Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра "Прикладная математика"

РЯДЫ: ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

Методическое пособие
для студентов специальности 010500 "Прикладная математика"

Нижний Новгород 2007

Составитель: А.В.Чернов

УДК 517.5.52

Ряды: задачи и решения. Методическое пособие для студентов специальности "Прикладная математика" по курсу "Математический анализ". /НГТУ; Составитель: А.В.Чернов. Н.Новгород, 2007. 87 с.

Приведены основные сведения из теории рядов, разобраны примеры на вычисление суммы числовых и функциональных рядов, исследование числовых рядов на сходимость с рекомендациями по использованию тех или иных признаков сходимости в различных ситуациях, отыскание области сходимости функциональных рядов, разложение функций в степенные ря... приближенным вычислениям и... В данном пособии рассматри... воду комплексных числовых... м. [4]. Библиография 5 наи...

Науч...

Реда...

...етная.
Печа... Заказ 318.

Нижег... . Алексеева.
Типограф... ул. Минина, 24.

...ударственный
...ситет, 2007

СОДЕРЖАНИЕ

ЧАСТЬ 1. Числовые ряды.

§1. Понятие числового ряда, сходимости и суммы ряда.

Пусть $\{a_n\}$ – вещественная числовая последовательность. Тогда выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

называется *(вещественным) числовым рядом* и обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

При этом члены последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называются *членами ряда*, выражение a_n – *общим членом* ряда, n – его *номером*, а формула, позволяющая по каждому номеру n вычислить соответствующий член ряда a_n, – *формулой общего члена* ряда. Всякая конечная сумма вида

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется *частичной суммой* ряда. Если существует конечный предел последовательности частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то говорят, что ряд сходится, при этом число S называют *суммой ряда* и пишут:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

В противном случае говорят, что ряд расходится[1].

Таким образом, для сходящегося ряда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0,$$

откуда получаем следующее утверждение.

Необходимое условие сходимости ряда. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

[1]В этом случае понятие суммы ряда не определяется. Любопытно, что Леонард Эйлер вводил понятие суммы ряда иначе, а именно, таким образом, что в случае сходящегося ряда оно совпадало фактически с современным понятием, но имело смысл также и для расходящихся рядов. См. *Харди Г. Расходящиеся ряды. - М.: ИЛ, 1951.*

Примечание. Как показывает следующий пример, указанное условие не является достаточным условием сходимости ряда.

Пример 1. Рассмотрим ряд (он называется *гармоническим*)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \qquad (\Gamma)$$

В данном случае $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, тем не менее, что ряд расходится. Предположим, от противного, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Но тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, а стало быть, $\lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$. Однако это невозможно. Действительно,

$$S_{2n} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} >$$

$$> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Непосредственно из критерия Коши сходимости числовой последовательности $\{S_n\}$ получаем критерий Коши сходимости числового ряда.

Теорема 1. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$: $\forall n \geq n_0$, $\forall p \in \mathbf{N}$ имеем: $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

Записывая отрицание критерия Коши, получаем следующую теорему.

Теорема 2. Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0$: $\forall\ n_0 \in \mathbf{N}\ \exists n \geq n_0$, $p \in \mathbf{N}$, при которых $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \geq \varepsilon_0$.

Примечание. В частности, для примера 1: $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $n = n_0$, $p = 2n$.

Пример 2. Покажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

расходится. Заметим, что (2-й замечательный предел)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0.$$

Таким образом, необходимое условие сходимости ряда не выполнено, откуда сразу делаем вывод, что ряд расходится.

Пример 3. Покажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$$

расходится. Заметим, что (1-й замечательный предел)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

а следовательно (при $x = \dfrac{1}{n} \to 0$),

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = 1 \neq 0.$$

Таким образом, необходимое условие сходимости ряда не выполнено, откуда сразу делаем вывод, что ряд расходится.

Пример 4. Рассмотрим ряд (сумма геометрической прогрессии со знаменателем q)

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Возможны следующие два принципиально различных случая.

1. $|q| \geq 1$. Тогда заведомо $a_n = q^n \not\to 0$, откуда сразу делаем вывод о расходимости ряда.

2. $|q| < 1$. По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии имеем:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Поскольку в этом случае $q^n \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q},$$

откуда делаем вывод, что ряд сходится, и его сумма

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

(сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

Из фильма "Как царь Петр арапа женил":

"Летел гусь, и еще полгуся, и четверть гуся, и осьмушка гуся, и т.д. Сколько всего летело гусей?"

Всего:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Примечание. Зная, что рассмотренный в примере 4 ряд сходится, можно было сосчитать его сумму следующим образом:

$$S = 1 + q + q^2 + \ldots = 1 + q(1 + q + q^2 + \ldots) = 1 + qS \Rightarrow (1-q)S = 1.$$

Для обоснования этой цепочки равенств необходимо воспользоваться некоторыми из следующих далее свойств (какими именно?).

Свойства сходящихся рядов

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\forall q \in \mathbf{R}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q a_n$ тоже сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} q a_n = q \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

то есть константу можно выносить за знак ряда.

2. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ тоже сходится, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

то есть возможно почленное сложение сходящихся рядов.

3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbf{N}$ сходится ряд $\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n$, то есть отбрасывание любого конечного числа первых членов ряда не влияет на его сходимость.

Пример 5. Апория Зенона[2]: "Быстроногий Ахиллес никогда не догонит медлительную черепаху, так как пока он пробегает половину расстояния, отделяющего его от черепахи, она все же успевает пройти еще некоторое расстояние, и так до бесконечности".

[2]Зенон Элейский (около 450 г. до н.э.), ученик Парменида, философа-консерватора, который учил, что разум постигает только абсолютное бытие, и что всякое изменение является кажущимся. Апория (греч. απορια – трудность, безвыходное положение), или антиномия, – это ситуация, когда в теории доказаны два взаимно исключающих друг друга суждения, причем каждое из них выведено убедительными с точки зрения данной теории средствами. До Зенона считали, что сумму бесконечно многих величин всегда можно сделать сколь угодно большой, даже если каждая величина крайне мала. Критика Зенона была направлена против таких представлений. См. *Д.Я.Стройк. Краткий очерк истории математики. М.: Наука, 1990. - 254 с.*

Покажем, тем не менее, что Ахиллес все-таки догонит черепаху. Предположим для простоты, что отношение скорости Ч. к скорости А. постоянно и равно $p \in (0,1)$. Пусть в начальный момент времени половина расстояния, отделяющего А. от Ч., равна $r_1 = r$. За то время, пока А. пробегает его, Ч. сдвигается на расстояние pr_1, и таким образом, А. остается преодолеть уже расстояние, равное $r + pr$. Половина его равна $r_2 = \frac{r_1}{2}(1+p)$. Продолжая это рассуждение по индукции, получаем, что всего А. нужно пробежать расстояние, равное

$$S = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n + \ldots,$$

где $r_{n+1} = \frac{r_n}{2}(1+p)$, $r_1 = r$, откуда

$$r_n = rq^n, \quad q = \frac{1+p}{2} \in (0,1),$$

и таким образом,

$$S = r(1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots) = \frac{r}{1-q} = \frac{2r}{1-p}$$

– конечная величина. Если же Ч. не движется, то есть $p = 0$, то $q = \frac{1}{2}$, и $S = 2r$ – начальное расстояние.

Примечание. На самом деле с философской точки зрения здесь не все так просто, поскольку возникают глубокие философские вопросы нетождественности актуальной и преодоленной бесконечности, природы времени (дискретно оно или непрерывно?) и т.д.

§2. Задачи на вычисление суммы ряда.

Задача 1. Найти формулу общего члена ряда, установить, что ряд сходится, и найти его сумму.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \ldots$$

Решение. Отметим, что не существует какого-то универсального алгоритма отыскания формулы общего члена ряда по конечному числу его первых членов. Как правило, требуется подметить некоторую закономерность. В данном случае естественно предположить, что общий член ряда имеет вид:

$$a_n = \frac{1}{P(n)},$$

где $P(n)$ – некоторый многочлен по степеням n. Поскольку мы располагаем лишь тремя членами ряда, то мы можем найти $P(n)$, только если он содержит три слагаемых. Естественно высказать гипотезу, что степень многочлена

$\deg P(n) = 2$, то есть $P(n) = An^2 + Bn + C$. Подставляя вместо $n = 1, 2, 3$, получаем систему:

$$\begin{cases} A + B + C = P(1) = 3, \\ 4A + 2B + C = P(2) = 8, \\ 9A + 3B + C = P(3) = 15. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $A = 1$, $B = 2$, $C = 0$. Таким образом, имеем ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}, \quad a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

В таком случае частичная сумма ряда

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \to \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

Стало быть, ряд сходится, и его сумма

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n} = \frac{3}{4}.$$

Примечание. Использованный при решении задачи метод[3] можно легко распространить на ряды более общего вида. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть число $b \in \mathbf{R}$ таково, что $-b \notin \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+b)(n+b+k)} = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m+b}.$$

Доказательство. Разложим общий член ряда на простейшие дроби:

$$a_n = \frac{1}{(n+b)(n+b+k)} = \frac{A}{n+b} + \frac{B}{n+b+k}. \qquad (\star)$$

Приводя простейшие дроби к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{A}{n+b} + \frac{B}{n+b+k} = \frac{(A+B)n + (b+k)A + bB}{(n+b)(n+b+k)}.$$

[3] Его называют методом вариант. В задаче 1 варианты имеют вид $x_n = \frac{1}{n}$.

Приравнивая в ($\star$) коэффициенты при одинаковых степенях n в числителе дробей слева и справа, имеем:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ (b+k)A + bB = 1, \end{cases}$$

откуда находим: $A = -B = \dfrac{1}{k}$, и таким образом,

$$a_n = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n+b} - \frac{1}{n+b+k}\right).$$

Соответственно, частичная сумма ряда имеет вид

$$S_n = \frac{1}{k}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m+b} - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m+b+k}\right) = \frac{1}{k}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m+b} - \sum_{m=k+1}^{k+n}\frac{1}{m+b}\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m+b} + \sum_{m=k+1}^{n}\frac{1}{m+b} - \sum_{m=k+1}^{n}\frac{1}{m+b} - \sum_{m=n+1}^{n+k}\frac{1}{m+b}\right) =$$

$$= \frac{1}{k}\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m+b} - \sum_{m=n+1}^{n+k}\frac{1}{m+b}\right) = \frac{1}{k}\left(\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m+b} - R_n\right),$$

где при всех достаточно больших n:

$$0 \le R_n = \frac{1}{n+1+b} + \ldots + \frac{1}{n+k+b} \le \frac{k}{n+1+b} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема доказана.

Задача 2. Доказать, что ряд сходится, и найти его сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{16n^2+24n-27}.$$

Решение. Раскладывая знаменатель на множители, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{16n^2+24n-27} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{(4n-3)(4n+9)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(n-\frac{3}{4})(n+\frac{9}{4})} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+b)(n+b+k)}, \quad b = -\frac{3}{4}, \quad k = 3.$$

Пользуясь теоремой 3, заключаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{16n^2+24n-27} = \frac{2}{3}\sum_{m=1}^{3}\frac{1}{m-\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}\left(4+\frac{4}{5}+\frac{4}{9}\right) = \frac{8}{3}\cdot\frac{59}{45} = \frac{472}{135}.$$

Теорема 4. Пусть $b \in \mathbf{R}$ таково, что $-b \notin \mathbf{N}$; $k, m \in \mathbf{N}$, $k \ne m$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Pn+Q}{(n+b)(n+b+k)(n+b+m)} = \frac{A}{k}\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{s+b} + \frac{B}{m}\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{s+b},$$

где

$$A = \frac{Q-P(b+k)}{m-k}, \quad B = \frac{Q-P(b+m)}{k-m}.$$

Доказательство. Рассмотрим общий член ряда

$$a_n = \frac{Pn+Q}{(n+b)(n+b+k)(n+b+m)} = \frac{1}{r}\cdot\frac{Pr+(Q-Pb)}{(r+k)(r+m)}, \quad r = n+b.$$

Разложим второй множитель на простейшие дроби:

$$\frac{Pr+(Q-Pb)}{(r+k)(r+m)} = \frac{A}{r+k} + \frac{B}{r+m} =$$

$$= \frac{A(r+m)+B(r+k)}{(r+k)(r+m)} = \frac{(A+B)r+(Am+Bk)}{(r+k)(r+m)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях r, получаем систему для отыскания неизвестных коэффициентов A и B:

$$\begin{cases} mA + kB = Q - Pb, \\ A + B = P. \end{cases}$$

Решая ее, находим указанные в формулировке выражения. Таким образом,

$$a_n = \frac{A}{(n+b)(n+b+k)} + \frac{B}{(n+b)(n+b+m)}.$$

Далее остается воспользоваться теоремой 3 и свойствами 1 и 2 сходящихся рядов. Теорема доказана.

Задача 3. Доказать, что ряд сходится и найти его сумму:

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{3-2n}{n(n-1)(n-3)}.$$

Решение. Полагая $n-3=s$, получаем:

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{3-2n}{n(n-1)(n-3)}=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{3-2s-6}{(s+3)(s+2)s},$$

а поскольку индекс суммирования можно обозначать любой буквой, то

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{3-2n}{n(n-1)(n-3)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n(n+2)(n+3)}.$$

Пользуясь теоремой 4 при $b=0$, $k=2$, $m=3$, $P=2$, $Q=3$, и соответственно, $A=-1$, $B=3$, заключаем, что ряд сходится, и его сумма равна:

$$-\left(\frac{-1}{2}\sum_{n=1}^{2}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=-\frac{13}{12}.$$

Примечание. Теорема 4 следует, таким образом, из теоремы 3. Аналогично можно обобщить теорему 3 на произвольное число множителей подобного вида в знаменателе. Следует отметить, что метод вариант применим не только для рациональных выражений, поскольку вариантами могут быть и любые другие функции от n.

Задача 4. Доказать, что ряд сходится и найти его сумму:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Решение. Рассмотрим общий член ряда:

$$a_n=\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\ln\frac{n^2-1}{n^2}=\ln(n-1)+\ln(n+1)-2\ln n.$$

Таким образом,

$$S_n=\sum_{p=2}^{n}\ln(p-1)+\sum_{p=2}^{n}\ln(p+1)-2\sum_{p=2}^{n}\ln p,$$

или, переобозначая индексы суммирования,

$$S_n=\sum_{m=1}^{n-1}\ln m+\sum_{m=3}^{n+1}\ln m-2\sum_{m=2}^{n}\ln m,$$

и сокращая суммы с индексами суммирования от $m=3$ до $m=n-1$, получаем:

$$S_n=\ln 2+\ln n+\ln(n+1)-2\ln 2-2\ln n=-\ln 2+\ln\frac{n(n+1)}{n^2},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[-\ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=-\ln 2.$$

Примечание. Помимо метода вариант, существуют и другие методы вычисления суммы ряда.

Задача 5. Доказать, что ряд сходится и найти его сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty}nq^n,\qquad |q|<1.$$

Решение. Итак, общий член ряда $a_n=nq^n$. Выразим a_{n+1} через a_n и просуммируем:

$$a_{n+1}=(n+1)q^{n+1}=qnq^n+q^{n+1}=qa_n+q^{n+1}\quad\Bigg|\ \sum_{n=1}^{m}$$

Тогда получим уравнение относительно частичной суммы S_m:

$$a_2+\ldots+a_{m+1}=S_m+a_{m+1}-a_1=qS_m+q^2(1+q+\ldots+q^{m-1}).$$

Используя формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии, находим:

$$S_n=\frac{1}{1-q}\left[a_1-a_{n+1}+q^2\frac{1-q^n}{1-q}\right].$$

Учитывая, что $a_{n+1}\to 0$, $q^n\to 0$ при $n\to\infty$, в пределе имеем сумму ряда

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1-q}\left[q+\frac{q^2}{1-q}\right]=\frac{q}{(1-q)^2}.$$

Примечания.

1. Используя полученный результат и действуя аналогично, можно последовательно найти суммы рядов вида $S^{(k)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^kq^n$ для $k=2,3,\ldots$ Например,

$$a_{n+1}^{(2)}=(n+1)^2q^{n+1}=qa_n^{(2)}+2qa_n^{(1)}+qa_n^{(0)},$$

откуда

$$S_n^{(2)}=\frac{1}{1-q}\left[a_1-a_{n+1}+2qS_n^{(1)}+qS_n^{(0)}\right]\qquad\text{и т.д.}$$

Позже будет показано, как вычислять суммы рядов указанного вида с помощью теории степенных рядов (вычисление проще, обоснование сложнее).

2. Некоторую любопытную модификацию примененного выше метода можно использовать для вычисления при $k \in \mathrm{N}$ сумм вида $1^k+2^k+\ldots+n^k$. Проиллюстрируем ее на следующем примере. Пусть $a_n = n$, $\overline{a}_n = n^2$. Рассмотрим

$$\overline{a}_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = \overline{a}_n + 2a_n + 1 \quad \Bigg| \quad \sum_{n=1}^{m}$$

Суммируя, получаем:

$$\overline{S}_m + \overline{a}_{m+1} - \overline{a}_1 = \overline{S}_m + 2S_m + m.$$

Здесь сумма квадратов $\overline{S}_m$ сокращается, но зато мы получаем выражение для суммы n первых членов арифметической прогрессии[4]

$$1+2+\ldots+n = S_n = \frac{1}{2}\left[(n+1)^2 - 1 - n\right] = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Аналогично, рассматривая сумму кубов, можно получить выражение для суммы квадратов и т.д. Получим общую рекуррентную формулу. Обозначим

$$a_n^{(k)} = n^k, \quad S_n^{(k)} = 1^k + 2^k + \ldots + n^k, \quad n, k \in \mathrm{N}.$$

Пользуясь формулой бинома Ньютона, получаем:

$$a_{m+1}^{(k)} = (m+1)^k = m^k + \sum_{p=1}^{k-1} C_k^p m^p + 1 = a_m^{(k)} + \sum_{p=1}^{k-1} C_k^p a_m^{(p)} + 1,$$

откуда, суммируя по m, имеем:

$$S_n^{(k)} + a_{n+1}^{(k)} - a_1^{(k)} = S_n^{(k)} + \sum_{p=1}^{k-2} C_k^p S_n^{(p)} + kS_n^{(k-1)} + n,$$

$$S_n^{(k-1)} = \frac{1}{k}\left[(n+1)^k - (n+1) - \sum_{p=1}^{k-2} C_k^p S_n^{(p)}\right],$$

или

$$S_n^{(k)} = \frac{1}{k+1}\left[(n+1)\left\{(n+1)^k - 1\right\} - \sum_{p=1}^{k-1} C_{k+1}^p S_n^{(p)}\right].$$

Например, при $k = 2$:

$$S^{(2)} = \frac{1}{3}\left[(n+1)(n^2+2n) - C_3^1 S_n^{(1)}\right] = \frac{1}{3}\left[(n+1)(n^2+2n) - \frac{3n(n+1)}{2}\right],$$

и таким образом,

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

[4] Обычно эту и подобные ей формулы доказывают методом мат. индукции. Но он, хотя и позволяет доказать формулу, не дает возможности понять, как к ней можно было прийти.

