

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Нижегородский государственный технический университет**  
**им. Р.Е. Алексеева» (НГТУ)**

Учебно-научный институт радиоэлектроники и информационных технологий  
(ИРИТ)

(Полное и сокращенное название института, реализующего данное направление)

УТВЕРЖДАЮ:

Директор института:

\_\_\_\_\_ А.В. Мякинков  
подпись \_\_\_\_\_ ФИО

“ 10 ” 06 \_\_\_\_\_ 2021 г

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

Б1.Б.17Функциональный анализ

((индекс и наименование дисциплины по учебному плану))

для подготовки бакалавров

Направление подготовки: 01.03.02. Прикладная математика и информатика

Направленность: Математическое моделирование и компьютерные технологии

Форма обучения: очная

Год начала подготовки 2021

Выпускающая кафедра ПМ

Кафедра-разработчик ПМ

Объем дисциплины 108/3  
часов/з.е.

Промежуточная аттестация экзамен

Разработчик: Рязанцева И.П., д.ф.-м.н., профессор

Нижний Новгород, 2021

Рабочая программа дисциплины: разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО 3++) по направлению подготовки 01.03.02. Прикладная математика и информатика, утвержденного приказом МИНОБРНАУКИ РОССИИ от 10 января 2018 года № 9 на основании учебного плана принятого УМС НГТУ протокол от 10.06.2021 № 6.

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры протокол от 4.06.2021 № 9/1  
Зав. кафедрой д.ф-м.н., профессор \_\_\_\_\_ А.А. Куркин  
(подпись)

Программа рекомендована к утверждению учебно-методическим советом института ИРИТ, Протокол № 1 от 10.06.2021 г.

Рабочая программа зарегистрирована в УМУ регистрационный № 01.03.02-П-17  
Начальник МО \_\_\_\_\_

Заведующая отделом комплектования НТБ \_\_\_\_\_ Н.И. Кабанина  
(подпись)

## СОДЕРЖАНИЕ

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ).....	4
2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ.....	4
3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) .....	6
4. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОП ВО.....	7
5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....	8
6. ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.....	13
7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....	15
8. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ .....	16
9. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОВЗ.....	18
10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ, НЕОБХОДИМОЕ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ.....	19
11. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ОБУЧАЮЩИМСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ	20
12. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ .....	22
13. ЛИСТ АКТУАЛИЗАЦИИ.....	32

## **1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **1.1. Целью (целями) освоения дисциплины является:**

- знать основные виды метрических пространств и метрики в них, уметь доказывать для всех пространств справедливость аксиом метрики;
- знать определение линейного пространства, линейного нормированного пространства;
- знать, что означает сходимость по метрике в каждом из изучаемых метрических пространств;
- знать, что означает сходимость по норме в каждом из изучаемых метрических пространств;
- знать принцип сжимающих отображений;
- уметь проверять справедливость аксиом метрики и аксиом нормы для конкретных пространств;
- уметь применять принцип сжимающих отображений для доказательства разрешимости операторного уравнения, а также для нахождения решения нелинейного уравнения;
- уметь использовать в математических исследованиях свойства полноты, сепарабельности пространств;
- иметь навыки применения функционального анализа при постановке прикладных задач в рамках изучаемых пространств;
- владеть методикой анализа свойств элементов линейного пространства при исследовании разрешимости задачи в рамках банаховых и гильбертовых пространств.

Данная дисциплина готовит к решению профессиональной задачи по научно-исследовательскому виду деятельности (основной).

### **1.2. Задачи освоения дисциплины (модуля):**

получение и использование навыков определения типа пространства, включая метрические, нормированные и гильбертовы пространства, при постановке реальных практических задач, при установлении их разрешимости и при выборе приближённых методов их решения.

## **2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ**

Учебная дисциплина «Функциональный анализ» включена в перечень дисциплин обязательной части образовательной программы вне зависимости от ее направленности (профиля). Дисциплина реализуется в соответствии с требованиями ФГОС, ОПОП ВО и УП по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Дисциплина базируется на следующих дисциплинах: математический анализ, высшая алгебра, дифференциальные уравнения. Предшествующими курсами, на которых непосредственно базируется дисциплина «Функциональный анализ», являются математический анализ и высшая

алгебра.

