned} \xi^1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\eta^1-\frac{1}{\sqrt{5}}\,\eta^2+\frac{1}{\sqrt{20}}\,\eta^3+2, \\ \xi^2 &= \frac{1}{2}\,\eta^1+\sqrt{\frac{3}{5}}\,\eta^2-\sqrt{\frac{3}{20}}\,\eta^3-2\sqrt{3}, \\ \xi^3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\,\eta^2+\frac{2}{\sqrt{5}}\,\eta^3+3. \end{aligned}\right.$$

2. Гиперболический параболоид. **3.** $-1/2<a<0$.

Глава IX

§ 1

2. а) 64; б) 64.

3. $\varepsilon'_{i_1,\dots,i_n}=(-1)^{N(i_1,\dots,i_n)}\det S$, если $i_1,\dots,i_n$ различны, и 0 в противном случае.

4. Линейное преобразование $A(x)=\mathrm{f}(x)a$ имеет матрицу $\alpha\varphi$.

5. Четыре тензора типа $(1,1)$ и два инварианта.

§ 2

1. $B=\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}$, $C=\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}$, $D=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

2. B — матрица преобразования, сопряженного преобразованию с матрицей C^T. Их детерминанты и следы должны быть одинаковы. Остальные детерминанты равны, так как $\det\Gamma=1$.

3. $2a^m_{(is)}$.

§ 3

1. $(e_1,e_2,e_3)\begin{Vmatrix} 0 & \alpha^3 & -\alpha^2 \\ -\alpha^3 & 0 & \alpha^1 \\ \alpha^2 & -\alpha^1 & 0 \end{Vmatrix}$.