Используя эту формулу, при $k = 3$ получаем:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{и т.д.}$$

Рассмотренный метод в литературе по теории чисел называется методом приведения[5].

Задача 6. Установить, что ряд сходится, и найти его сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Решение. Пусть $t \in [0;1]$. Используя формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $(-t)$, можем записать:

$$r_n(t) = \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - \frac{1-(-t)^n}{1+t} = \frac{(-t)^n}{1+t}.$$

Интегрируя на отрезке $t \in [0;1]$ очевидное тождество

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k + r_n(t),$$

получаем:

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2 = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k dt + \int_0^1 r_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + \int_0^1 r_n(t)dt,$$

откуда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 - \int_0^1 r_n(t)dt, \qquad (\star\star)$$

где

$$\left|\int_0^1 r_n(t)dt\right| \le \int_0^1 |r_n(t)|dt = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \le \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Т.о., переходя в $(\star\star)$ к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln 2$, то есть ряд сходится и его сумма равна $\ln 2$.

[5] О более современных (и более изощренных) методах см., напр., *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. - М.: Мир, 1998. - 703 с.*

Примечание. На самом деле точно вычислить сумму ряда удается лишь в исключительных случаях. Однако на практике этого и не требуется. Как правило, требуется лишь убедиться, что ряд сходится и вычислить его сумму приближенно, с заданной степенью точности (либо хотя бы оценить ее сверху или снизу). Далее рассматриваются методы решения этих двух проблем.

§3. Исследование на сходимость рядов с неотрицательными членами.

В этом параграфе будем рассматривать ряды вида[6]

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \qquad a_n \geq 0 \ \ \forall n \in \mathbf{N}. \tag{A_+^0}$$

Частичная сумма такого ряда $S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$, и таким образом, последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ является неубывающей. Как известно, такая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху.

Теорема 5 (Критерий сходимости ряда (A_+^0)). Ряд (A_+^0) сходится $\Leftrightarrow$ последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ ограничена сверху.

Пусть $\{n_k\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел (то есть $n_1 < n_2 < \ldots$), и соответственно, $\{a_{n_k}\}$ – подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$. Тогда ряд вида

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$$

называется вложенным в ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Непосредственно из теоремы 5 получаем следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть ряд (A_+^0) сходится. Тогда всякий вложенный в него ряд сходится.

Теорема 7 (Первый признак сравнения). Пусть

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

(или хотя бы начиная с некоторого номера). Тогда:

1) из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

2) из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

[6] Особо следует подчеркнуть, что формулируемые в этом параграфе утверждения справедливы лишь для рядов с неотрицательными членами!

Утверждение 1) следует из теоремы 5; утверждение 2) является его следствием (доказывается от противного).

Примечание. Расходимость ряда с неотрицательными членами означает фактически, что его сумма равна $+\infty$. Поэтому интуитивный смысл этих утверждений очень прост:
1) если уж сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ конечна, то и меньшая сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ тем более конечна;
2) если уж сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, то и большая сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ тем более бесконечна.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и функция $f(x)$, определенная при $x \geq 1$, связаны так, что

$$f(n) = a_n \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Тогда функция $f(x)$ называется *производящей функцией* этого ряда.

Пример 6. Функция $f(x) = 1/x$ является производящей функцией гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Теорема 8 (Интегральный признак Коши). Пусть производящая функция $f(x)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является непрерывной, неотрицательной и невозрастающей при $x \geq 1$. Тогда данный ряд сходится $\Leftrightarrow$ сходится несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Примечание. Напомним, что сходимость этого интеграла означает существование конечного предела

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)dx.$$

Если положить $b_n = \int\limits_{n-1}^{n} f(x)dx$, то сходимость интеграла фактически означает сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$. Тогда доказательство теоремы 8 следует из очевидных неравенств

$$a_n = \int_{n-1}^{n} f(n)dx \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq \int_{n-1}^{n} f(n-1)dx = a_{n-1}$$

и теоремы 7.

Пример 7. Рассмотрим так называемый обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha \neq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}. \qquad (\Gamma_\alpha)$$

Возможны следующие два принципиально различных случая.

1. $\alpha < 1$. Тогда

$$n^{\alpha} \leq n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^{\alpha}} = b_n \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Поскольку гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то согласно первому признаку сравнения исследуемый ряд расходится.

2. $\alpha > 1$. Непрерывной производящей функцией данного ряда является

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}.$$

Очевидно, что она неотрицательна и не возрастает при $x \geq 1$. Поэтому можем воспользоваться интегральным признаком Коши. Рассмотрим

$$\lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{\alpha-1} < \infty,$$

следовательно, ряд сходится.

Таким образом, обобщенный гармонический ряд с показателем $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad - \quad \begin{cases} \text{сходится при } \alpha > 1, \\ \text{расходится при } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Примечание. Использование первого признака сравнения сопряжено с одной проблемой, для решения которой не существует какого-то универсального средства. А именно, требуется фактически заранее угадать, сходится ряд или расходится, и в первом случае оценивать общий член ряда сверху (неравенство $\leq$) общим членом сходящегося ряда, а во втором – снизу (неравенство $\geq$) общим членом расходящегося ряда. Зачастую бывает удобнее воспользоваться следующим признаком сравнения в предельной форме.

Теорема 9 (второй признак сравнения). Пусть $a_n, b_n > 0 \; \forall n \in \mathbf{N}$ и существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K.$$

Тогда: а) если $K > 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$; б) если $K = 0$, то имеют место утверждения 1) и 2) теоремы 7.

Примечание. Если $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные положительные производящие функции рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, причем $f(x)$ и $g(x)$ являются эквивалентными бесконечно малыми $f(x) \sim g(x)$ при $x \to +\infty$, то последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ согласно определению предела функции на языке последовательностей тоже являются эквивалентными, то есть $a_n \sim b_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Таким образом, в этом случае, согласно предельному признаку сравнения, либо оба этих ряда сходятся, либо оба они расходятся (то есть ряды в смысле сходимости ведут себя одинаково).

Пример 8. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Как известно (первый замечательный предел),

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ то есть } \sin x \sim x \text{ при } x \to 0.$$

Заметим, что $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда заключаем, что

$$a_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}} = b_n,$$

а поскольку ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится как обобщенный гармонический ряд (Γ_α) с показателем $\alpha = 1/2$, то согласно предельному признаку сравнения исследуемый ряд тоже расходится.

Примечание. Аналогичным образом можно использовать и другие замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{2(1-\cos x)}{x^2} = 1.$$

В частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +0$, то следующие ряды в смысле сходимости ведут себя одинаково:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} a_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\exp a_n - 1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos\sqrt{a_n}).$$

Далее нам понадобится следующее понятие.

Определение. Число M (конечное, либо равное $+\infty$ или $-\infty$) называется *верхним пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$ (обозначение: $M = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$), если выполняются два условия:

1) $\exists$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = M$;

2) для любой сходящейся подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ имеем: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \le M$.

Примечание. Заметим, что верхний предел существует для любой последовательности.

Непосредственно из определения получаем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = M < +\infty$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}$ такой, что $\forall n \ge n_0$ имеем: $x_n < M + \varepsilon$.

Лемма 2. Если $x_n \ge 0\ \forall n \in \mathbf{N}$ (или хотя бы начиная с некоторого номера) и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \sigma \in [0, 1)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \Big(x_n\Big)^n = 0$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\sigma + \varepsilon = q < 1$. По лемме 1, $\exists\ n_0 \in \mathbf{N}$: $0 \le x_n < q$, а следовательно, $0 \le \Big(x_n\Big)^n < q^n\ \forall n \ge n_0$. Остается учесть, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, и перейти к пределу в этом неравенстве. Лемма доказана.

Теорема 10 (радикальный признак Коши). Пусть $a_n \ge 0\ \forall n \in \mathbf{N}$ (или хотя бы начиная с некоторого номера) и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тогда: 1) если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; 2) если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, и более того, $a_n \not\to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. 1) Пусть $0 \le q < 1$. Тогда

$$\sigma = \frac{1+q}{2} < 1,$$

причем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sigma} = \frac{q}{\sigma} = \frac{2q}{q+1} < 1.$$

Отсюда, пользуясь леммой 2, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sigma^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a_n}}{\sigma}\right)^n = 0.$$

Учитывая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma^n$ сходится, и пользуясь предельным признаком сравнения, получаем, что исследуемый ряд сходится.

2) Пусть $q > 1$ и верхний предел реализуется на подпоследовательности $n = n_k$. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что $\forall k > k_0$ имеем:

$$q - \varepsilon < (a_{n_k})^{\frac{1}{n_k}} < q + \varepsilon.$$

Выбирая $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $\sigma = q - \varepsilon > 1$, получаем:

$$a_{n_k} > \sigma^{n_k} \quad \forall k > k_0,$$

и устремляя в этом неравенстве $k \to \infty$, находим: $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$, а стало быть, $a_n \not\to 0$ при $n \to \infty$, то есть необходимое условие сходимости ряда не выполнено. Теорема доказана.

Лемма 3. Пусть $a_n > 0\ \forall n \in \mathbf{N}$ (или хотя бы начиная с некоторого номера), и существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in [0, +\infty].$$

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

Доказательство. 1) Пусть $0 < q \le 1$. По определению предела последовательности, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что $\forall n > n_0$ имеем:

$$\sigma_1 = q - \varepsilon < \frac{a_n}{a_{n-1}} < q + \varepsilon = \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 a_{n-1} < a_n < \sigma_2 a_{n-1},$$

и по индукции,

$$\sigma_1^{n-n_0} a_{n_0} < a_n < \sigma_2^{n-n_0} a_{n_0}.$$

Будем считать, что $\varepsilon \in (0, q/2)$. Обозначим

$$b_1 = b_1(\varepsilon) = \frac{a_{n_0}}{\sigma_1^{n_0}}, \quad b_2 = b_2(\varepsilon) = \frac{a_{n_0}}{\sigma_2^{n_0}}.$$

Тогда $\sigma_1, \sigma_2, b_1, b_2 > 0$. С учетом этого, $\forall n > n_0$ имеем:

$$\sqrt[n]{b_1}\sigma_1 < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{b_2}\sigma_2.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_j} = 1$ для $j = 1, 2$, то $\exists n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, $n_1 > n_0$, такое, что $\sqrt[n]{b_1} > 1 - \varepsilon$, $\sqrt[n]{b_2} < 1 + \varepsilon\ \forall n > n_1$. Таким образом, $\forall n > n_1$ имеем:

$$(1-\varepsilon)(q-\varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (1+\varepsilon)(q+\varepsilon),$$

и учитывая, что $0 < \varepsilon < q/2$, приходим к неравенствам

$$q - \varepsilon(1+q) < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon\left(1 + \frac{3q}{2}\right),$$

откуда нетрудно получить, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$.

2) При $q = 0$ рассуждая аналогично, но выписывая лишь правые части неравенств, при $\varepsilon \in (0,1)$ получаем:

$$0 \le \sqrt[n]{a_n} < (1+\varepsilon)\varepsilon < 2\varepsilon \quad \forall n > n_1(\varepsilon),$$

откуда сразу следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 = q$.

3) При $q > 1$ можно воспользоваться п.1), если вместо a_n рассмотреть $c_n = 1/a_n$. Лемма доказана.

Непосредственно из теоремы 10 и леммы 3 получаем следующее утверждение.

Теорема 11 (признак Даламбера). Пусть $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ (или хотя бы начиная с некоторого номера), и существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in [0, +\infty].$$

Тогда: 1) если $q < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; 2) если $q > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, и более того, $a_n \not\to 0$ при $n \to \infty$.

Рекомендации по применению признаков сходимости

1. **Применение 2-го признака сравнения** как правило предпочтительнее, нежели первого. Действительно, здесь не нужно ломать голову над тем, следует ли оценивать общий член ряда сверху (общим членом сходящегося ряда) или снизу (общим членом расходящегося). Тем не менее здесь нужно уметь подбирать ряд сравнения. Как правило, ряд сравнения подбирается следующим образом. Предположим, например, что общий член ряда представляет собой дробь вида

$$a_n = \frac{\alpha_n + \beta_n}{\gamma_n + \delta_n}$$

(возможно, под знаком корня или какой-либо иной функции; либо произведение таких выражений и т.п.), причем все последовательности стремятся к бесконечности, но α_n – быстрее, чем β_n, γ_n – быстрее, чем δ_n. Тогда, если в числителе мы вынесем за скобку α_n, то в скобках останется $1+(\beta_n/\alpha_n)$, причем $(\beta_n/\alpha_n) \to 0$. Аналогичным образом в знаменателе, вынося за скобку γ_n, в скобках получаем $1 + (\delta_n/\gamma_n)$, причем $(\delta_n/\gamma_n) \to 0$. Отсюда понятно, что если мы возьмем $b_n = \alpha_n/\gamma_n$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

и таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ можно выбрать в качестве ряда сравнения. В этом смысле иногда говорят, что слагаемые β_n и δ_n в числителе и знаменателе являются несущественными, и при исследовании на сходимость их можно отбросить. Аналогичным образом можно поступать и в случае, когда последовательности β_n и (или) δ_n ограничены.

Примечание. При этом следует помнить некоторые факты из теории пределов, в частности, например, следующий.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0 \quad \forall p \ge 1.$$

Чтобы заметить это, достаточно воспользоваться правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

2. Если же

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\gamma_n},$$

где $0 < M_1 \le \alpha_n \le M_2\ \forall n \in \mathbb{N}$, а $\gamma_n \to +\infty$, то при $b_n = \dfrac{1}{\gamma_n}$ ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ в смысле сходимости ведут себя одинаково. Это следует из неравенства

$$M_1 b_n \le a_n \le M_2 b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

и из первого признака сравнения. Если же $M_1 = 0$, то это, вообще говоря, не так, но во всяком случае и здесь из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ будет следовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Примечание. При использовании первого признака сравнения следует помнить, что

$$\cos x \in [-1, 1], \quad \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arccos x \in [0, \pi],$$

$$\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \operatorname{arcctg} x \in (0, \pi), \quad \exp(-|x|) = e^{-|x|} \in (0, 1].$$

3. Радикальный признак Коши удобно использовать в случае, когда общий член ряда a_n содержит степени, с показателями, зависящими от n. При этом часто приходится использовать следующий факт:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_1 n^{\beta_1} + \ldots + q_k n^{\beta_k}} = 1 \quad \text{при} \quad q_i, \quad \beta_i > 0, \quad i = \overline{1,k},$$

в частности,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n+1} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+\sqrt{n}+1} = 1,$$

и т.п. Докажем, например, второе из этих равенств. По правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left((x^2+x+1)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+x+1)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln(x^2+x+1)\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x+1)'}{(x^2+x+1)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{2x+1} = 0,$$

и стало быть,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \exp\ln\left((x^2+x+1)^{\frac{1}{x}}\right) = e^0 = 1.$$

Общее соотношение доказывается аналогично. Нетрудно убедиться также и в том, что для любой ограниченной положительной функции $f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{f(x)} = 1.$$

Отметим, кроме того, что в некоторых случаях при использовании радикального признака Коши помогает знание второго замечательного предела

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

4. Признак Даламбера удобно использовать в случае, когда общий член ряда содержит факториалы. Напомним, что $n!$ (n-факториал) – это произведение всех натуральных чисел от 1 до n, то есть

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\,.$$

Кроме этого, используются обозначения:

$$(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)$$

– произведение всех нечетных натуральных чисел от 1 до $(2n-1)$;

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)$$

– произведение всех четных натуральных чисел от 2 до $2n$;

$$(An+B)!! = (A+B)(2A+B)(3A+B)\ldots(An+B)$$

– произведение всех натуральных чисел, представимых в виде $(Ak+B)$ для $k=\overline{1,n}$.

5. Интегральный признак Коши используют в случае, когда не удается использовать другие признаки сходимости. При этом, однако, прежде чем использовать сам интегральный признак Коши, следует все же использовать признаки сравнения, чтобы по возможности максимально упростить формулу общего члена ряда, отбросив все несущественные слагаемые.

Рассмотрим примеры.

Пример 9. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n \sin(n^3+\sqrt{n})}{3n\sqrt{n}+2n+5\ln(n+1)}.$$

Как известно, $|\sin x| \le 1$, и таким образом, в числителе стоит ограниченное выражение:

$$0 < 1 \le 2+(-1)^n \sin(n^3+\sqrt{n}) \le 2+1 = 3.$$

В знаменателе имеется степень n с показателем $3/2$, большим 1. Все остальные слагаемые в знаменателе неотрицательны. Если мы их отбрасываем, он уменьшается, а вся дробь увеличивается. Поэтому

$$0 \le a_n \le \frac{3}{3n^{3/2}} = \frac{1}{n^{3/2}} = b_n.$$

Ряд с общим членом b_n сходится как обобщенный гармонический ряд (Γ_α) с показателем $\alpha = 3/2 > 1$, следовательно, по первому признаку сравнения исходный ряд также сходится.

Пример 10. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln n^3+n}}{\sqrt[3]{n^7+\ln n}}.$$

I способ. Используем второй признак сравнения. Заметим, что

$$a_n = \frac{\sqrt{3\ln n+n}}{\sqrt[3]{n^7+\ln n}} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{3(\ln n/n)+1}}{n^{7/3}\sqrt[3]{1+(\ln n/n^7)}}.$$

Поскольку
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^7}=0,$$
то выбирая
$$b_n=\frac{\sqrt{n}}{n^{7/3}}=\frac{1}{n^{7/3-1/2}}=\frac{1}{n^{11/6}},$$
получаем, что
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1>0,$$
и таким образом, согласно 2-му признаку сравнения, в смысле сходимости исходный ряд ведет себя так же, как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, а он сходится как обобщенный гармонический ряд (Γ_α) с показателем $\alpha=11/6>1$. Поэтому исходный ряд тоже сходится.