Результаты обучения, полученные при освоении дисциплины, необходимы при изучении следующих дисциплин: численные методы, линейные операторы, теория операторов монотонного типа, методы оптимизации и при выполнении выпускной квалификационной работы.

Рабочая программа дисциплины «Функциональный анализ» для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья разрабатывается индивидуально с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся.

### 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Таблица 1 – Формирование компетенций по дисциплинам

Наименование дисциплин, формирующих компетенцию совместно	Семестры, формирования дисциплины Компетенции берутся из Учебного плана по направлению подготовки бакалавра /специалиста/магистра»							
	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>Код компетенции ОПК-3</i>								
Функциональный анализ					*			
Дифференциальные уравнения			*					
Дискретная математика	*	*						
Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена								*
Выполнение и защита ВКР								*

#### 4. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОПОП ВО

Таблица 2 – Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине			Оценочные средства	
					Текущего контроля	Промежуточной Аттестации
ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	ИОПК-3.2. Использует математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	<b>Знать:</b> - классические понятия и основные утверждения функционального анализа	<b>Уметь:</b> - применять понятия и утверждения функционального анализа для построения математических моделей, при исследовании разрешимости прикладных задач и установлении свойств их решений	<b>Владеть:</b> - аппаратом функционального анализа для нахождения приближённого решения задач профессиональной деятельности	Вопросы для письменного опроса. Варианты контрольных работ и РГР	Комплект экзаменационных билетов

## 5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 5.1. Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ по семестрам

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 зачётных единицы - 144 часа, распределение часов по видам работ и семестрам представлено в таблице 3.

Таблица 3

**Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ по семестрам  
Для студентов очного обучения**

Вид учебной работы	Трудоёмкость в час	
	Всего час.	5 сем
<b>Формат изучения дисциплины</b>	с использованием элементов электронного обучения	
<b>Общая трудоёмкость</b> дисциплины по учебному плану	<b>144</b>	<b>144</b>
<b>1. Контактная работа:</b>	<b>75</b>	<b>75</b>
<b>Аудиторная работа, в том числе:</b>	<b>68</b>	<b>68</b>
<b>Занятия лекционного типа (Л)</b>	<b>34</b>	<b>34</b>
занятия семинарского типа (ПЗ-семинары, практические занятия и др.)	<b>34</b>	<b>34</b>
лабораторные работы (ЛР)		
<b>Внеаудиторная, в том числе</b>	<b>7</b>	<b>7</b>
курсовая работа (проект) (КР/КП) (консультация, защита)		
текущий контроль, консультации по дисциплине	<b>7</b>	<b>7</b>
контактная работа на промежуточном контроле (КРА)		
<b>2. Самостоятельная работа (СРС)</b>	<b>33</b>	<b>33</b>
реферат/эссе (подготовка)		
расчётно-графическая работа (РГР) (подготовка)	<b>17</b>	<b>17</b>
контрольная работа		
курсовая работа/проект (КР/КП) (подготовка)		
самостоятельное изучение разделов, самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к лабораторным и практическим занятиям, коллоквиум и т.д.)	<b>16</b>	<b>16</b>
Подготовка к зачёту (контроль)		
Подготовка к экзамену (контроль)	<b>36</b>	<b>36</b>





## 5.2. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Таблица 4–Содержание дисциплины, структурированное по темам для студентов очного обучения