II способ. Используем первый признак сравнения. Поскольку $\ln x<x$ $\forall x>0$, то мы можем оценить:
$$a_n=\frac{\sqrt{3\ln n+n}}{\sqrt[3]{n^7+\ln n}}\le 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^7+\ln n}}.$$
Кроме того, если мы отбросим в знаменателе неотрицательное слагаемое $\ln n$, дробь от этого может лишь увеличиться. Поэтому
$$a_n\le 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^7}}=2\frac{1}{n^{7/3-1/2}}=2\frac{1}{n^{11/6}}=2b_n.$$
Поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится как обобщенный гармонический ряд (Γ_α) с показателем $\alpha=11/6>1$, то по свойствам сходящихся рядов сходится также и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2b_n$, а в таком случае согласно первому признаку сравнения исходный ряд тоже сходится.

Примечание. Неумелая попытка воспользоваться в приведенном примере первым признаком сравнения приводит к следующей тупиковой ситуации. Пытаясь доказать сходимость ряда и пользуясь тем, что $\ln x<x$ $\forall x>0$, получают, что
$$0<a_n<\frac{\sqrt{n^3+n}}{\sqrt[3]{n^7}}<\frac{\sqrt{2n^3}}{n^{7/3}}<2\frac{1}{n^{7/3-3/2}}=2\frac{1}{n^{5/6}}=b_n.$$
Однако на этот раз ряд с общим членом b_n расходится как обобщенный гармонический ряд (Γ_α) с показателем $\alpha=5/6<1$. *Но делать отсюда вывод, что исходный ряд расходится, нельзя!* Это всего лишь означает, что полученная оценка груба и не дает никакой информации о сходимости или расходимости исходного ряда. Для того, чтобы доказать расходимость ряда, требуется оценка снизу общим членом расходящегося ряда. Пытаются

получить ее, например, следующим образом (отбрасывая все лишнее, нам желательно в числителе оставлять большее слагаемое, а в знаменателе – хотелось бы оставить меньшее, но тогда неравенство может оказаться неверным, поэтому приходится брать большее слагаемое с постоянным множителем 2, не играющим, впрочем никакой существенной роли в смысле исследования сходимости, но необходимым, дабы не нарушить неравенство):
$$a_n=\frac{\sqrt{3\ln n+n}}{\sqrt[3]{n^7+\ln n}}>\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{2n^7}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{n^{7/3-1/2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{n^{11/2}}=b_n.$$
Здесь уже b_n – общий член сходящегося ряда, и полученная оценка снова ничего не дает.

Пример 11. Исследуем на сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\operatorname{arctg}(n^2+1)}{2^n+n^2+1}.$$
С оценкой числителя все очевидно:
$$n^3\operatorname{arctg}(n^2+1)\le\frac{\pi}{2}n^3<2n^3.$$
В знаменателе при оценке сверху всегда следует оставлять наибольшее слагаемое (точнее, то слагаемое, которое быстрее растет при $n\to\infty$). В данном случае это 2^n. Имеем:
$$0<a_n<\frac{2n^3}{2^n}=b_n.$$
Ряд $\sum b_n$ удобно исследовать на сходимость с помощью радикального признака Коши:
$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2n^3}}{2}=\frac{1}{2}<1,$$
и согласно признаку Коши ряд $\sum b_n$ сходится. А поскольку $0\le a_n\le b_n$, то ряд $\sum a_n$ сходится по первому признаку сравнения. Отметим, что если бы мы вместо 2^n оставили в знаменателе n^2, мы получили бы грубую оценку: $a_n<2n$.

Пример 12. Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2\ln n}{\sqrt{n^5-n^3}}.$$
Заметим, во-первых, что $n^5-n^3=n^5(1-\frac{1}{n^2})$, где $\frac{1}{n^2}\to 0$. Поэтому выбирая
$$b_n=\frac{n^2\ln n}{\sqrt{n^5}},$$

получаем, что $a_n = \dfrac{n^2 \ln n}{\sqrt{n^5 - n^3}} \sim b_n$. Тогда согласно второму признаку сравнения ряды $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ в смысле сходимости ведут себя одинаково. Поскольку логарифм строго монотонная функция, то относительно последнего ряда нетрудно заметить, что

$$b_n \geq \ln 2 \frac{n^2}{n^{5/2}} = \ln 2 \cdot \frac{1}{n^{5/2-2}} = \ln 2 \cdot \frac{1}{n^{1/2}} = c_n.$$

Ряд $\sum c_n$ расходится как обобщенный гармонический ряд (Γ_α) с показателем $\alpha = 1/2 < 1$, и поскольку $b_n \geq c_n > 0$, ряд $\sum b_n$ тем более расходится по первому признаку сравнения. Таким образом, исходный ряд тоже расходится.

Пример 13. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n \cos(n^2 + n)}{\sqrt{n^2 - \sqrt{n} - \ln n}}.$$

В числителе стоит последовательность, ограниченная как сверху, так и снизу положительными числами (4 и 2). Поэтому согласно первому признаку сравнения данный ряд в смысле сходимости ведет себя так же, как ряд с общим членом

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sqrt{n} - \ln n}}.$$

С другой стороны, слагаемые $\sqrt{n}$ и $\ln n$ в знаменателе являются несущественными, так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0,$$

то есть

$$b_n \sim c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}.$$

Поэтому согласно второму признаку сравнения ряды $\sum b_n$ и $\sum c_n$ в смысле сходимости ведут себя одинаково. Но ряд $\sum c_n$ расходится как гармонический ряд, следовательно ряд $\sum b_n$, а таким образом, и исходный ряд тоже расходятся.

Пример 14. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = \frac{(2 + \cos n)(n^2 + \sqrt{n} - 3)}{n^3 - \ln n + n}.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^3} = 0,$$

то соответствующие слагаемые следует считать несущественными. Отбрасывая их, получаем общий член ряда сравнения (точнее, кандидата на его роль) в виде

$$b_n = \frac{(2 + \cos n)n^2}{n^3} = \frac{2 + \cos n}{n}.$$

Убедимся в том, что это действительно то, что нам нужно:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (\sqrt{n}/n^2) - (3/n^2)}{1 - (\ln n/n^3) + (n/n^3)} = 1 > 0.$$

Таким образом, согласно второму признаку сравнения, либо оба ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся, либо оба расходятся. Здесь предел числителя у b_n не существует. Поэтому путем применения второго признака сравнения мы не можем сравнить его с $c_n = 1/n$ (а это общий член расходящегося ряда!). Но заподозрив, что ряд $\sum b_n$ расходится, мы можем для доказательства его расходимости воспользоваться первым признаком сравнения:

$$b_n \geq \frac{2 - |\cos n|}{n} \geq \frac{1}{n} = c_n,$$

откуда сразу делаем вывод, что ряд $\sum b_n$, а следовательно, и ряд $\sum a_n$, расходится.

Пример 15. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{5^n} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2+n}.$$

Воспользуемся радикальным признаком Коши. Вычислим предел

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\cos^2 n}{5^n}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+\frac{1}{n}}.$$

Так как числовая последовательность $\cos^2 n$ ограничена и положительна, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos^2 n} = 1$. Таким образом, пользуясь вторым замечательным пределом, получаем:

$$K = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{n}} = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{e}{5} < 1.$$

Стало быть, согласно радикальному признаку Коши данный ряд сходится.

Пример 16. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(3n)!} \operatorname{arctg} \frac{n^5}{5^n}.$$

Заметим, что согласно правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{5^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4}{5^x \ln 5} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{5!}{5^x \ln^5 5} = 0.$$

А поскольку $\operatorname{arctg} x \sim x$ при $x \to 0$ (следствие первого замечательного предела), то

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(3n)!} \operatorname{arctg} \frac{n^5}{5^n} \sim \frac{(2n)!!}{(3n)!} \frac{n^5}{5^n} = b_n,$$

и согласно второму признаку сравнения ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ в смысле сходимости ведут себя одинаково. Поскольку b_n содержит факториалы, то для исследования на сходимость последнего ряда удобно использовать признак Даламбера. Рассмотрим

$$b_{n+1} = \frac{(2(n+1))!!}{(3(n+1))!} \frac{(n+1)^5}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{(2n+2)!!}{(3n+3)!} \frac{(n+1)^5}{5^n}.$$

Заметим, что

$$(2n+2)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)(2n+2) = (2n)!!(2n+2),$$

$$(3n+3)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (3n)(3n+1)(3n+2)(3n+3) = (3n)!(3n+1)(3n+2)(n+1)3.$$

Отсюда

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{15} \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(n+1)^5}{(3n+1)(3n+2)(n+1)} \cdot \frac{1}{n^5} =$$

$$= \frac{2}{15} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = 0 < 1.$$

Таким образом, согласно признаку Даламбера ряд $\sum b_n$ сходится, следовательно, сходится и исходный ряд.

Пример 17. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(9n^2 + 7\sqrt{n}) \ln(5n^2 - 2n + 3)}.$$

Заметим, что

$$3n - 2 = 3n\left(1 - \frac{2}{3n}\right), \quad \frac{2}{3n} \to 0,$$

$$9n^2 + 7\sqrt{n} = 9n^2\left(1 + \frac{7\sqrt{n}}{9n^2}\right), \quad \frac{7\sqrt{n}}{9n^2} \to 0,$$

$$\ln(5n^2-2n+3) = \ln\left[5n^2\left(1 - \frac{2}{5n} + \frac{3}{5n^2}\right)\right] = 2\ln n + \ln 5 + \ln\left[1 - \frac{2}{5n} + \frac{3}{5n^2}\right],$$

$$\ln\left(1 - \frac{2}{5n} + \frac{3}{5n^2}\right) \to \ln 1 = 0.$$

Поэтому

$$a_n \sim \frac{3n}{9n^2 2\ln n} = \frac{1}{6} b_n, \quad b_n = \frac{1}{n \ln n},$$

и согласно второму признаку сравнения ряды $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ в смысле сходимости ведут себя одинаково. Суммирование берем от $n = 2$, поскольку b_1 не имеет смысла, а для исходного ряда отбрасывание первого члена ряда (как и вообще любого конечного числа первых членов ряда) не влияет на его сходимость. Для исследования на сходимость ряда $\sum b_n$ удобно использовать интегральный признак Коши. Производящая функция для него имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

и является при $x \geq 2$ непрерывной, положительной и убывающей. Рассмотрим интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{+\infty} \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln \ln x \Big|_2^{+\infty} = \lim_{b\to+\infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = +\infty.$$

Стало быть, данный несобственный интеграл расходится. Тогда согласно интегральному признаку Коши расходится и числовой ряд $\sum b_n$, следовательно, расходится и исходный ряд.

§4. Знакочередующиеся числовые ряды.

Числовой ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется *знакочередующимся*, если $a_n a_{n+1} < 0 \ \forall n \in \mathbf{N}$. С точностью до умножения ряда на (-1) можем считать, что знакочередующийся ряд – это ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\overline{a}_n, \quad \overline{a}_n > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}. \qquad (A_{\pm})$$

Теорема 12 (признак Лейбница). Пусть 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{a}_n = 0$; 2) последовательность $\{\overline{a}_n\}$ является строго убывающей, то есть $\overline{a}_{n+1} < \overline{a}_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Тогда ряд $(A_{\pm})$ сходится.

Доказательство. Пусть

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n = \overline{a}_1 - \overline{a}_2 + \ldots + (-1)^{n-1}\overline{a}_n$$

– частичная сумма ряда $(A_{\pm})$. Рассмотрим подпоследовательность $\{S_{2n}\}$. Заметим, что

$$S_{2(n+1)} = S_{2n+2} = S_{2n} + (\overline{a}_{2n+1} - \overline{a}_{2n+2}) > S_{2n},$$

так как по условию 2) $\overline{a}_{2n+1} > \overline{a}_{2n+2}$. Стало быть, последовательность $\{S_{2n}\}$ является строго возрастающей. С другой стороны, в силу того же условия,

$$S_{2n} = \overline{a}_1 - (\overline{a}_2 - \overline{a}_3) - \ldots - (\overline{a}_{2n-1} - \overline{a}_{2n}) < \overline{a}_1,$$

и таким образом, последовательность $\{S_{2n}\}$ ограничена сверху. А как известно, возрастающая ограниченная сверху последовательность сходится, следовательно, существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

Тогда согласно условию 1),

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} - \overline{a}_{2n}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty}\overline{a}_{2n} = S - 0 = S.$$

В таком случае, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. А это означает, что ряд $(A_{\pm})$ сходится и его сумма равна S. Теорема доказана.

Условия 1) и 2) будем называть условиями Лейбница, а знакочередующийся ряд $(A_{\pm})$, удовлетворяющий этим условиям, – *лейбницевским*.

Примечание. Как видно из доказательства теоремы 12, сумма S лейбницевского ряда обладает следующими свойствами:

1) $S \geq 0$ (действительно, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n}$, $S_{2n} = (\overline{a}_1 - \overline{a}_2) + \ldots + (\overline{a}_{2n+1} - \overline{a}_{2n+2}) > 0$);

2) $S \leq \overline{a}_1$.

Иными словами, S имеет знак первого члена ряда и по модулю не превосходит модуля первого члена ряда. Аналогичным образом, всякий остаток лейбницевского ряда

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}\overline{a}_k$$

имеет знак своего первого члена и не превосходит его по модулю, то есть

$$r_n a_{n+1} \geq 0, \quad |r_n| \leq |a_{n+1}|.$$

Это обстоятельство позволяет вычислять сумму лейбницевского ряда с любой наперед заданной степенью точности и широко используется в приближенных вычислениях. Предположим, например, что нам требуется вычислить сумму лейбницевского ряда $(A_{\pm})$ с заданной погрешностью Δ. Подберем номер n так, чтобы выполнялось неравенство

$$|a_{n+1}| < \Delta.$$

Тогда с заданной погрешностью будет справедливо приближенное равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Пример 18. Исследуем на сходимость знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

(это так называемый ряд Лейбница). В данном случае

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \overline{a}_n = |a_n| = \frac{1}{n}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty}\overline{a}_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0, \quad \overline{a}_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = \overline{a}_n.$$

Таким образом, оба условия Лейбница выполняются, и согласно признаку Лейбница данный ряд сходится.

Примечание. Поскольку отбрасывание конечного числа первых членов ряда не влияет на его сходимость, то для сходимости знакочередующегося ряда $(A_{\pm})$, удовлетворяющего первому условию Лейбница (собственно говоря, это необходимое условие сходимости ряда), достаточно, чтобы второе условие Лейбница выполнялось не для всех натуральных n, а хотя бы начиная с некоторого номера.

Пример 19. Исследуем на сходимость знакочередующийся ряд
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 \ln n}{n^3+n-1}.$$
Здесь
$$a_n = \frac{(-1)^n n^2 \ln n}{n^3+n-1}, \quad \overline{a}_n = |a_n| = \frac{n^2 \ln n}{n^3+n-1}.$$
Заметим, что
$$\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)/n}{1+(1/n^2)-(1/n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$
так как согласно правилу Лопиталя
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1/x)}{1} = 0.$$
Таким образом, первое условие Лейбница выполнено. Проверим второе условие. Для этого рассмотрим функцию
$$f(x) = \frac{x^2 \ln x}{x^3+x-1}.$$
Если мы докажем, что при некотором $x_0 > 1$ производная $f'(x) < 0 \; \forall x > x_0$, то это будет означать, что функция $f(x)$ строго убывает при $x > x_0$, а в таком случае и последовательность $\overline{a}_n = f(n)$ тоже окажется строго убывающей, начиная с некоторого номера, и тем самым второе условие Лейбница будет выполнено (начиная с некоторого номера). Итак, вычислим производную.
$$f'(x) = \frac{(2x\ln x + x)(x^3+x-1) - x^2 \ln x(3x^2+1)}{(x^3+x-1)^2} =$$
$$= \frac{(-x^4+x^2-2x)\ln x + x^4 + x^2 - x}{(x^3+x-1)^2} =$$
$$= \frac{(1-\ln x)x^4 + (1+\ln x)x^2 - (2\ln x + 1)x}{(x^3+x-1)^2} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$
Заметим, что $\psi(x) > 0$ и на знак производной влияния не оказывает. Для того, чтобы оценить $\varphi(x)$, заметим, что $\ln x < x \; \forall x > 0$ и $\ln x > 2 \; \forall x > e^2$, в частности, $\forall x \geq 9$. Таким образом, $\forall x \geq 9$ можем оценить
$$\varphi(x) < -x^4 + (1+x)x^2 - 5x = -x^4 + x^3 + x^2 - 5x = -x^4\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right),$$

откуда видно, что $\varphi(x) < 0$ для всех $x \geq 9$, поскольку
$$1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{81} > 0.$$
Стало быть, оба условия Лейбница выполняются (начиная с некоторого номера), и по признаку Лейбница данный ряд сходится.

Пример 20. Исследуем на сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{3^n}.$$
Здесь
$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n!}{3^n}, \quad \overline{a}_n = |a_n| = \frac{n!}{3^n}.$$
Для того, чтобы проверить первое условие Лейбница, удобно воспользоваться теоремой 11 (признак Даламбера) следующим образом. Вычислим предел
$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\overline{a}_{n+1}}{\overline{a}_n}.$$
Если окажется, что $q < 1$, то согласно признаку Даламбера ряд $\sum \overline{a}_n$ сходится, и согласно необходимому условию сходимости ряда $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n = 0$. На самом деле сходимость последнего ряда означает, что исходный ряд тоже сходится, и притом абсолютно (см. следующий параграф). Поэтому на этом исследование сходимости исходного ряда заканчивается. Если же окажется, что $q > 1$, то согласно теореме 11 получим, что $\overline{a}_n \not\to 0$ при $n \to \infty$, но в таком случае и $a_n \not\to 0$ при $n \to \infty$, а это уже означает, что нарушено необходимое условие сходимости исходного ряда, а следовательно, он расходится. Итак, вычислим
$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)}{3^n 3} \cdot \frac{3^n}{n!} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty > 1.$$
Таким образом, исходный ряд расходится.

Пример 21. Исследуем на сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+3}} \sin \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}.$$
Это знакочередующийся ряд, так как $\sin x > 0$ при $x \in (0, \pi)$, и в частности, $\sin \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}} > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Воспользуемся признаком Лейбница. Поскольку $\sin x$ – ограниченная функция, то $\overline{a}_n = |a_n| \to 0$ при $n \to \infty$, и таким образом,

первое условие Лейбница выполняется. Проверим второе условие Лейбница. Заметим, что числовая последовательность $\dfrac{1}{\sqrt{n+3}}$ строго убывает (до нуля). Последовательность $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$ – тоже. Поскольку произведение двух строго убывающих последовательностей также является строго убывающей, то нам достаточно показать, что функция $f(x) = \sin x$ возрастает при $x \in (0, x_0)$ (при некотором $x_0 \in (0,1)$). Рассмотрим производную

$$f'(x) = \cos x > 0 \quad \text{при } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{и в частности, при } x \in (0,1),$$

то есть функция действительно возрастает на указанном интервале. Соответственно,

$$\overline{a}_n = \frac{1}{\sqrt{n+3}} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}\right)$$

строго убывает при $n \geq 1$, и второе условие Лейбница выполняется. Поэтому согласно признаку Лейбница исходный ряд сходится.

Примечание. При использовании признака Лейбница для исследования на сходимость знакочередующегося ряда вида $(A_\pm)$ студенты довольно часто проводят следующее рассуждение: "Заметим, что $\overline{a}_n \to 0$, $\overline{a}_n \sim \overline{b}_n$, $\overline{b}_n$ строго убывает, поэтому $\overline{a}_n$ тоже строго убывает, и таким образом, оба условия Лейбница выполняются". Однако подобное рассуждение нуждается в обосновании. На практике часто бывает так, что помимо сформулированных здесь условий, последовательности $\overline{a}_n$ и $\overline{b}_n$ обладают дифференцируемыми производящими функциями $f(x)$, $g(x)$: $\overline{a}_n = f(n)$, $\overline{b}_n = g(n)$, причем $f(x) \sim g(x)$, $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, $g'(x) < 0\ \forall x > x_0$ (то есть $g(x)$ строго убывает при $x > x_0$). Тогда обоснование может быть следующим. Согласно правилу Лопиталя имеем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

в силу эквивалентности бесконечно малых $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to +\infty$. Тогда по определению предела функции получаем, что найдется точка $x_1 > x_0$ такая, что

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - 1\right| < \frac{1}{2} \quad \forall x > x_1,$$

откуда, в частности,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > \frac{1}{2} > 0 \quad \forall x > x_1,$$

а поскольку $g'(x) < 0$ при $x > x_1 > x_0$, то стало быть, $f'(x) < 0$ при $x > x_1$, следовательно, $f(x)$ строго убывает при $x > x_1$. Но тогда и последовательность $\overline{a}_n$ тоже строго убывает, начиная с некоторого номера.

Однако при решении контрольных заданий рекомендуется все-таки непосредственно вычислить производную функции $f(x)$ и убедиться, что она отрицательна, либо представить ее как произведение строго убывающих функций и т.п. (см. примеры, рассмотренные выше).

Рассмотрим пример на приближенное вычисление суммы ряда с заданной степенью точности.

Пример 22. Вычислим сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(2n)!!}$$

с точностью $\Delta = 0.1$. Имеем знакочередующийся ряд, причем

$$a_n = \frac{(-1)^n 3^n}{(2n)!!}, \quad \overline{a}_n = |a_n| = \frac{3^n}{(2n)!!}.$$

Проверим, что это ряд лейбницевского типа, то есть ряд, удовлетворящий первому и второму условию Лейбница. Рассмотрим отношение

$$\frac{\overline{a}_{n+1}}{\overline{a}_n} = \frac{3^{n+1}}{(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{3^n} = \frac{3}{(2n)!!(2n+2)} \cdot \frac{(2n)!!}{1} = \frac{3}{2n+2}.$$

Отсюда, во-первых, видно, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{a}_{n+1}}{\overline{a}_n} = 0,$$

и согласно признаку Даламбера ряд $\sum \overline{a}_n$ сходится (значит, исходный ряд сходится абсолютно), и по необходимому условию сходимости ряда общий член его $\overline{a}_n \to 0$ при $n \to \infty$. Иными словами, первое условие Лейбница выполняется. Во-вторых, из того же соотношения видно, что

$$\frac{\overline{a}_{n+1}}{\overline{a}_n} \leq \frac{3}{4} < 1,$$

и стало быть, $\overline{a}_{n+1} < \overline{a}_n$, то есть второе условие Лейбница тоже выполнено. Тогда по свойствам лейбницевского ряда модуль остатка ряда оценивается модулем своего первого члена, то есть

$$|r_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| \leq |a_{n+1}| = \overline{a}_{n+1},$$

и нам достаточно ограничиться вычислением суммы первых n членов ряда при условии, что $\overline{a}_{n+1} < \Delta$. Итак, подберем номер n так, чтобы это условие выполнялось. Заметим, что

$$\overline{a}_1 = \frac{3}{2} > \Delta, \quad \overline{a}_2 = \frac{9}{2\cdot 4} = \frac{9}{8} > \Delta, \quad \overline{a}_3 = \frac{27}{8\cdot 6} = \frac{27}{48} > \Delta,$$

$$\overline{a}_4 = \frac{81}{48 \cdot 8} = \frac{81}{384} > \Delta, \quad \overline{a}_5 = \frac{243}{384 \cdot 10} = \frac{243}{3840} < \Delta.$$

Таким образом, с заданной степенью точности

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \approx -\overline{a}_1 + \overline{a}_2 - \overline{a}_3 + \overline{a}_4 =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{9}{8} - \frac{27}{48} + \frac{81}{384} = \frac{-576 + 432 - 216 + 81}{384} = -\frac{279}{384} \approx -0.7266.$$

§5. Знакопеременные числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость.

Числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{A}$$

называется *знакопеременным*, если он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов. Частным случаем знакопеременного ряда является любой знакочередующийся ряд. Другой пример – это ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2},$$

который является знакопеременным, однако не является знакочередующимся.

При исследовании на сходимость целесообразно бывает рассматривать ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (А), то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_n. \tag{A$_+$}$$

Теорема 13. Если сходится ряд (A_+), то ряд (А) тоже сходится.

Доказательство. Заметим, что частичная сумма ряда (А) представляется в виде

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n = S_n^{(+)} - S_n^{(-)},$$

где $S_n^{(+)}$ – сумма неотрицательных слагаемых в S_n, $S_n^{(-)}$ – сумма абсолютных величин отрицательных слагаемых в S_n. С другой стороны,

$$0 \le S_n^{(+)} + S_n^{(-)} = |a_1| + \ldots + |a_n| = \overline{S}_n,$$

где $\overline{S}_n$ – частичная сумма ряда (A_+), а он сходится, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}_n = \overline{S} < +\infty$. Поскольку $\overline{S}_n$ не убывает, то $\overline{S}_n \le \overline{S}$, а следовательно,

$$0 \le S_n^{(+)} \le \overline{S}, \quad 0 \le S_n^{(-)} \le \overline{S},$$

но обе эти последовательности являются неубывающими. А как известно, неубывающая ограниченная последовательность сходится. Таким образом,

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n^{(+)} = S^{(+)}, \quad \lim_{n\to\infty} S_n^{(-)} = S^{(-)} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S^{(+)} - S^{(-)}.$$

Теорема доказана.

Примечание. Таким образом, для того, чтобы установить сходимость знакопеременного ряда (А), достаточно установить сходимость ряда (A_+). Для этого, в свою очередь, можно использовать признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Определение. Если ряд (A_+) сходится, то говорят, что ряд (А) сходится абсолютно. Если же ряд (А) сходится, а ряд (A_+) расходится, то говорят, что ряд (А) сходится условно.

Теорема Римана. Если ряд (А) сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из него конечной или бесконечной перестановкой членов, тоже сходится абсолютно, и его сумма равна сумме исходного ряда. Если же ряд (А) сходится условно, то можно так переставить его члены, что полученный ряд будет расходиться или сходиться к любому наперед заданному числу.

Пример 23. Исследуем ряд на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}.$$

Имеем знакопеременный ряд, причем общий член ряда

$$a_n = \frac{\sin n}{n^2}, \quad \overline{a}_n = |a_n| = \frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2} = b_n.$$

Ряд $\sum b_n$ сходится как обобщенный гармонический ряд (Γ_α) с показателем $\alpha = 2 > 1$. Тогда согласно первому признаку сравнения ряд $\sum \overline{a}_n$, то есть ряд, составленный из модулей членов исходного ряда, тоже сходится. А это означает, что исходный ряд сходится, и притом абсолютно.

Пример 24. Исследуем ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(n + \sin n)}.$$

Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n + \sin n)}.$$

Обозначим

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(n + \sin n)}, \quad \overline{a}_n = \frac{1}{\sqrt{n}(n + \sin n)} = \frac{1}{n\sqrt{n}(1 + \frac{\sin n}{n})}.$$

Для исследования на сходимость ряда $\sum \overline{a}_n$ воспользуемся вторым признаком сравнения. Поскольку $\frac{\sin n}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, то полагая

$$\overline{b}_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}},$$

получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{a}_n}{\overline{b}_n} = 1 > 0,$$

и таким образом, согласно второму признаку сравнения ряды $\sum \overline{a}_n$ и $\sum \overline{b}_n$ в смысле сходимости ведут себя одинаково. Но ряд $\sum \overline{b}_n$ сходится как обобщенный гармонический ряд (Γ_α) с показателем $\alpha = 3/2 > 1$. Таким образом, сходится и ряд $\sum \overline{a}_n$. Соответственно, исходный ряд тоже сходится, и притом абсолютно.

Пример 25. Исследуем ряд на абсолютную и условную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(\sqrt{n}+1)}{n+2}.$$

Имеем знакочередующийся ряд, причем

$$a_n = \frac{(-1)^n \ln(\sqrt{n}+1)}{n+2}, \quad \overline{a}_n = |a_n| = \frac{\ln(\sqrt{n}+1)}{n+2}.$$

С целью исследования на абсолютную сходимость рассмотрим ряд, составленный из модулей членов исходного ряда, то есть $\sum \overline{a}_n$. Заметим, что

$$\overline{a}_n = |a_n| = \frac{\ln(\sqrt{n}+1)}{n+2} \geq \frac{\ln 2}{n+2} = b_n,$$

причем для $c_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{c_n} = \ln 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = \ln 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} = \ln 2 > 0,$$

и по второму признаку сравнения ряд $\sum b_n$ расходится, так как расходится ряд $\sum c_n$. Но тогда согласно первому признаку сравнения ряд $\sum \overline{a}_n$ тем более расходится, то есть исходный ряд не обладает абсолютной сходимостью. Исследуем его на условную сходимость. Воспользуемся признаком Лейбница. Рассмотрим функцию

$$g(x) = \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{x+2}.$$

Согласно правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(\sqrt{x}+1))'}{(x+2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = 0,$$

следовательно, $\overline{a}_n = g(n) \to 0$ при $n \to \infty$, то есть первое условие Лейбница выполняется. С другой стороны, функцию $g(x)$ мы можем представить в виде произведения

$$g(x) = \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{x+2} = \varphi(x) \cdot \psi(x),$$

где обе функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ строго убывают при $x \geq 4$. Действительно, если обозначить $\sqrt{x} = t$, то

$$\varphi = \frac{\ln(t+1)}{t+1}, \quad \left(\frac{\ln(t+1)}{t+1}\right)' = \frac{1-\ln(t+1)}{(t+1)^2} < 0 \quad \text{при } t > e - 1 \approx 1.7,$$

$$\psi = \frac{t+1}{t^2+2}, \quad \left(\frac{t+1}{t^2+2}\right)' = \frac{t^2+2-2t^2-2t}{(t^2+2)^2} = \frac{2-2t-t^2}{(t^2+2)^2} = \frac{3-(t+1)^2}{(t^2+2)^2} < 0$$

при $t > \sqrt{3} - 1$ и по крайней мере при $t \geq 1$. Таким образом, функция $g(x)$ убывает при $x \geq 4$, а значит, последовательность $\{\overline{a}_n\} = \{g(n)\}$ тоже убывает при $n \geq 4$, то есть второе условие Лейбница выполняется (начиная с $n = 4$). Стало быть, согласно признаку Лейбница исходный ряд сходится. Поскольку он не обладает абсолютной сходимостью, то ряд сходится условно.

ЧАСТЬ 2. Функциональные ряды.

§1. Функциональные последовательности.

Пусть $D \subset \mathbf{R}$ – некоторое множество. Если $\forall n \in \mathbf{N}$ поставлена в соответствие некоторая функция $f_n(x)$, определенная на множестве D, то говорят, что на множестве D задана функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$.

Примечание. Очевидно, что для каждой фиксированной точки $x_0 \in D$ из функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ выделяется числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$. Если эта числовая последовательность сходится, то точка x_0 называется *точкой сходимости* функциональной последовательности.

Совокупность всех точек сходимости $X \subset D$ называется *областью сходимости* функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$.

Таким образом, если X – область сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, то $\forall x \in X \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, и стало быть, на множестве X определена новая функция $f(x)$. Эта функция называется *предельной* для функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$. Указанный факт обозначается следующим образом:

$$f_n(x) \to f(x) \quad \text{на множестве } X \quad (\text{ при } n \to \infty).$$

Примечание. Фактически это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \ \forall x \in X$.

Если же существует сходящаяся к нулю неотрицательная числовая последовательность $\{r_n\}$ (то есть $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, $r_n \geq 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$: $0 \leq r_n < \varepsilon \ \forall n > n_0$) такая, что $|f_n(x) - f(x)| \leq r_n \ \forall x \in X$, то говорят, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится равномерно* к функции $f(x)$ на множестве X и обозначают этот факт следующим образом

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \quad \text{на множестве } X \quad (\text{ при } n \to \infty).$$

Примечание. Равномерная сходимость $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве X геометрически означает, что начиная с некоторого номера графики всех членов последовательности $f_n(x)$, $x \in X$, содержатся в полоске Π_ε сколь угодно малой толщины 2ε со средней линией в виде графика $f(x)$

$$\Pi_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: \quad x \in X, \quad f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}.$$

Лемма 4. Пусть X – область сходимости $\{f_n(x)\}$ и существует сходящаяся числовая последовательность $\{\gamma_n\}$ такая, что

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |\gamma_{n+p} - \gamma_n| \quad \forall n, p \in \mathbf{N}, \quad x \in X.$$

Тогда $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X.

Доказательство. Пусть $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$; $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$. Рассмотрим $\forall n \in \mathbf{N}$, $x \in X$

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{p\to\infty} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \lim_{p\to\infty} |\gamma_{n+p} - \gamma_n| = |\gamma - \gamma_n| = r_n,$$

где $r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Лемма доказана.

Пример 26. Пусть $\{f_n(x)\} = \left\{x^2 + \dfrac{1}{n}\right\}$. Покажем, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x) = x^2$ на $\mathbf{R}$. Рассмотрим

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Пример 27. Пусть $\{f_n(x)\} = \{x^n\}$.

1. Покажем, что $\forall \sigma \in (0, 1)$ $f_n(x) \rightrightarrows 0$ на множестве $X_\sigma = [-\sigma; \sigma]$. Действительно, $\forall x \in X_\sigma$

$$|f_n(x)| = |x|^n \leq \sigma^n \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

2. Заметим, что $f_n(x) \to f(x)$ на множестве $X = (-1; 1]$, где

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in (-1; 1) \\ 1, & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

Покажем, тем не менее, что эта сходимость не является равномерной. Рассмотрим

$$\sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \geq \sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} x^n \geq \lim_{x\to 1-0} x^n = 1 \neq 0.$$

Таким образом, не существует никакой сходящейся к нулю неотрицательной последовательности r_n такой, что $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leq r_n \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Примечание. Заметим, что в данном примере предельная функция $f(x)$ не является непрерывной на множестве X, хотя каждая из функций $f_n(x)$ непрерывна на нем. Возможно ли такое в случае равномерной сходимости? Ответ дается ниже.

Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей.

1. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X, а x_0 – предельная точка множества X. Тогда если $\forall n \in \mathbf{N} \ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = b_n$, то числовая последовательность $\{b_n\}$ сходится, и более того,

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \text{то есть} \quad \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Доказательство. А. Докажем, во-первых, что последовательность $\{b_n\}$ сходится[7]. Заметим, что $\forall n, p \in \mathbf{N}$, $x \in X$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |f_{n+p}(x) - f_n(x) + f(x) - f(x)| \leq r_{n+p} + r_n,$$

откуда

$$|b_{n+p} - b_n| = \lim_{x\to x_0} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq r_{n+p} + r_n.$$

Таким образом,

$$b_n - r_{n+p} - r_n \leq b_{n+p} \leq b_n + r_{n+p} + r_n.$$

где для любого фиксированного $n \in \mathbf{N}$ последовательность r_{n+p} ограничена, так как сходится, тогда и последовательность $a_p = b_{n+p}$ тоже ограничена,

[7]Обычно для доказательства этого факта используется критерий Коши. Мы приведем другое доказательство, основанное на теореме Больцано-Вейерштрасса.

и по теореме Больцано-Вейерштрасса имеет сходящуюся подпоследовательность a_{p_k}: $\lim\limits_{k\to\infty} a_{p_k} = a$. Тогда полагая в предыдущих неравенствах $p = p_k$ и переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем:

$$b_n - r_n \le a \le b_n + r_n \quad \Leftrightarrow \quad a - r_n \le b_n \le a + r_n,$$

и по теореме "о двух милиционерах" $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Б. Зафиксируем $\forall\varepsilon > 0$ и рассмотрим

$$|f(x) - a| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - b_n + b_n - a| \le r_n + |f_n(x) - b_n| + |b_n - a|.$$

Поскольку $r_n \to 0$, $b_n \to a$, то $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$:

$$0 \le r_n < \varepsilon/3, \quad |b_n - a| < \varepsilon/3 \quad \forall n \ge n_0.$$

С другой стороны, $\lim\limits_{x\to x_0} f_{n_0}(x) = b_{n_0}$, и следовательно,

$$\exists\delta_0(\varepsilon) = \delta(\varepsilon, n_0(\varepsilon)) > 0: \quad |f_{n_0}(x) - b_{n_0}| < \varepsilon/3$$

$\forall x \in X$: $0 < |x - x_0| < \delta_0$. Тогда для указанных x:

$$|f(x) - a| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Свойство доказано.

2. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X и все функции $f_n(x)$ непрерывны на X. Тогда предельная функция $f(x)$ тоже непрерывна на X.

Доказательство. Выберем произвольно точку $x_0 \in X$. По условию все функции $f_n(x)$ непрерывны в точке x_0, то есть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$. Тогда по свойству 1 $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, и таким образом, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а в силу произвольности выбора этой точки, непрерывна также и на всем множестве X. Свойство доказано.

3. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X и все функции $f_n(x)$ непрерывны на X. Тогда $\forall[a;b] \subset X$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

(возможен предельный переход под знаком интеграла).

Доказательство. Заметим, во-первых, что согласно свойству 2 функция $f(x)$ непрерывна, а следовательно, интегрируема на $[a;b]$, поэтому формула

имеет смысл. Рассмотрим числовую последовательность $y_n = \int\limits_a^b f_n(x)dx$ и докажем, что она сходится к $\int\limits_a^b f(x)dx$. Оценим

$$\left| y_n - \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\, dx \le \int_a^b r_n dx = r_n(b-a) \to 0.$$

Свойство доказано.