Планируемые (результаты контролируемые) освоения: код УК; ОПК; ПК и индикаторы достижения компетенций	Наименование разделов, тем	Виды учебной работы				Вид СРС	Наименование используемых активных и интерактивных образовательных технологий	Реализация в рамках практической подготовки(трудоемкость в часах)	
		Контактная работа			Самостоятельная работа студентов (СРС), час				
		Лекции, час	Лабораторные работы, час	Практические занятия, час					
ОПК-3	Раздел 1. Метрические пространства					подготовка к лекциям 7.1.2 (с. 81-131);			
	Тема 1.1. Неравенство Юнга. Неравенство Гёльдера для сумм. Неравенство Минковского для сумм. Метрические пространства. Примеры..	2		2	2				
	Тема 1.2.Сходимость в метрических пространствах. Примеры, что означает сходимость в конкретных метрических пространствах..	2		2	2				
	Тема 1.3. Ограниченные множества. Предельные точки. Замкнутые множества. Операция замыкания. Свойства операции замыкания и замкнутых множеств. Открытые множества и их свойства. Принцип двойственности. Примеры замкнутых и открытых множеств.	2		2	2				
	Тема 1.4. Предельная точка множества. Всюду плотное множество. Сепарабельное метрическое пространство. Примеры сепарабельных и несепарабельных пространств. Теорема отделимости.	2		2	2				

	<b>Тема 1.5.</b> Полнота метрических пространств. Примеры полных и неполных метрических пространств. Теорема К (Аналог леммы Кантора о стягивающей системе отрезков). Изометрические пространства.	2		2	2			
	<b>Тема 1.6.</b> Принцип Банаха сжимающих отображений и его следствие. Теорема существования решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.	2		2	2			
	<b>Тема 1.7.</b> Компактность. Теорема Хаусдорфа о существовании конечной $\varepsilon$ -сети в компактном множестве. Пример компактного множества в координатном гильбертовом пространстве.	2		2	2		Опрос по свойствам метрических пространств	
	<b>Тема 1.8.</b> Критерий компактности в пространстве $C[a, b]$ . Теорема Арцела. Теорема Вейерштрасса о компактности образа при непрерывном отображении. Пример некомпактного множества, на котором теорема Вейерштрасса может оказаться неверной.	2		2	2			
	<b>Итого по 1 разделу</b>	16		16	16			
ОПК--3	<b>Раздел 2.</b> Линейные пространства .					подготовка к лекциям 7.1.1 (с. 132-135); 7.1.2 (с. 9-19);		
	<b>Тема 2. 1.</b> Линейные пространства. Примеры линейных пространств. Линейная зависимость и линейная независимость. Базис. Аффинное многообразие. Изоморфизм линейных пространств. Выпуклые множества в линейных пространствах. Выпуклые функционалы.	2		2	1		Опрос по основным понятиям и утверждениям теории компактных множеств	
	<b>Итого по 2 разделу</b>	2		2	1			
	<b>Раздел 3.</b> Нормированные пространства,					подготовка к лекциям 7.1.1(с. 36-49); 7.1.2(с. 132-137);		

ОПК-3	<b>Тема 3.1.</b> Нормированные пространства. Банаховы пространства. Примеры нормированных пространств. Неравенства Гельдера и Минковского для интегралов. Подчинённые и эквивалентные нормы.	2		2	2			
	<b>Тема 3.2.</b> Теорема о том, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны. Расстояние от точки до подпространства в нормированном пространстве. Лемма о том, что расстояние от точки до подпространства ненулевое, если точка не принадлежит подпространству. Элемент наилучшего приближения в нормированных пространствах. Теорема о существовании элемента наилучшего приближения в конечномерных пространствах. Пример, показывающий, что наилучший элемент может оказаться не единственным даже в конечномерном пространстве.	2		2	2		Самостоятельная работа на тему: установление нормируемости пространства относительно предложенной нормы.	
	<b>Тема 3.3.</b> Строго нормированные пространства. Утверждение о том, что пространство непрерывных функций не является строго нормированным. Лемма Рисса.	2		2	2			
	<b>Тема 3.4.</b> Ряды в нормированных и банаховых пространствах. Теорема обратная к теореме Вейерштрасса об абсолютной сходимости. Банаховы пространства со счетным базисом и сепарабельные пространства. Множества I и II категории. Теорема Бэра – Хаусдорфа и её следствия.	2		2	2			
	<b>Итого по 3 разделу</b>	<b>8</b>		8	8			
	<b>Раздел 4.</b> Евклидовы пространства.					подготовка к лекциям 7.1.1 (с. 41-47); 7.1.2 (с. 138-151);		
	<b>Тема 4.1.</b> Пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского. Унитарные пространства. Неравенство Коши-Буняковского в унитарном пространстве. Ортогональность, ортогональные системы элементов. Примеры пространств со скалярным произведением..	2		2	2			