4. Пусть $f_n(x) \to f(x)$ на X, причем все функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a;b] \subset X$ и последовательность $\{f'_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a;b]$. Тогда на $[a;b]$ предельная функция $f(x)$ тоже является непрерывно дифференцируемой и справедливо тождество

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

(возможен предельный переход под знаком производной).

Доказательство. Зафиксируем любое $x \in [a;b]$ и обозначим

$$F(t) = \lim_{n\to\infty} f'_n(t), \quad t \in [a;x].$$

По условию $f'_n(t) \rightrightarrows F(t)$ на $[a;x]$. Поэтому согласно свойствам 2,3 функция $F(t)$ непрерывна на $[a;x]$ и возможен предельный переход под знаком интеграла, то есть

$$\int_a^x F(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f'_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} [f(x) - f(a)],$$

откуда

$$f(x) = f(a) + \int_a^x F(t)dt \quad \Rightarrow \quad \exists f'(x) = F(x).$$

Свойство доказано.

§2. Функциональные ряды.

Пусть на множестве $D \subset \mathbf{R}$ задана функциональная последовательность $\{u_n(x)\}$. Тогда выражение вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (U)$$

называется *функциональным рядом.*

Примечание. При каждом $x = x_0 \in D$ из функционального ряда выделяется числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Если этот числовой ряд сходится, то говорят, что x_0 точка сходимости функционального ряда.

Совокупность всех точек сходимости функционального ряда называется *областью сходимости* этого ряда.

Всякая конечная сумма первых членов функционального ряда

$$S_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$$

называется частичной суммой этого ряда.

Примечание. Очевидно, что функциональный ряд сходится на множестве X тогда и только тогда, когда функциональная последовательность его частичных сумм $\{S_n(x)\}$ сходится на X к некоторой предельной функции $S(x)$. Эта функция $S(x)$ называется суммой функционального ряда. Если указанная сходимость равномерная, т.е. $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на X, то говорят, что функциональный ряд сходится равномерно (к функции $S(x)$) на множестве X.

Задача 7. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x+2n}\,.$$

Решение. Очевидно, что ни при каком x общий член ряда $\sqrt{x+2n} \not\to 0$ при $n \to \infty$ (и даже более того, $\sqrt{x+2n} \to \infty$), то есть необходимое условие сходимости ряда нигде не выполнено, следовательно, ряд всюду расходится.

Задача 8. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{3n}}\,.$$

Решение. Заметим, во-первых, что данный ряд не имеет смысла при $x = -1$, а при $x = 0$ сходится очевидным образом. Рассмотрим отдельно следующие случаи:

1) $x \in (-1; 1)$. Тогда для общего члена ряда получаем оценку

$$|u_n(x)| = \left|\frac{x^{2n}}{1+x^{3n}}\right| \le \frac{(x^2)^n}{1-|x|} = v_n(x).$$

Поскольку $x^2 < 1$, то ряд $\sum (x^2)^n$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а в таком случае сходится и ряд $\sum v_n(x)$, который отличается от него лишь постоянным множителем. Тогда согласно первому признаку сравнения исходный ряд сходится абсолютно;

2) $x > 1$. Тогда для общего члена ряда получаем оценку

$$|u_n(x)| = \left|\frac{x^{2n}}{1+x^{3n}}\right| = \frac{1}{x^n + (1/x^{2n})} \le \left(\frac{1}{x}\right)^n = v_n(x),$$

и поскольку $(1/x) \in (0; 1)$, то ряд $\sum v_n(x)$ сходится, и по первому признаку сравнения исходный ряд снова сходится;

3) $x = 1$. Тогда $u_n(x) = 1/2 \not\to 0$ при $n \to \infty$, то есть необходимое условие сходимости ряда не выполнено, и ряд расходится;

4) $x < -1$. Тогда для общего члена ряда получаем

$$|u_n(x)| = \left|\frac{x^{2n}}{1+x^{3n}}\right| = \frac{1}{|x|^n - (1/x^{2n})} \sim \frac{1}{|x|^n} = \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = v_n(x),$$

и поскольку $1/|x| \in (0; 1)$, то ряд $\sum v_n(x)$ сходится, и по второму признаку сравнения исходный ряд сходится абсолютно.

Окончательно получаем, что область сходимости исходного фунционального ряда имеет вид $X = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Задача 9. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{x+n}}\,.$$

Решение. Заметим, во-первых, что ни при каком $x \in \mathbf{R}$, удовлетворяющем условию $-x \in \mathbf{N}$, ряд не имеет смысла. Если же $-x \notin \mathbf{N}$, то для общего члена ряда имеем

$$|u_n(x)| = \left|\frac{1}{n\sqrt[3]{x+n}}\right| \sim \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{n^{4/3}} = a_n,$$

причем ряд $\sum a_n$ сходится как обобщенный гармонический ряд (Γ_α) с показателем $\alpha = 4/3 > 1$. Тогда согласно второму признаку сравнения исходный ряд сходится абсолютно. Таким образом, областью сходимости данного функционального ряда является множество $X = \{x \in \mathbf{R} : -x \notin \mathbf{N}\}$.

Задача 10. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x^2+x-1}}\,.$$

Решение. Обозначим $t = x^2 + x - 1$. Тогда общий член ряда можно переписать в виде

$$u_n(x) = \frac{1}{n^t}.$$

Как известно, ряд с таким общим членом – это обобщенный гармонический ряд с показателем t. Стало быть, при $t > 1$ он сходится, а иначе расходится. Таким образом, область сходимости исходного ряда X определяется неравенством $x^2 + x - 1 > 1$, то есть $x^2 + x - 2 > 0$, то есть $(x-1)(x+2) > 0$. Отсюда получаем, что $X = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

Задача 11. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + \sqrt{n}}.$$

Решение. Заметим, во-первых, что ни при каком $x \in \mathbf{R}$, удовлетворяющем условиям: $x < 0$, $x^2 \in \mathbf{N}$, ряд не имеет смысла. Если же $x \geq 0$ или $x^2 \notin \mathbf{N}$, то всегда найдется номер $n_x \in \mathbf{N}$ такой, что $x + \sqrt{n} > 0\ \forall n > n_x$, то есть отбрасывая первые n_x членов ряда, получаем знакочередующийся ряд. Очевидно, что этот знакочередующийся ряд удовлетворяет первому и второму условиям Лейбница, а стало быть, сходится согласно признаку Лейбница. Поскольку отбрасывание конечного числа первых членов ряда не влияет на его сходимость, то сходится и исходный ряд. Окончательно получаем, что областью сходимости исследуемого функционального ряда является множество $X = \mathbf{R} \setminus \{x | \exists m \in \mathbf{N} : x = -\sqrt{m}\}$.

Задача 12. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{nx} + 3}.$$

Решение. Возможны два случая:

1) $x \leq 0$. Тогда общий член ряда

$$u_n(x) = \frac{1}{t^n + 3} \to \begin{cases} \frac{1}{3}, & t \neq 1; \\ \frac{1}{4}, & t = 1, \end{cases} \quad \text{где } t = \left(\frac{1}{5}\right)^{|x|} \in (0; 1],$$

следовательно, ряд расходится (не выполнено необходимое условие сходимости ряда);

2) $x > 0$. Обозначая $t = 5^x > 1$, получаем

$$u_n(x) = \frac{1}{t^n + 3} \sim \frac{1}{t^n} = \left(\frac{1}{t}\right)^n = v_n(t).$$

Ряд $\sum v_n(t)$ сходится как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, следовательно исходный ряд тоже сходится согласно второму признаку сравнения.

Таким образом, областью сходимости исследуемого функционального ряда является множество $X = (0; +\infty)$.

Задача 13. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{2n}\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{ex^2 - 1}}.$$

Решение. Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{2n}\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{ex^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{ex^2 - 1}} \sum_{n=1}^{\infty} \ln^{2n}\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Для того, чтобы это выражение имело смысл, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $ex^2 > 1$. В соответствии с этим рассмотрим следующие два случая:

1) $1/e < x^2 < e$. Поскольку

$$u_n(x) = \ln^{2n}\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0,$$

то фиксируя x, можем воспользоваться радикальным признаком Коши. Вычислим предел

$$K(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \ln^2\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \ln^2(x^2).$$

Заметим, что при указанном выборе x выполняются неравенства

$$\ln(x^2) < \ln e = 1, \quad \ln(x^2) > \ln(1/e) = -1.$$

Таким образом, $K(x) < 1$, и согласно радикальному признаку Коши данный ряд сходится;

2) $x^2 \geq e$. Тогда $u_n(x) \geq \ln^{2n} e = 1 \not\to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, ряд расходится (не выполнено необходимое условие сходимости ряда).

Таким образом, областью сходимости данного функционального ряда является множество $X = (-\sqrt{e}; -1/\sqrt{e}) \cup (1/\sqrt{e}; \sqrt{e})$.

Задача 14. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin\frac{3x}{n}.$$

Решение. Обозначим

$$u_n(x) = x^n \sin\frac{3x}{n}, \quad \overline{u}_n(x) = |u_n(x)|.$$

Очевидно, что при $x = 0$ ряд сходится. Далее будем считать, что $x \neq 0$. Тогда

$$\overline{u}_n(x) = |x|^n \sin\frac{3|x|}{n} \sim 3|x|\frac{|x|^n}{n} = 3|x|v_n(x),$$

и согласно второму признаку сравнения ряды $\sum \overline{u}_n(x)$ и $\sum v_n(x)$ в смысле сходимости ведут себя одинаково. Пользуясь радикальным признаком Коши, вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{v_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = |x|.$$

Таким образом, при $|x| < 1$ ряд $\sum v_n(x)$ сходится, а значит, исходный ряд сходится абсолютно. При $|x| > 1$ общий член $v_n(x) \not\to 0 \Rightarrow \overline{u}_n(x) \not\to 0 \Rightarrow u_n(x) \not\to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow$ исходный ряд расходится (не выполнено необходимое условие сходимости ряда). Остается не исследованным поведение ряда в двух точках $x = \pm 1$.

Итак, пусть $x = 1$. В этой точке исходный ряд совпадает с рядом $\sum \overline{u}_n(1)$, а он в смысле сходимости ведет себя так же, как $\sum v_n(1)$, то есть как гармонический ряд $\sum(1/n)$, который, как известно, расходится.

Пусть $x = -1$. В этой точке исходный ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin\frac{3}{n},$$

то есть является знакочередующимся. Очевидно, что он удовлетворяет первому условию Лейбница. Функция $\sin t$ является, как известно, возрастающей на $(0;\pi/2) \Rightarrow$ последовательность $\sin(3/n)$ убывает, начиная с номера $n = 3$. Поскольку отбрасывание конечного числа первых членов ряда не влияет на его сходимость, можем считать, что второе условие Лейбница тоже выполнено. Поэтому согласно признаку Лейбница ряд сходится.

Окончательно получаем, что область сходимости исследуемого функционального ряда имеет вид $X = [-1;1)$.

Задача 15. Доказать непосредственно по определению равномерную сходимость функционального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^{5n} x}{2n+1}$$

на отрезке $[0;\pi/2]$.

Решение. Заметим, во-первых, что $\forall x \in [0;\pi/2]$ данный ряд является знакочередующимся. Покажем, что он удовлетворяет первому и второму условиям Лейбница. Обозначим $t = \sin^5 x \in [0;1]$. Тогда общий член ряда

($t \in [0;1]$ считаем фиксированным) принимает вид

$$a_n = (-1)^n \frac{t^n}{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \overline{a}_n = |a_n| = \frac{t^n}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то есть первое условие Лейбница выполняется. Пусть $t \in (0;1]$. Тогда, очевидно, $t^{n+1} < t^n$, и следовательно,

$$\overline{a}_{n+1} = \frac{t^{n+1}}{2n+3} < \frac{t^n}{2n+1} = \overline{a}_n,$$

а значит, и второе условие Лейбница выполнено. Поэтому согласно признаку Лейбница ряд сходится при $t \in (0;1]$ (при $t = 0$ сходимость очевидна). При этом остаток ряда оценивается по модулю модулем своего первого члена. Таким образом, обозначая $\sigma(t)$ – сумму ряда, а $\sigma_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ – частичную сумму ряда, получаем:

$$|\sigma_n(t) - \sigma(t)| = |r_n(t)| \leq \frac{t^n}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1} \quad \forall t \in (0;1].$$

Поскольку $\sigma(0) = \sigma_n(0) = 0$, то это же неравенство выполняется и при $t = 0$. Возвращаясь к переменной x, получаем соответственно, что на отрезке $[0;\pi/2]$ исходный функциональный ряд сходится, и справедливо неравенство

$$|S_n(x) - S(x)| \leq \gamma_n = \frac{1}{2n+1} \quad \forall x \in [0;\pi/2],$$

где $S(x)$ – сумма ряда, а $S_n(x)$ – частичная сумма ряда. Очевидно, что $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда по определению получаем, что $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $[0;\pi/2]$, то есть данный функциональный ряд сходится равномерно на указанном отрезке.

Теорема 14 (признак Вейерштрасса). Если существует неотрицательная числовая последовательность $\{\gamma_n\}$ такая, что

$$|u_n(x)| \leq \gamma_n \quad \forall x \in X, \quad n \in \mathbf{N},$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \qquad (\overline{U})$$

сходится, то ряд (U) сходится на X абсолютно и равномерно.

Доказательство. Заметим, во-первых, что согласно первому признаку сравнения неотрицательных числовых рядов при каждом фиксированном $x \in X$ ряд $\sum |u_n(x)|$ сходится, а стало быть, ряд (U) сходится абсолютно на множестве X. В частности, существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)\ \forall x \in X$. Осталось показать, что $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на X. Воспользуемся леммой 4. Рассмотрим

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \le$$
$$\le |u_{n+1}(x)| + \ldots + |u_{n+p}(x)| \le \gamma_{n+1} + \ldots + \gamma_{n+p} = |\sigma_{n+p} - \sigma_n|,$$

где $\sigma_n = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ – частичная сумма ряда $(\overline{U})$. По условию этот ряд сходится, то есть сходится последовательность $\{\sigma_n\}$. Тогда по лемме 4 получаем, что $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на X. Теорема доказана.

Примечание. Числовой ряд $(\overline{U})$ называется *мажорирующим* для ряда (U).

Пример 28. Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\sin(nx^n)+3}{n^3}$ сходится равномерно на всей числовой оси. Заметим, что

$$\left|\frac{n\sin(nx^n)+3}{n^3}\right| = \left|\frac{\sin(nx^n)+(3/n)}{n^2}\right| \le \frac{4}{n^2} \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

и таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4}{n^2}$ является (на $\mathbf{R}$) мажорирующим для исходного ряда, и он сходится как обобщенный гармонический ряд (Γ_α) с показателем $\alpha = 2 > 1$. Тогда согласно признаку Вейерштрасса исследуемый ряд сходится абсолютно и равномерно на всей числовой оси.

Задача 16. Доказать равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{9}\right)^{n!}$$

на отрезке $[-2; 2]$.

Решение. Заметим, что $\forall x \in [-2; 2]$

$$\left|\operatorname{tg}\frac{\pi x}{9}\right| \le \operatorname{tg}\frac{2\pi}{9} = q < \operatorname{tg}\frac{2\pi}{8} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

Соответственно, $q^{n!} \le q^n$. Таким образом, ряд $\sum q^n$ является мажорирующим для исходного ряда на отрезке $[-2; 2]$. При этом, поскольку $0 < q < 1$, то мажорирующий ряд сходится. Стало быть, по признаку Вейерштрасса исходный функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на $[-2; 2]$.

§3. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

1. Пусть ряд (U) сходится равномерно на X, а x_0 – предельная точка множества X. Тогда если $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = b_n$, то числовой ряд $\sum b_n$ сходится, и более того,
$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

2. Пусть ряд (U) сходится равномерно на X и все члены ряда $u_n(x)$ непрерывны на X. Тогда сумма ряда непрерывна на X.
3. Пусть ряд (U) сходится равномерно на X и все члены ряда $u_n(x)$ непрерывны на X. Тогда $\forall [a; b] \subset X$ справедливо равенство
$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$$
(возможно интегрирование под знаком функционального ряда).
4. Пусть ряд (U) сходится на X, причем все члены ряда $u_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a; b] \subset X$, и ряд из производных
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$
сходится равномерно на $[a; b]$. Тогда на $[a; b]$ сумма функционального ряда (U) является непрерывно дифференцируемой, и справедливо тождество
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$
(возможно дифференцирование под знаком функционального ряда).

Примечания.

1. Поскольку равномерная сходимость функционального ряда (U) означает равномерную сходимость последовательности его частичных сумм $\{S_n(x)\}$, то для доказательства сформулированных выше свойств достаточно воспользоваться аналогичными свойствами равномерно сходящихся функциональных последовательностей.
2. Свойства 3 и 4 позволяют в некоторых случаях вычислить сумму ряда.

§4. Степенные ряды.

Пусть $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ – некоторая числовая последовательность, $x_0 \in \mathbf{R}$. Тогда функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \qquad (C_0)$$

называется *степенным рядом* в окрестности точки x_0, или рядом по степеням $(x - x_0)$. При этом члены последовательности $\{c_n\}$ называются *коэффициентами степенного ряда*.

Заменой $x - x_0 = t$ ряд (C_0) сводится к степенному ряду в окрестности нуля. Поэтому далее нам достаточно рассмотреть случай $x_0 = 0$. Итак, рассмотрим степенной ряд в окрестности нуля

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n . \qquad (C)$$

Определение. Число R, определяемое формулой

$$R = \frac{1}{\rho}, \quad \rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|},$$

называется *радиусом сходимости* степенного ряда (C) (а также и (C_0)). При этом, если $\rho = 0$, считаем, что $R = +\infty$. Если же $\rho = +\infty$, считаем, что $R = 0$.

Название становится понятно из следующего утверждения.

Теорема 15 (о структуре области сходимости степенного ряда).

1) $\forall x \in \mathbf{R}$, $|x| < R$, ряд (C) сходится, и притом абсолютно;

2) $\forall x \in \mathbf{R}$, $|x| > R$, ряд (C) расходится.

Доказательство. Зафиксируем любое $x \in \mathbf{R}$. Обозначим

$$r = r(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = |x| \cdot \rho .$$

В соответствии с радикальным признаком Коши сходимости неотрицательных числовых рядов, в случае $r(x) < 1$, то есть при $|x| < R$, ряд (C) сходится абсолютно. И в соответствии с тем же признаком, в случае $r(x) > 1$, то есть при $|x| > R$, $|c_n x^n| \not\to 0$ при $n \to \infty$, а следовательно, общий член ряда (C) не стремится к нулю, а стало быть, не выполнено необходимое условие сходимости ряда, и ряд расходится. Теорема доказана.

Примечания.

1. В соответствии с теоремой 15 интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда (C). Аналогичным образом, интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$, получаемый из условия $|x - x_0| < R$, называется интервалом сходимости степенного ряда (C_0). Таким образом, на интервале сходимости степенной ряд сходится, а вне соответствующего отрезка – расходится. Что касается граничных точек $x = \pm R$, то, как показывают следующие примеры, в них степенной ряд (C) может сходиться, а может и расходиться. Поэтому область сходимости степенного ряда не обязательно совпадает с интервалом сходимости, но может отличаться от него лишь добавлением одной или обеих граничных точек. Отметим, наконец, следующее очевидное свойство: в точке $x = 0$ ряд (C) сходится.

2. В случае, когда существует соответствующий предел, конечный или бесконечный, число ρ можно вычислять по формуле

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \quad \Rightarrow \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| .$$

Для доказательства вместо радикального признака Коши следует сослаться на признак Даламбера.

Пример 29. Найдем область сходимости и область абсолютной сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

В данном случае $c_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Соответственно,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Таким образом, интервал $(-1; 1)$ является интервалом сходимости данного степенного ряда (на нем ряд сходится абсолютно). Исследуем поведение степенного ряда в граничных точках интервала сходимости, то есть при $x = \pm 1$.

Итак, при $x = 1$ из степенного ряда получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Этот ряд расходится как обобщенный гармонический ряд (Γ_α) с показателем $\alpha = 1/2 < 1$.

При $x = -1$ из степенного ряда получаем знакочередующийся числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Этот ряд сходится по признаку Лейбница. Данная сходимость не является абсолютной, ибо, как мы только что установили, ряд из модулей членов этого ряда расходится. Поэтому при $x = -1$ ряд сходится условно.

Таким образом, областью сходимости данного степенного ряда является полуинтервал $[-1; 1)$, а областью абсолютной сходимости – интервал $(-1; 1)$.

Пример 30. Найдем область сходимости (она совпадает здесь с областью абсолютной сходимости) степенного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}.$$

В данном случае можем записать его как ряд (C), где

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{k^2}, & \text{при } n = 2k, \\ 0, & \text{при } n = 2k - 1. \end{cases}$$

Мы, конечно, можем вычислить ρ как верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$. Обычный предел здесь не существует, так как последовательность $z_n = \sqrt[n]{|c_n|}$ распадается на две подпоследовательности z_{2k} и z_{2k-1}, одна из которых сходится к 1, а другая – к 0 (соответственно, верхний предел равен 1). Но мы можем поступить и по-другому. А именно, сделаем замену $x^2 = t$. Тогда вместо исходного ряда получим тоже степенной ряд, но уже более простого вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}. \qquad (\mathcal{T})$$

Следует, впрочем, иметь в виду, что нас интересует поведение этого нового ряда лишь при $t \geq 0$. Коэффициенты ряда $(\mathcal{T})$ определяются уже более простой формулой

$$c_n = \frac{1}{n^2},$$

и мы можем вычислить радиус сходимости этого ряда как

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = 1.$$

Таким образом, интервалом сходимости ряда $(\mathcal{T})$ является интервал $(-1;1)$. Поскольку нас интересует поведение ряда лишь при $t \geq 0$, то нам достаточно исследовать сходимость ряда только в одной граничной точке этого интервала $t = 1$. Итак, при $t = 1$ из ряда $(\mathcal{T})$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Этот ряд сходится как обобщенный гармонический ряд (Γ_α) с показателем $\alpha = 2 > 1$. Стало быть, пересечением области сходимости ряда $(\mathcal{T})$ с множеством $\{t \geq 0\}$ является отрезок $t \in [0;1]$. Поэтому область сходимости исходного ряда определяется неравенствами

$$0 \leq t = x^2 \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Иными словами, областью сходимости исходного степенного ряда является отрезок $[-1;1]$.

Примечание. В некоторых случаях, когда требуется найти область сходимости функционального ряда, удается с помощью замены переменной свести его к степенному ряду и воспользоваться теорией степенных рядов. Рассмотрим примеры.

Задача 17. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(5+x)^n}.$$

Решение. Заметим, прежде всего, что при $x = -5$ ряд не имеет смысла. Далее, сделаем замену переменной

$$t = \frac{1}{5+x} \neq 0.$$

Тогда исходный ряд принимает вид степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,t^n, \qquad (\mathcal{T}_1)$$

для которого $c_n = \sqrt{n} \Rightarrow \rho = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\sqrt[n]{n}} = 1$, следовательно, радиус сходимости $R = 1$. Соответственно, интервалом сходимости ряда $(\mathcal{T}_1)$ является интервал $(-1;1)$. Очевидно, что при $t = \pm 1$ общий член ряда не стремится к нулю, следовательно ряд расходится. Таким образом, область сходимости ряда $(\mathcal{T}_1)$ совпадает с интервалом $(-1;1)$. Тогда область сходимости исходного ряда определяется условиями

$$-1 < \frac{1}{x+5} < 1, \quad x \neq -5,$$

то есть $|x+5| > 1$, и $X = (-\infty;-6) \cup (-4;+\infty)$.

Задача 18. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}\operatorname{tg}^{2n}x.$$

Решение. Сделаем замену $\operatorname{tg}^2 x = t$ и исследуем соответственно поведение степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}t^n$$

при $t \geq 0$. Коэффициенты этого степенного ряда определяются формулой

$$c_n = \frac{3^n}{n^3} \quad \Rightarrow \quad \rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n^3}} = 3,$$

следовательно, его радиус сходимости $R = 1/3$, а интервал сходимости имеет вид $(-1/3;1/3)$. Поскольку нас интересует поведение степенного ряда лишь при $t \geq 0$, рассмотрим лишь одну граничную точку $t = 1/3$ интервала сходимости. В этой точке степенной ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3},$$

а следовательно, сходится как обобщенный гармонический ряд (Γ_α) с показателем $\alpha = 3 > 1$. Таким образом, область сходимости X исходного функционального ряда определяется неравенствами

$$0 \le t \le \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \mathrm{tg}^2 x \le \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \le \mathrm{tg} x \le \frac{1}{\sqrt{3}},$$

то есть

$$X = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right].$$

Задача 19. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} x^n \sin(2x - n\pi).$$

Решение. Используя соответствующую формулу приведения, можем записать

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} x^n \sin(2x - n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2x (-1)^n \frac{4^n}{n} x^n = \sin 2x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{n} x^n.$$

При $x = \pi k/2$, где k – целое число, $\sin 2x = 0$, следовательно общий член ряда равен 0, значит, ряд сходится. При всех остальных x исходный функциональный ряд в смысле сходимости ведет себя так же, как степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{n} x^n,$$

коэффициенты которого определяются формулой $c_n = (-1)^n \dfrac{4^n}{n}$, следовательно $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4^n}{n}} = 4 \Rightarrow$ радиус сходимости $R = 1/4 \Rightarrow$ интервал сходимости $(-1/4; 1/4)$.

Исследуем поведение степенного ряда в граничных точках интервала сходимости.

При $x = -1/4$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

то есть гармонический ряд, а он расходится.

При $x = 1/4$ получаем ряд Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

который, как известно, условно сходится.

Таким образом, областью сходимости степенного ряда является полуинтервал $(-1/4; 1/4]$. Соответственно, областью сходимости исходного функционального ряда является множество $X = (-1/4; 1/4] \cup \{k\pi/2 : k \in \mathbf{Z}\}$.

Теорема 16. Пусть $R > 0$ – радиус сходимости степенного ряда (C). Тогда $\forall \sigma \in (0, R)$ ряд (C) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[-\sigma; \sigma]$.

Доказательство. Для всех $x \in [-\sigma; \sigma]$, $n = 0, 1, \ldots$, справедлива оценка

$$|c_n x^n| \le |c_n \sigma^n|.$$

Поэтому числовой ряд $\sum |c_n \sigma^n|$ является мажорирующим для ряда (C) на отрезке $[-\sigma; \sigma]$, и он сходится согласно теореме 15. В таком случае, согласно признаку Вейерштрасса, ряд (C) сходится абсолютно и равномерно на этом отрезке. Теорема доказана.

Теорема 17 (теорема Абеля).

1) Если ряд (C) сходится при $x = z \ne 0$, то он сходится абсолютно $\forall x \in \mathbf{R}$, $|x| < |z|$. Более того, $\forall \sigma \in (0, |z|)$ ряд (C) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[-\sigma; \sigma]$.

2) Если ряд (C) расходится при $x = z \ne 0$, то он расходится $\forall x \in \mathbf{R}$, $|x| > |z|$.

Доказательство. Утверждение 2) является следствием 1). Действительно, если мы предположим, что $\exists x \in \mathbf{R}$: $|x| > |z|$ и ряд (C) сходится в x, то в силу 1) мы сразу получим, что ряд (C) сходится и в точке z, а это противоречит условию. Докажем 1). Итак, пусть z – точка сходимости ряда (C). Тогда по теореме 15, $|z| \le R$, и стало быть, $\forall \sigma \in (0, |z|)$ имеем: $\sigma \in (0, R)$. Тогда по теореме 16 ряд (C) сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[-\sigma; \sigma]$. Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 16 и соответствующих свойств равномерно сходящихся функциональных рядов получаем, что справедливы следующие свойства (здесь R везде обозначает радиус сходимости степенного ряда (C)).

Свойства степенных рядов

1. Сумма степенного ряда является бесконечное число раз непрерывно дифференцируемой функцией на его интервале сходимости. При этом возможно почленное дифференцирование степенного ряда на его интервале сходимости (любое число раз), и ряд, получаемый почленным дифференцированием, всякий раз имеет тот же радиус сходимости, что и исходный.

Доказательство. В соответствии с теоремой 16 нам достаточно проверить, что ряд, получаемый почленным дифференцированием, имеет радиус сходимости R. Итак, пусть R_1 – радиус сходимости этого ряда, то есть (при $x \neq 0$; при $x = 0$ он, очевидно, сходится)

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n.$$

Тогда

$$R_1 = \frac{1}{\rho_1}, \quad \rho_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|nc_n|}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то $\rho_1 = \rho$, и таким образом, $R_1 = R$. Свойство доказано.

2. $\forall [a; b] \subset (-R; R)$ возможно почленное интегрирование степенного ряда (C) на этом отрезке. В частности, ряд, полученный из (C) почленным интегрированием на $[0; x]$, тоже является степенным (по степеням x) и имеет такой же радиус сходимости R.

Доказательство – аналогично доказательству предыдущего свойства.

Покажем, как можно использовать указанные свойства для вычисления суммы ряда.

Пример 31. Найдем область сходимости и сумму ряда (ср. с задачей 5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\sum_{n=0}^{\infty} (x^n)'.$$

Рассмотрим ряд $\sum x^n$. В данном случае $c_n = 1$. Очевидным образом получаем: $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow R = 1$, то есть интервалом сходимости этого нового ряда является интервал $(-1; 1)$. Согласно свойству 1, он же является интервалом сходимости исходного ряда, так как он только множителем x отличается от ряда, полученного почленным дифференцированием ряда $\sum x^n$, причем $\forall x \in (-1; 1)$ (мы используем здесь формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем x, $|x| < 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Таким образом, $\forall x \in (-1; 1)$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Что касается граничных точек $x = \pm 1$ интервала сходимости, то в них ряд расходится, так как общий член ряда не стремится к нулю (не выполнено необходимое условие сходимости ряда).

Задача 20. Найти область сходимости и сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n.$$

Решение. Заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Что касается второго слагаемого, то сумма этого ряда уже вычислена в предыдущем примере. Первое же слагаемое можем переписать в виде

$$x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = x^2\sum_{n=2}^{\infty} (x^n)'' = x^2\sum_{n=0}^{\infty} (x^n)''. \qquad (C'')$$

Рассмотрим ряд $\sum x^n$. В данном случае $c_n = 1$. Очевидным образом получаем: $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow R = 1$, то есть интервалом сходимости этого нового ряда является интервал $(-1; 1)$. Согласно свойству 1, он же является интервалом сходимости ряда (C''), так как он только множителем x^2 отличается от ряда, полученного почленным дважды дифференцированием ряда $\sum x^n$, причем $\forall x \in (-1; 1)$ (мы используем здесь формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем x, $|x| < 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x^n)'' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)'' = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Таким образом, $\forall x \in (-1; 1)$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

Что касается граничных точек $x = \pm 1$ интервала сходимости, то в них ряд расходится, так как общий член ряда не стремится к нулю (не выполнено необходимое условие сходимости ряда).

Окончательно получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

Пример 32. Найдем область сходимости и сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt.$$

Таким образом, данный ряд получается почленным интегрированием на отрезке $t\in[0;x]$ ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^n$, который, как известно, сходится на интервале $(-1;1)$. Тогда по свойству 2, исходный ряд имеет такой же интервал сходимости и $\forall x\in(-1;1)$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^n dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln|1-t|\,\Big|_0^x=\ln\frac{1}{1-x}.$$

Исследуем поведение ряда в граничных точках $x=\pm1$.

Итак, при $x=1$ из исходного степенного ряда получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

то есть гармонический ряд, а он, как известно, расходится.

При $x=-1$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

то есть ряд Лейбница, а он, как известно, сходится условно. Как уже было показано (см. задачу 6), сумма его равна $-\ln 2=\ln 0.5$. Таким образом, окончательно получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\ln\frac{1}{1-x}\quad\forall x\in[-1;1).$$

То же самое можно записать и так:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\quad\forall x\in(-1;1].$$

Иными словами, мы получили разложение функции $\ln(1+x)$ в степенной ряд. Полученное разложение мы можем использовать, например, для приближенного вычисления (с любой степенью точности) интеграла

$$L(t)=\int_0^t\frac{\ln(1+x)}{x}dx,\quad t\in(-1;1).$$

Заметим, что интеграл $L(t)$ не выражается в элементарных функциях, то есть, как говорят, является неберущимся (формула Ньютона-Лейбница оказывается здесь бесполезной). Вместе с тем, используя полученное разложение, можем записать

$$L(t)=\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}dx=\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}dx.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+1}.$$

Коэффициенты этого ряда выражаются формулой

$$c_n=\frac{(-1)^n}{n+1}\quad\Rightarrow\quad R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+1}\right|=1.$$

Поэтому промежуток интегрирования $[0;t]$ содержится в интервале сходимости $(-1;1)$. В соответствии со свойством 2 степенных рядов возможно почленное интегрирование ряда на $[0;t]$, и таким образом,

$$L(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\int_0^t x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{n+1}}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{n^2}.$$

Далее рассмотрим два случая.

1) $t\in(0,1)$. Тогда $L(t)$ представляет собой знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям Лейбница. Поэтому остаток ряда оценивается по модулю своим первым членом, и мы можем записать

$$L(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}t^k}{k^2}+r_n(t),\quad |r_n(t)|\le\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Таким образом, если нам требуется вычислить $L(t)$ с точностью Δ, то достаточно определить номер n, исходя из условия

$$\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}<\Delta,$$

и воспользоваться приближенной формулой

$$L(t)\approx\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}t^k}{k^2}.$$

2) $t \in (-1;0)$. Тогда $L(t)$ представляет собой знакопостоянный ряд, а именно,

$$L(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k-1}|t|^k}{k^2} + r_n(t) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{|t|^k}{k^2} + r_n(t), \quad r_n(t) = -\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|t|^k}{k^2}.$$

Здесь мы можем воспользоваться следующей оценкой

$$\frac{|r_n(t)|}{|t|^{n+1}} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Сумму, стоящую в этом выражении справа, мы можем вычислить точно (см. прием, использованный при решении задачи 1, и дальше). Тогда получим

$$|r_n(t)| \le \frac{|t|^{n+1}}{n}.$$

Стало быть, если нам требуется вычислить $L(t)$ с точностью Δ, то достаточно определить номер n, исходя из условия

$$\frac{|t|^{n+1}}{n} < \Delta,$$

и воспользоваться приближенной формулой

$$L(t) \approx -\sum_{k=1}^{n} \frac{|t|^k}{k^2}.$$

Примечание. Используя теорию интегралов, зависящих от параметра, можно показать, что $L(1) = \pi^2/12$.

Аналогичным образом мы можем вычислить и значение самой функции $\ln(x+1), x \in (-1;1)$, с любой степенью точности, воспользовавшись полученным для нее разложением в степенной ряд. Далее мы покажем, как получать подобные разложения для других функций.

§5. Разложение функций в степенные ряды.

Пусть функция $f(x)$ имеет производные любого порядка на некотором интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ и является на нем суммой степенного ряда (разлагается в степенной ряд)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n. \qquad (F)$$

Естественно, это предположение имеет смысл лишь в том случае, когда интервал $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ содержится в интервале сходимости $(x_0 - R; x_0 + R)$ степенного ряда. Поскольку степенной ряд допускает почленное дифференцирование на интервале сходимости, и в частности, на интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, до любого порядка, то мы можем продифференцировать k раз тождество (F):

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(x-x_0)^{n-k} \Rightarrow f^{(k)}(x_0) = c_k k!$$

то есть

$$c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Таким образом, тождество (F) принимает вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta).$$

Ряд, стоящий в этой формуле справа, называется *рядом Тейлора* [8] функции $f(x)$ в окрестности точки x_0. Заметим, что если функция $f(x)$ имеет производные любого порядка на интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, то мы можем формально составить для нее ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Возникает вопрос: при каких условиях функция будет представима в окрестности точки x_0 своим рядом Тейлора? В связи с этим вспомним, что при наложенных условиях функция $f(x)$ может быть разложена в интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ по формуле Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x) = S_n(x) + r_n(x), \quad x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta),$$

где $S_n(x)$ – частичная сумма ряда Тейлора, а

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \xi = \xi(x) = x_0 + \theta(x - x_0), \quad \theta = \theta(x) \in (0, 1),$$

– остаточный член формулы Тейлора (здесь $\xi(x)$ – некоторая точка, расположенная между x_0 и x, то есть либо $\xi \in (x_0, x)$, если $x_0 < x$, либо $\xi \in (x, x_0)$, если $x < x_0$). Отсюда очевидным образом получаем следующее утверждение.

Теорема 18. Пусть функция $f(x)$ имеет производные любого порядка на некотором интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Тогда для того, чтобы $f(x)$ была

[8] На самом деле этот ряд был получен еще И.Бернулли в 1694 г., а самим Тейлором – только в 1715 г.