	Тема 4.2. Процесс ортогонализации Шмидта. Непрерывность скалярного произведения. Равенство параллелограмма	2		2	2		Самостоятельная работа нате му: ортогонализировать заданную систему непрерывных функций		
	Итого по 4 разделу	4		4	4				
ОПК-3	Раздел 5. Гильбертовы пространства					подготовка к лекциям 7.1.1 (с. 57-68); 7.1.2 (с. 138-151);			
	Тема 5.1. Определение гильбертова пространства. Доказательство того, что $l_2$ – гильбертово пространство. Расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества. Расстояние от точки до подпространства. Ортогональное дополнение.	2		2	2				
	Тема 5.2. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя. Полная ортогональная система. Равенство Парсеваля-Стеклова. Теорема о линейной оболочке ортогональной системы. Равномерная сходимости и сходимости в среднем. Ортогональные разложения в гильбертовом пространстве. Ортогональная сумма подпространств. Теорема Пифагора.	2		2	2		Построить конечное число членов разложения в ряд Фурье для заданной непрерывной функции.		
	Итого по 5 разделу	4		4	4				
	ИТОГО ЗА СЕМЕСТР	34		34	33				
	Подготовка к экзамену				36				

## 6. ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.

6.1 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности освещены в п. 11.

Перечень вопросов, выносимых на промежуточную аттестацию в форме зачета хранятся на кафедре «Прикладная математика» ауд. 1204 по адресу Н.Новгород, ул. Минина, 24 и находятся в свободном доступе.

### 6.2. Описание показателей и критериев контроля успеваемости, описание шкал оценивания

Таблица 5

Шкала оценивания	Экзамен
85-100	Отлично
70-84	Хорошо
60-69	Удовлетворительно
0-59	Неудовлетворительно

Таблица 6 –Критерии оценивания результата обучения по дисциплине и шкала оценивания

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Критерии оценивания результатов обучения			
		Оценка «неудовлетворительно» / «не зачтено» 0-59% от максимума рейтинговой оценки контроля	Оценка «удовлетворительно» / «зачтено» 60-74% от максимума рейтинговой оценки контроля	Оценка «хорошо» / «зачтено» 75-89% от максимума рейтинговой оценки контроля	Оценка «отлично» / «зачтено» 90-100% от максимума рейтинговой оценки контроля
ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	ИОПК-3.2. Использует математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	Не знает основные понятия и утверждения функционального анализа.	Может неуверенно формулировать основные определения и утверждения функционального анализа.	Может формулировать определения функционального анализа и доказывать основные теоремы функционального анализа.	Уверенно формулирует и комментирует понятия функционального анализа, чётко доказывает и применяет утверждения, доказанные в данном курсе.



**Таблица 7. Критерии оценивания**

<b>Оценка</b>	<b>Критерии оценивания</b>
Высокий уровень «5» (отлично)	оценку « <b>отлично</b> » заслуживает студент, освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал без пробелов; выполнивший все задания, предусмотренные учебным планом на высоком качественном уровне; практические навыки профессионального применения освоенных знаний сформированы.
Средний уровень «4» (хорошо)	оценку « <b>хорошо</b> » заслуживает студент, практически полностью освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не оценены максимальным числом баллов, в основном сформировал практические навыки.
Пороговый уровень «3» (удовлетворительно)	оценку « <b>удовлетворительно</b> » заслуживает студент, частично с пробелами освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, многие учебные задания либо не выполнил, либо они оценены числом баллов близким к минимальному, некоторые практические навыки не сформированы.
Минимальный уровень «2» (неудовлетворительно)	оценку « <b>неудовлетворительно</b> » заслуживает студент, не освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не выполнил, практические навыки не сформированы.

## **7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **7.1. Учебная литература, печатные издания библиотечного фонда**

Библиотечный фонд укомплектован печатными изданиями из расчета не менее 0,25 экземпляра каждого из изданий, указанных ниже на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих соответствующую дисциплину (модуль).