представима степенным рядом на этом интервале, а именно, своим рядом Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)\ r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Следствие. Пусть функция $f(x)$ имеет производные любого порядка на некотором интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, и кроме того, $\exists M > 0$: $|f^{(n)}(x)| \le M$ $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $n = 0, 1, \ldots$. Тогда $f(x)$ представима своим рядом Тейлора на этом интервале.

Для доказательства достаточно заметить, что

$$|r_n(x)| \le M \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} = M \cdot \gamma_{n+1},$$

где γ_n является (согласно признаку Даламбера) общим членом сходящегося ряда, следовательно, $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Примечание. При $x_0 = 0$ ряд Тейлора называют еще рядом Маклорена. Впрочем, никаких исторических оснований для этого нет, так как работа Маклорена по этой теме была опубликована лишь в 1748 г., уже после работы Тейлора (в 1715 г.).

Рассмотрим разложение в ряд Маклорена некоторых из основных элементарных функций.

1.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

2.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

3.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

4.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1; 1].$$

5.

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1; 1), \quad \alpha \notin \mathbf{N};$$

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in \mathbf{R}, \quad m \in \mathbf{N}.$$

6.

$$\mathrm{sh}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

7.

$$\mathrm{ch}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

8.

$$\mathrm{arctg}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1; 1].$$

9.

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)} x^{2n+1}, \quad x \in (-1; 1).$$

Покажем, например, как получить разложение $f(x) = e^x$. Заметим, во-первых, что

$$f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = \ldots = e^x,$$

следовательно,

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 1.$$

При этом на любом отрезке $[-\delta; \delta]$ производная

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \le e^\delta,$$

то есть ограничена. Остается воспользоваться следствием теоремы 18 и произвольностью выбора отрезка $[-\delta; \delta]$.

Разложения $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{sh}x$, $\mathrm{ch}x$, $(1+x)^\alpha$ получаем аналогичным образом. При этом разложение $\cos x$ и $\mathrm{ch}x$ можно получить почленным дифференцированием разложений $\sin x$ и $\mathrm{sh}x$ соответственно. Разложение $\ln(1+x)$ уже было получено ранее. Что касается того, как получить остальные разложения, будет сказано позже. Выписанные выше разложения будем называть стандартными. Пользуясь ими, можно получать разложения в ряд Маклорена и других элементарных функций.

Пример 33. Получим разложение в ряд Маклорена функции

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Сделаем замену $x^2 = -t$. Тогда функция принимает вид

$$f(x) = \frac{1}{1-t},$$

а это есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем t, откуда

$$f(x) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1$$

(заметим, что вместо этого мы могли бы использовать стандартное разложение $(1+t)^\alpha$ при $t = x^2$, $\alpha = -1$). Подставляя вместо $t = -x^2$, получаем:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x^2 < 1, \text{ то есть } |x| < 1.$$

Примечание. Производя почленное интегрирование полученного разложения на $[0; x]$, $|x| < 1$, и учитывая, что $(\mathrm{arctg}x)' = 1/(1+x^2)$, $\mathrm{arctg}(0) = 0$, получаем разложение в ряд Маклорена $\mathrm{arctg}x$. При $x = \pm 1$ рассуждения аналогичны тем, которые были проведены для $\ln(1+x)$ при $x = 1$.

Пример 34. Получим разложение в ряд Маклорена функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Сделаем замену $x^2 = -t$. Тогда функция принимает вид

$$f(x) = (1+t)^{-1/2}.$$

Тогда, используя соответствующее стандартное разложение, получаем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\cdot\ldots\cdot(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} t^n, \quad |t| < 1,$$

то есть (учитывая, что в числителе n слагаемых)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n n!} t^n, \quad |t| < 1,$$

или

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} t^n, \quad |t| < 1.$$

Подставляя вместо $t = -x^2$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} x^{2n}, \quad x^2 < 1, \text{ то есть } |x| < 1.$$

Примечания.

1. Производя почленное интегрирование полученного разложения на $[0; x]$, $|x| < 1$, и учитывая, что $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $\arcsin(0) = 0$, получаем разложение в ряд Маклорена $\arcsin x$.

2. Учитывая, что

$$\mathrm{arsh}x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \quad \left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$\mathrm{arsh}(0) = 0$, аналогичным образом можно получить разложение в ряд Маклорена $\mathrm{arsh}x$.

Задача 21. Найти разложение в ряд Маклорена функции

$$f(x) = \ln(20 + x - x^2).$$

Решение. Раскладывая аргумент логарифма на множители и пользуясь свойствами логарифма, получаем:

$$f(x) = \ln(4+x)(5-x) = \ln 20 \left(1 + \frac{x}{4}\right)\left(1 - \frac{x}{5}\right) =$$

$$= \ln 20 + \ln\left(1+\frac{x}{4}\right) + \ln\left(1-\frac{x}{5}\right) = \ln 20 + f_1(x) + f_2(x).$$

1. Делая замену $x/4 = t$ и используя стандартное разложение, можем записать

$$f_1(x) = \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}, \quad t \in (-1; 1].$$

Подставляя вместо $t = x/4$, получаем

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{4^n n}, \quad \frac{x}{4} \in (-1; 1], \text{ то есть } x \in (-4; 4].$$

2. Делая замену $x/5 = -t$, аналогичным образом получаем

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(-1)^n \frac{x^n}{5^n n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n}, \quad -\frac{x}{5} \in (-1; 1],$$

то есть $x \in [-5; 5)$.

3. Оба разложения 1 и 2 одновременно справедливы на пересечении полуинтервалов $(-4; 4] \cap [-5; 5) = (-4; 4]$. Таким образом,

$$f(x) = \ln 20 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{4^n n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n},$$

или

$$f(x) = \ln 20 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n-1}}{4^n} - \frac{1}{5^n} \right) \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-4; 4].$$

Задача 22. Найти разложение в ряд Маклорена функции

$$f(x) = \frac{4-x}{x^2 - 8x + 15}.$$

Решение. Раскладывая на простейшие дроби, получаем

$$f(x) = \frac{4-x}{x^2-8x+15} = \frac{4-x}{(x-5)(x-3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-x} + \frac{1}{5-x} \right) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-(x/3)} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-(x/5)} = \frac{1}{6} \cdot f_1(x) + \frac{1}{10} \cdot f_2(x).$$

1. Сделаем замену $x/3 = t$. Тогда функция $f_1(x)$ принимает вид

$$f_1(x) = \frac{1}{1-t},$$

а это есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем t, откуда

$$f_1(x) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad |t| < 1$$

Подставляя вместо $t = x/3$, получаем:

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}, \quad \left| \frac{x}{3} \right| < 1, \text{ то есть } -3 < x < 3.$$

2. Аналогично,

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}, \quad -5 < x < 5.$$

3. Оба разложения 1 и 2 одновременно справедливы на пересечении интервалов $(-3;3) \cap (-5;5) = (-3;3)$. Таким образом,

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+1}} \right) x^n, \quad -3 < x < 3.$$

§6. Использование степенных рядов в приближенных вычислениях

Ранее (см. пример 32) уже было продемонстрировано использование разложения подынтегральной функции в степенной ряд для приближенного (с любой степенью точности) вычисления интеграла. Аналогичным образом разложение в степенной ряд дает возможность во многих случаях вычислять значение функции.

Пример 35. Вычислить с заданной погрешностью $\Delta = 0.0001$ число e.

Решение. Используя разложение функции e^x в ряд Маклорена при $x = 1$, можем записать

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + r_n(1),$$

где остаток $r_n(1)$ – это остаточный член формулы Лагранжа, а он, как уже было показано, оценивается следующим образом

$$|r_n(1)| = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} 1^{n+1} \le \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}, \quad \xi \in (0;1).$$

Стало быть, нам достаточно подобрать номер n из условия

$$\frac{3}{(n+1)!} < \Delta$$

и использовать приближенную формулу

$$e \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Итак, вычисляем

$$\frac{3}{5!} = \frac{1}{40} > \Delta, \quad \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} > \Delta, \quad \frac{3}{7!} = \frac{1}{1680} > \Delta, \quad \frac{3}{8!} = \frac{1}{13440} < \Delta.$$

Таким образом, можем взять $n = 7$. Соответственно, получаем:

$$e \approx \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = 2.5 + \frac{1100}{5040} = 2.718254$$

Примечание. На самом деле $e = 2.71828182\ldots$. Таким образом, полученное нами значение имеет ошибку лишь в пятом знаке после запятой, что соответствует заданной точности.

Пример 36. Найти формулу, позволяющую с заданной погрешностью Δ вычислить число π.

Решение. Используя разложение функции $\operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена при $x = 1$, можем записать

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \Leftrightarrow \pi = 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + 4r_n(1), \quad r_n(1) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Поскольку это знакочередующийся ряд, удовлетворяющий первому и второму условиям Лейбница, то остаток ряда оценивается по модулю модулем своего первого члена, то есть

$$|4r_n(1)| \le \frac{4}{2n+3}.$$

Стало быть, нам достаточно подобрать номер n из условия

$$\frac{4}{2n+3} < \Delta$$

и использовать приближенную формулу

$$\pi \approx 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

§7. Использование степенных рядов для решения дифференциальных уравнений.

Как известно, решение дифференциального уравнения может быть выражено в элементарных функциях или квадратурах (интегралом от элементарных функций) далеко не всегда. Более того, это имеет место лишь для ограниченного класса дифференциальных уравнений. Однако аналитическое решение дифференциального уравнения (численные методы решения дифференциальных уравнений находятся за рамками нашего изложения) иногда удается найти в виде степенного ряда. Мы не ставим себе целью дать полное изложение этого подхода (в рамках учебного пособия столь ограниченного объема это попросту невозможно). Рассмотрим его применение лишь для линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, то есть уравнений вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

Будем предполагать далее, что коэффициенты уравнения $p(x)$ и $q(x)$, а также правая часть $f(x)$ представляются степенным рядом на некотором интервале $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ и требуется найти решение задачи Коши

$$y(x_0) = z_0, \quad y'(x_0) = z_1.$$

Тогда уравнение можем переписать в виде

$$y'' + y'\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + y\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n.$$

Решение будем искать в виде ряда

$$y = y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(x-x_0)^n.$$

Тогда

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\gamma_n(x-x_0)^{n-1} \Rightarrow y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\gamma_n(x-x_0)^{n-2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение, а затем перемножая степенные ряды и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(x - x_0)$ в левой и правой части, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов γ_n следующего вида:

$$\begin{cases} 2\cdot 1\gamma_2 + a_0\gamma_1 + b_0\gamma_0 = c_0, \\ 3\cdot 2\gamma_3 + 2a_0\gamma_2 + (a_1+b_0)\gamma_1 + b_1\gamma_0 = c_1, \\ 4\cdot 3\gamma_4 + 3a_0\gamma_3 + (2a_1+b_0)\gamma_2 + (a_2+b_1)\gamma_1 + b_2\gamma_0 = c_2, \\ \ldots \end{cases}$$

Эта система обладает следующим замечательным свойством. Каждое последующее из ее уравнений содержит ровно на один искомый коэффициент больше, чем предыдущее. При этом коэффициенты γ_0 и γ_1 здесь могут быть произвольными и должны определяться из начальных условий. Чтобы облегчить себе решение системы, можно поступить следующим образом: найти сначала частное решение $y_0(x)$, удовлетворяющее условиям $y_0(x_0) = 1$, $y_0'(x_0) = 0$, а затем – частное решение $y_1(x)$, удовлетворяющее условиям $y_1(x_0) = 0$, $y_1'(x_0) = 1$. Тогда искомое решение задачи Коши будет выражаться формулой

$$y(x) = z_0y_0(x) + z_1y_1(x).$$

Вид системы и ее решение естественным образом упрощается в случае, когда коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ являются многочленами по степеням $(x - x_0)$.

Задача 23. Решить задачу Коши

$$y'' - 2xy' - y = e^{x^2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Решение.

1. Найдем разложение функции $f(x) = e^{x^2}$ в ряд Маклорена. Для этого сделаем замену $x^2 = t$ и воспользуемся стандартным разложением

$$f(x) = e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}, \quad t \in \mathbf{R}, \text{ то есть } x \in \mathbf{R}.$$

2. Будем искать решение в виде степенного ряда в окрестности $x = 0$, а именно $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$. Тогда

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n\gamma_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\gamma_{n+1} x^n \quad \Rightarrow \quad xy' = \sum_{n=1}^{\infty} n\gamma_n x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\gamma_{n+1} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\gamma_{n+2} x^n.$$

Из начальных условий получаем:

$$y(0) = \gamma_0 = 1, \quad y'(0) = \gamma_1 = 0.$$

Подставляя в уравнение вместо y, y', y'' и e^{x^2} их разложения в степенной ряд, получаем:

$$2 \cdot 1 \cdot \gamma_2 - \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)\gamma_{n+2} - (2n+1)\gamma_n \right] x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}.$$

3. Приравнивая коэффициенты при x^0, имеем:

$$2\gamma_2 - \gamma_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\gamma_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 = 1.$$

4. Приравнивая коэффициенты при нечетных степенях x, то есть при x^{2k-1} $(n = 2k-1)$, находим:

$$(2k+1)(2k)\gamma_{2k+1} - (4k-1)\gamma_{2k-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_{2k+1} = \frac{4k-1}{(2k+1)(2k)}\gamma_{2k-1}.$$

Учитывая, что $\gamma_1 = 0$, заключаем отсюда, что

$$\gamma_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad \gamma_{2k-1} = 0 \quad k \in \mathbf{N}.$$

5. Приравнивая коэффициенты при четных степенях x, то есть при x^{2k} $(n = 2k)$, находим:

$$(2k+2)(2k+1)\gamma_{2k+2} - (4k+1)\gamma_{2k} = \frac{1}{k!}.$$

Покажем по индукции, что $\gamma_{2k} = 1/(k!)$. Итак, при $k = 1$ (учитывая, что $\gamma_2 = 1$, см. выше) получаем:

$$4 \cdot 3 \cdot \gamma_4 - 5 = 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_4 = \frac{6}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!},$$

то есть формула верна не только при $k = 1$, но и при $k = 2$. Предположим, что формула верна для текущего индекса k. Тогда

$$(2k+2)(2k+1)\gamma_{2k+2} - (4k+1)\frac{1}{k!} = \frac{1}{k!},$$

следовательно,

$$\gamma_{2(k+1)} = \frac{(4k+2)}{(2k+2)(2k+1)k!} = \frac{1}{k!(k+1)} = \frac{1}{(k+1)!},$$

то есть формула верна и при следующем значении индекса $(k+1)$.

Таким образом,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = e^{x^2}.$$

Примечание. В случае, когда из некоторых физических соображений понятно, что решением дифференциального уравнения является периодическая функция, искать это решение естественно не в виде разложения по степеням x (степенного ряда), а в виде разложения по линейно независимой, в частности, ортогональной системе периодических функций. Так, если период $T = 2\pi$, наиболее естественно взять в качестве такой системы набор функций $\sin nx$, $\cos nx$, $n = 0, 1, \ldots$. Таким образом, мы приходим к понятию ряда Фурье.

§8. Ряды Фурье

Пусть $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – двё числовые последовательности. Тогда функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right]$$

называется *тригонометрическим рядом* с периодом 2π.

Соответственно, систему функций

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(nx), \sin(nx), \ldots \qquad (\tau)$$

будем называть тригонометрической системой на отрезке $[-\pi; \pi]$ или с периодом 2π.

Для произвольных двух функций $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемых на отрезке $[a;b]$ [9], число

$$(f,g)=\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$$

условимся называть скалярным произведением функций $f(x)$ и $g(x)$ на $[a;b]$. Соответственно, 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ будем называть ортогональными на $[a;b]$, если $(f,g)=0$; 2) функцию $f(x)$ будем называть нормированной на $[a;b]$, если $(f,f)=1$; 3) систему функций будем называть ортонормированной, если все функции этой системы нормированы и попарно ортогональны.

Напомним следующие формулы, известные из тригонометрии:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right].$$

С использованием этих формул непосредственным вычислением проверяется, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 19. Тригонометрическая система функций (τ) является ортогональной на отрезке $[-\pi;\pi]$; система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ldots\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ldots \qquad (\tau_e)$$

является ортонормированной на отрезке $[-\pi;\pi]$, то есть

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx=0,\quad \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx=0,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\sin(mx)dx=0 \text{ при } m\neq n,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx=\pi,\quad \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)dx=\pi.$$

[9]Для простоты мы имеем в виду интегрируемость по Риману. Тогда, как известно, произведение $f(x)g(x)$ тоже интегрируемо по Риману на $[a;b]$.

Примечание. Введенные выше определения скалярного произведения, ортогональности и ортонормированности не случайны и имеют глубокий смысл. Дело в том, что, как показывают следующие далее утверждения, система (τ_e) играет, фактически, роль ортонормированного базиса в пространстве функций, непрерывно дифференцируемых на $[-\pi;\pi]$. Если $\gamma_1,\gamma_2,\ldots$ – координаты функции $f(x)$ в ортонормированном базисе $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots$, то так же, как и для конечномерного случая,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\varphi_n(x),\quad \gamma_n=(f,\varphi_n),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Действительно,

$$(f,\varphi_m)=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(\varphi_n,\varphi_m)=\gamma_m,\text{ т.к. }(\varphi_n,\varphi_m)=\begin{cases}1, & m=n;\\ 0, & m\neq n.\end{cases}$$

В частности, если α_n и β_n – координаты функции $f(x)$ в базисе (τ_e), то

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{\alpha_0}{\sqrt{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\cos(nx)+\beta_n\sin(nx)\right]\right),$$

$$\alpha_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(f(x),\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \alpha_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(f(x),\cos(nx)),\ \beta_n=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(f(x),\sin(nx)),$$

$n\in\mathbb{N}$. А это означает, что функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд, коэффициенты которого определяются формулами

$$a_0=\frac{1}{\pi}(f(x),1),\quad a_n=\frac{1}{\pi}(f(x),\cos(nx)),\quad b_n=\frac{1}{\pi}(f(x),\sin(nx)).$$

Теорема 20 (теорема единственности). Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[-\pi;\pi]$ и разлагается на этом отрезке в тригонометрический ряд, который допускает почленное интегрирование. Тогда коэффициенты этого разложения единственны и определяются формулами

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx. \qquad (\mathcal{F})$$

Определение. Тригонометрический ряд с периодом 2π, коэффициенты которого определяются формулами $(\mathcal{F})$, называется рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Теорема 21 (о разложении функции в ряд Фурье). Пусть функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны на $[-\pi;\pi]$, либо имеют на нем лишь конечное число точек разрыва 1-го рода. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится на всей числовой оси. При этом сумма ряда $S(x)$ совпадает с $f(x)$ в каждой точке непрерывности функции $f(x)$ на $(-\pi;\pi)$, а на концах отрезка

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}.$$

Если же $x_0 \in (-\pi;\pi)$ – точка разрыва функции, то

$$S(x_0) = \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}, \qquad \text{где } f(x_0 \pm 0) = \lim_{x\to x_0 \pm 0} f(x).$$

При этом $S(x)$ – периодическая функция с периодом 2π.