- 7.1.1. Треногин В.А. Функциональный анализ: Монография / В.А. Треногин. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.
- 7.1.2. Рязанцева И.П. Функциональный анализ: Учебное пособие / И. П. Рязанцева. – Нижний Новгород: НГТУ, 2011. - 261 с.

### **7.2. Справочно - библиографическая литература**

- 7.2.1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: Учебник / А.Н. Колмогоров. – Москва: Наука, 1976. – 543с.
- 7.2.2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ: Учебник/ Л.В. Канторович.- Москва: Наука, 1977.- 742 с.
- 7.2.3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: Учебное пособие/ Л.А.Люстерник. – Москва: Высшая школа, 1982.- 271 с.



### 7.3. Методические указания, рекомендации и другие материалы к занятиям

7.3.1. Треногин В.А., Писаревский Б.М. Задачи и упражнения по функциональному анализу:

Учебное пособие.-2- е изд. / В.А. Треногин. – Москва: Физматлит, 2002.-240 с.

## 8. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебный процесс по дисциплине обеспечен необходимым комплектом лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства (состав по дисциплине определен в настоящей РПД и подлежит обновлению при необходимости).

### 8.1. Перечень информационных справочных систем

Перечень программных продуктов, используемых при проведении различных видов занятий по дисциплине (открытый доступ)

1. Научная электронная библиотека E-LIBRARY.ru. – Режим доступа:

<http://elibrary.ru/defaultx.asp>

1. КонсультантПлюс [Электронный ресурс]: Справочная правовая система. - Режим доступа: <http://www.consultant.ru/>.
2. Электронная библиотечная система Поволжского государственного университета сервиса [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://elib.tolgas.ru/> - Загл. с экрана.
3. Электронно-библиотечная система Znanium.com [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://znanium.com/>. – Загл. с экрана.
4. Открытое образование [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://openedu.ru/>. - Загл с экрана.
5. *Polpred.com. Обзор СМИ. Полнотекстовая, многоотраслевая база данных (БД) [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://polpred.com/>. – Загл. с экрана.*
6. *Базы данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ РАН) по естественным, точным и техническим наукам Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://www.viniti.ru>. – Загл. с экрана.*
7. *Университетская информационная система Россия [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://uisrussia.msu.ru/>. – Загл. с экрана.*

8.2. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства необходимого для освоения дисциплины

Таблица 8. Перечень электронных библиотечных систем

№	Наименование ЭБС	Ссылка к ЭБС
1	Консультант студента	<a href="http://www.studentlibrary.ru/">http://www.studentlibrary.ru/</a>
2	Лань	<a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a>
3	Юрайт	<a href="https://biblio-online.ru/">https://biblio-online.ru/</a>
4	E-LIBRARY.ru	<a href="http://elibrary.ru/defaultx.asp">http://elibrary.ru/defaultx.asp</a>

**Таблица 9. Программное обеспечение**

<b>Программное обеспечение, используемое в университете на договорной основе</b>	<b>Программное обеспечение свободного распространения</b>
<b>1</b>	<b>2</b>
Microsoft Windows XP, Prof, S/P3 (подписка DreamSpark Premium, договор № Tr113003 от 25.09.14)	Open Office 4.1.1 (лицензия Apache License 2.0)
Microsoft Windows 7 (подписка MSDN 4689, подписка DreamSpark Premium, договор № Tr113003 от 25.09.14)	Adobe Acrobat Reader (FreeWare)
Visual Studio 2008 (подписка DreamSpark Premium, договор № Tr113003 от 25.09.14)	
Microsoft Office Professional Plus 2007 (лицензия № 42470655)	
Microsoft Office (лицензия № 43178972)	
Windows XP лиц. № 65609340	
Office 2007 лиц. № 43178971	
Microsoft Windows XP Professional (лицензия № 43178980)	
Microsoft Office 2007 (лицензия № 44804588)	
Adobe Design Premium CS 5.5.5 (лицензия № 65112135)	
Dr.Web (договор № 31704840788 от 20.03.17)	

### **8.3. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем**

В таблице 10 указан перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем, к которым обеспечен доступ (удаленный доступ). Данный перечень подлежит обновлению в соответствии с требованиями ФГОС ВО.