Лемма 5. Пусть функция $\varphi(x)$ интегрируема на $[-a;a]$. Тогда
1) если $\varphi(x)$ – четная, то

$$\int\limits_{-a}^{a} \varphi(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} \varphi(x)dx;$$

2) если $\varphi(x)$ – нечетная, то

$$\int\limits_{-a}^{a} \varphi(x)dx = 0.$$

Доказательство. 1) Очевидно, что

$$\int\limits_{-a}^{a} \varphi(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} \varphi(x)dx + \int\limits_{0}^{a} \varphi(x)dx.$$

Делая в первом интеграле замену $x = -t$ и учитывая, что $\varphi(-t) = \varphi(t)$, получаем

$$\int\limits_{-a}^{0} \varphi(x)dx = -\int\limits_{a}^{0} \varphi(-t)dt = \int\limits_{0}^{a} \varphi(t)dt.$$

2) – доказывается аналогично. Лемма доказана.

Примечание. Непосредственно из леммы 5 получаем следующее.
1) Если $f(x)$ – четная функция, то формулы $(\mathcal{F})$ принимают вид

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = 0. \qquad (\mathcal{F}_1)$$

2) Если $f(x)$ – нечетная функция, то формулы $(\mathcal{F})$ принимают вид

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx. \qquad (\mathcal{F}_2)$$

Пример 37. Найдем разложение в ряд Фурье функции

$$f(x) = |\cos x|.$$

Данная функция удовлетворяет условиям теоремы 21. Кроме того, она является четной. Поэтому мы можем использовать формулы $(\mathcal{F}_1)$:

$$b_n = 0; \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} |\cos x|dx = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos x dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{4}{\pi};$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2 x dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x dx\right) = 0.$$

При $n > 1$:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos x\cos(nx)dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos x\cos(nx)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{0}^{\pi/2} \Big[\cos(n-1)x + \cos(n+1)x\Big]dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \Big[\ldots\Big]dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\sin(n-1)x}{n-1} + \frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right]\Bigg|_0^{\pi/2} - \Big[\ldots\Big]\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(\pi/2+\pi n/2)}{n+1} - \frac{\sin(\pi/2-\pi n/2)}{n-1}\right).$$

Отсюда получаем: $a_{2k-1} = 0$. При $n = 2k$:

$$a_{2k} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{(-1)^k}{2k-1}\right) = (-1)^k\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right) = \frac{(-1)^{k-1}4}{\pi(4k^2-1)}.$$

Таким образом, сумма ряда Фурье

$$S(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1}\cos(2kx).$$

Функция $|\cos x|$ непрерывна на всем интервале $(-\pi;\pi)$. Поэтому в соответствии с теоремой 21

$$S(x) = |\cos x|, \quad x \in (-\pi;\pi);$$

$$S(\pm\pi) = \frac{|\cos\pi| + |\cos(-\pi)|}{2} = 1 = |\cos(\pm\pi)|.$$

Стало быть, учитывая, что обе функции периодические с периодом 2π (на самом деле с периодом π),

$$|\cos x| = S(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Примечание. В частности, при $x = \pi$ получаем:

$$1 = |\cos\pi| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1},$$

откуда

$$\pi = 2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2-(1/4)}.$$

Эта формула удобнее для приближенного вычисления значения числа π с любой степенью точности, нежели формула примера 36, так как общий член, а следовательно, и остаток ряда Лейбница, стоящего справа, стремится здесь к нулю на порядок быстрее.

Задача 24. Разложить функцию $f(x) = 2x + 3$ в ряд Фурье на $(-\pi;\pi)$, построить сумму ряда Фурье $S(x)$, а также частичные суммы $S_1(x)$, $S_2(x)$, $S_3(x)$.

Решение. Заметим, что $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = 3$. Константа $f_2(x)$ сама является своим разложением в ряд Фурье. Поэтому нам достаточно разложить в ряд Фурье функцию $f_1(x)$. Поскольку это нечетная функция, то можем воспользоваться формулами $(\mathcal{F}_2)$:

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\sin(nx)dx =$$

$$= \left[\begin{array}{lcl} u = x & \Rightarrow & du = dx; \\ \sin(nx)dx = dv & \Rightarrow & v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{array}\right] =$$

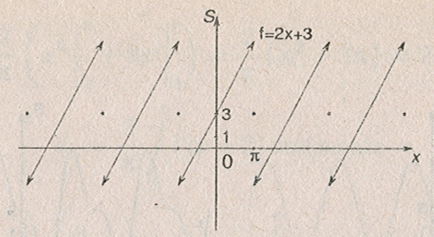

Рис. 1

$$= \frac{4}{\pi}\left[-x\cdot\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\right] = -\frac{4}{n}\cos(\pi n) = \frac{4(-1)^{n-1}}{n}.$$

Поскольку $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[-\pi;\pi]$, то в соответствии с теоремой 21

$$f(x) = S(x) = 3 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx), \quad x \in (-\pi;\pi);$$

$$S(\pm\pi) = \frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \frac{-2\pi+3+2\pi+3}{2} = 3$$

(см. рис. 1). Выпишем частичные суммы (см. рис. 2): $S_1(x) = 3 + 4\sin x$,

$$S_2(x) = 3 + 4\sin x - 2\sin(2x), \quad S_3(x) = 3 + 4\sin x - 2\sin(2x) + \frac{4}{3}\sin(3x).$$

Задача 25. Для функции $f(x) = 2x + 3$, рассматриваемой на $[0;\pi]$, получить разложение в ряд Фурье: 1) по синусам; 2) по косинусам; 3) одно из разложений общего вида (по синусам и косинусам). Построить сумму каждого ряда.

Решение (см. рис. 3).

1. Пусть $F_1(x)$ – четное продолжение функции $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$, то есть

$$F_1(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \in [0;\pi]; \\ 2(-x)+3, & x \in [-\pi;0). \end{cases}$$

Найдем ряд Фурье функции $F_1(x)$. Поскольку $F_1(x)$ – четная функция, то в соответствии с формулами $(\mathcal{F}_1)$ имеем: $b_n = 0$;

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F_1(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x+3)dx =$$

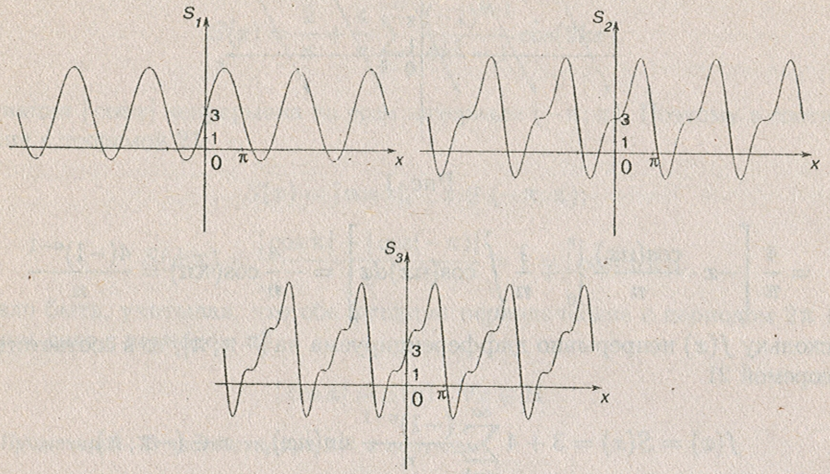

Рис. 2

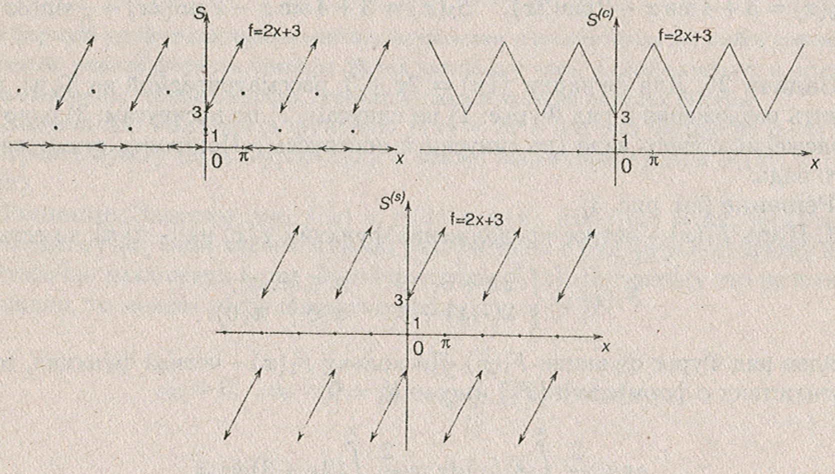

Рис. 3

$$= \frac{2}{\pi}\left(x^2\Big|_0^{\pi} + 3x\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\pi^2 + 3\pi\right) = 2\pi + 6;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(2x+3)\cos(nx)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{3}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\pi} + 2\int\limits_0^{\pi} x\cos(nx)dx\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} u = x & \Rightarrow & du = dx; \\ \cos(nx)dx = dv & \Rightarrow & v = \frac{\sin(nx)}{n} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[x\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\sin(nx)dx\right] = \frac{4}{\pi n^2}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^2}.$$

Ряд Фурье:

$$\pi + 3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\cos(nx) = \pi + 3 - 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{\pi(2k-1)^2} = S^{(c)}(x).$$

Функция $F_1(x)$ дифференцируема на $(-\pi;0)$ и $(0;\pi)$, непрерывна на $[-\pi;\pi]$; $F_1'(x)$ непрерывна на $(-\pi;0)$ и $(0;\pi)$. Таким образом, $F_1(x)$ не имеет точек разрыва на $[-\pi;\pi]$, а $F_1'(x)$ имеет 3 точки разрыва $x = \pm\pi$ и $x = 0$, но это точки разрыва 1-го рода. Стало быть, в соответствии с теоремой 21 сумма ряда Фурье $S^{(c)}(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом 2π, причем

$$S^{(c)}(x) = F_1(x),\ x \in (-\pi;\pi),\ \text{в частности},\ f(x) = S^{(c)}(x),\ x \in (0;\pi);$$

$$S^{(c)}(\pm\pi) = \frac{F_1(-\pi) + F_1(\pi)}{2} = \frac{2F_1(\pi)}{2} = f(\pi).$$

Поэтому можем записать

$$f(x) = S^{(c)}(x),\ x \in [0;\pi].$$

2. Пусть $F_2(x)$ – нечетное продолжение функции $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$, то есть

$$F_2(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \in [0;\pi]; \\ -(2(-x)+3) = 2x-3, & x \in [-\pi;0). \end{cases}$$

Найдем ряд Фурье функции $F_2(x)$. Поскольку $F_2(x)$ – нечетная функция, то в соответствии с формулами $(\mathcal{F}_2)$ имеем: $a_0 = 0$, $a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F_2(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2x+3)\sin(nx)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{3}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{lcl} u = x & \Rightarrow & du = dx; \\ \sin(nx)dx = dv & \Rightarrow & v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{6(1-(-1)^n)}{n\pi} + \frac{4}{\pi}\left[-x\cdot\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx\right] =$$

$$\frac{6(1-(-1)^n)}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n} + \frac{4}{\pi n^2}\sin(nx)\Big|_0^{\pi} = \frac{6(1-(-1)^n)}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n}.$$

Ряд Фурье:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6(1-(-1)^n)}{n\pi} - \frac{4(-1)^n}{n}\right]\sin(nx) = S^{(s)}(x).$$

Функция $F_2(x)$ непрерывно дифференцируема на $(-\pi;0)$ и $(0;\pi)$ и имеет на $[-\pi;\pi]$ одну точку разрыва $x = 0$, но это точка разрыва 1-го рода; $F_2'(x)$ непрерывна на $(-\pi;0)$ и $(0;\pi)$ и имеет 3 точки разрыва $x = \pm\pi$ и $x = 0$, но это точки разрыва 1-го рода. Стало быть, в соответствии с теоремой 21 сумма ряда Фурье $S^{(s)}(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом 2π, причем

$$S^{(s)}(x) = F_2(x),\ x \in (-\pi;0)\cup(0;\pi),$$

в частности,

$$f(x) = S^{(s)}(x),\ x \in (0;\pi);$$

$$S^{(s)}(0) = \frac{F_2(-0)+F_2(+0)}{2} = 0, \quad S^{(s)}(\pm\pi) = \frac{F_2(-\pi)+F_2(\pi)}{2} = 0.$$

3. Пусть $F(x)$ – продолжение функции $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$ нулем, то есть

$$F(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \in [0;\pi]; \\ 0, & x \in [-\pi;0). \end{cases}$$

Найдем ряд Фурье функции $F(x)$. В соответствии с формулами $(\mathcal{F})$ имеем (см. п.п. 1, 2)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(2x+3)dx = \pi + 3;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(2x+3)\cos(nx)dx = \frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(2x+3)\sin(nx)dx = \frac{3(1-(-1)^n)}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n}.$$

Ряд Фурье:

$$\frac{\pi+3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}\cos(nx) + \left(\frac{3(1-(-1)^n)}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n}\right)\sin(nx)\right].$$

Функция $F(x)$ непрерывно дифференцируема на $(-\pi;0)$ и $(0;\pi)$ и имеет на $[-\pi;\pi]$ одну точку разрыва $x = 0$, но это точка разрыва 1-го рода; $F'(x)$ непрерывна на $(-\pi;0)$ и $(0;\pi)$ и имеет 3 точки разрыва $x = \pm\pi$ и $x = 0$, но это точки разрыва 1-го рода. Стало быть, в соответствии с теоремой 21 сумма ряда Фурье $S(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом 2π, причем

$$S(x) = F(x),\ x \in (-\pi;0)\cup(0;\pi),$$

в частности,

$$f(x) = S(x),\ x \in (0;\pi);$$

$$S(0) = \frac{F(-0)+F(+0)}{2} = \frac{3}{2}, \quad S(\pm\pi) = \frac{F(-\pi)+F(\pi)}{2} = \frac{f(\pi)}{2} = \pi + \frac{3}{2}.$$

Примечание. Можно было получить разложение по синусам и косинусам на $(0;\pi)$ как

$$S(x) = \frac{S^{(c)}(x)+S^{(s)}(x)}{2}.$$

§9. Ряды Фурье с периодом $2h$

Как уже было отмечено, сумма ряда Фурье с периодом 2π является периодической функцией с периодом 2π. Поэтому функции с периодом 2π естественно раскладывать в ряд Фурье с периодом 2π. Аналогично, функции с периодом $2h$ $(h > 0)$ естественно раскладывать в тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{h} + b_n\sin\frac{n\pi x}{h}\right],$$

члены которого являются периодическими функциями с периодом $2h$ (тригонометрический ряд с периодом $2h$). С помощью замены $\pi x/h = t$ отрезок $x \in [-h; h]$ преобразуется в отрезок $t \in [-\pi; \pi]$, а указанный ряд сводится к тригонометрическому ряду с периодом 2π. Поэтому для него справедливы аналоги теорем 19, 20, 21, при этом роль отрезка $[-\pi; \pi]$ играет отрезок $[-h; h]$. Соответственно, для функции $f(x)$, интегрируемой на отрезке $[-h; h]$, рядом Фурье с периодом $2h$ называется тригонометрический ряд с периодом $2h$, коэффициенты которого определяются формулами

$$a_0 = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} f(x)\cos\frac{n\pi x}{h}dx, \quad b_n = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} f(x)\sin\frac{n\pi x}{h}dx. \qquad (\mathcal{F}^h)$$

Если $f(x)$ – четная функция, то формулы $(\mathcal{F}^h)$ принимают вид

$$a_0 = \frac{2}{h}\int_{0}^{h} f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{h}\int_{0}^{h} f(x)\cos\frac{n\pi x}{h}dx, \quad b_n = 0. \qquad (\mathcal{F}^h_1)$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то формулы $(\mathcal{F}^h)$ принимают вид

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{h}\int_{0}^{h} f(x)\sin\frac{n\pi x}{h}dx. \qquad (\mathcal{F}^h_2)$$

Задача 26. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 0]; \\ x, & x \in (0; 1] \end{cases}$$

найти разложение в ряд Фурье на $[-1; 1]$.

Решение. В соответствии с формулами $(\mathcal{F}^h)$ при $h = 1$ имеем

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} x dx = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx = \int_{-1}^{0}\cos(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} x\cos(n\pi x)dx =$$

$$= \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\Bigg|_{-1}^{0} + x\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\Bigg|_{0}^{1} + \frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2};$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)dx = \int_{-1}^{0}\sin(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} x\sin(n\pi x)dx =$$

$$= -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Bigg|_{-1}^{0} - x\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Bigg|_{0}^{1} + \frac{\sin(n\pi x)}{n^2\pi^2}\Bigg|_{0}^{1} = -\frac{1}{n\pi}.$$

Ряд Фурье:

$$\frac{3}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) + \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\right] = S(x).$$

Функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $(-1; 0)$ и $(0; 1)$ и имеет на $[-1; 1]$ одну точку разрыва $x = 0$, но это точка разрыва 1-го рода; $F'(x)$ непрерывна на $(-1; 0)$ и $(0; 1)$ и имеет 3 точки разрыва $x = \pm 1$ и $x = 0$, но это точки разрыва 1-го рода. Стало быть, сумма ряда Фурье $S(x)$ определена на всей числовой оси, периодична с периодом 2, причем

$$S(x) = f(x), \ x \in (-1; 0) \cup (0; 1);$$

$$S(0) = \frac{f(-0) + f(+0)}{2} = \frac{1}{2},$$

$$S(\pm 1) = \frac{f(-1) + f(1)}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 = f(\pm 1).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бугров Я.С., Никольский С.М.** Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. - Ростов н/Д: Феникс, 1998. – 512 с.
2. **Власова Е.А.** Ряды. - М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. - 612 с. (Сер. Математика в техническом университете; вып. IX).
3. **Воробьев Н.Н.** Теория рядов. - Спб.: Лань, 2002. - 408 с.
4. Примеры решения задач по теории функций комплексного переменного: Методическое пособие / Сост.: **А.В.Чернов**; НГТУ. Н.Новгород, 2005.
5. Сборник задач по математике для втузов, Ч.2. Специальные разделы математического анализа. Под ред. **А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича**. - М.: Наука, 1986. – 368 с.