В данном разделе могут быть приведены ресурсы (ссылки на сайты), на которых можно найти полезную для курса информацию, в т.ч. статистические или справочные данные, учебные материалы, онлайн курсы и т.д.

**Таблица 10 - Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем**

<b>№</b>	<b>Наименование профессиональной базы данных, информационно-справочной системы</b>	<b>Доступ к ресурсу (удаленный доступ с указанием ссылки/доступ из локальной сети университета)</b>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	База данных стандартов и регламентов РОССТАНДАРТ	<a href="https://www.gost.ru/portal/gost//home/standarts">https://www.gost.ru/portal/gost//home/standarts</a>
<b>2</b>	Единый архив экономических и социологических данных	<a href="http://sophist.hse.ru/data_access.shtml">http://sophist.hse.ru/data_access.shtml</a>
<b>3</b>	Базы данных Национального совета по оценочной деятельности	<a href="http://www.ncva.ru">http://www.ncva.ru</a>
<b>4</b>	Справочная правовая система «КонсультантПлюс»	доступ из локальной сети
<b>5</b>	Информационно-справочная система «Техксперт»	доступ из локальной сети

## 9. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОВЗ

В таблице 11 указан перечень образовательных ресурсов, имеющих формы, адаптированные к ограничениям их здоровья, а также сведения о наличии специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования. При заполнении таблицы может быть использована информация, размещенная в подразделе «Доступная среда» специализированного раздела сайта НГТУ «Сведения об образовательной организации» <https://www.nntu.ru/sveden/accenv/>

**Таблица 11**– Образовательные ресурсы для инвалидов и лиц с ОВЗ

№	Перечень образовательных ресурсов, приспособленных для использования инвалидами и лицами с ОВЗ	Сведения о наличии специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования
1	ЭБС «Консультант студента»	озвучка книг и увеличение шрифта
2	ЭБС «Лань»	специальное мобильное приложение - синтезатор речи, который воспроизводит тексты книг и меню навигации
3	ЭБС «Юрайт»	версия для слабовидящих

Адаптированные образовательные программы (АОП) в образовательной организации не реализуются в связи с отсутствием в контингенте обучающихся лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ), желающих обучаться по АОП. Согласно Федеральному Закону об образовании 273-ФЗ от 29.12.2012 г. ст. 79, п.8 "Профессиональное обучение и профессиональное образование обучающихся с ограниченными возможностями здоровья осуществляются на основе образовательных программ, адаптированных при необходимости для обучения указанных обучающихся". АОП разрабатывается по каждой направленности при наличии заявлений от обучающихся, являющихся инвалидами или лицами с ОВЗ и изъявивших желание об обучении по данному типу образовательных программ.

## 10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ, НЕОБХОДИМОЕ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Учебные аудитории для проведения занятий по дисциплине оснащены оборудованием и техническими средствами обучения, состав которых определен в данном разделе.

Таблица 11 - Оснащенность аудиторий и помещений для проведения учебных занятий и самостоятельной работы студентов по дисциплине

№	Наименование аудиторий и помещений для проведения учебных занятий и самостоятельной работы	Оснащенность аудиторий и помещений	Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа
1	1	2	3
1	<b>6421</b> учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации; г. Нижний Новгород, Казанское ш., 12	Комплект демонстрационного оборудования: • ПК, с выходом на мультимедийный проектор, на базе AMD Athlon 2.8 ГГц, 4 Гб ОЗУ, 250 Гб HDD, монитор 19” – 1шт. • Мультимедийный проектор Epson- 1 шт; • Экран – 1 шт.; Набор учебно-наглядных пособий	• Microsoft Windows7 (подписка DreamSpark Premium, договор № Tr113003 от 25.09.14) • Gimp 2.8 (свободное ПО, лицензия GNU GPLv3); • Microsoft Office Professional Plus 2007 (лицензия № 42470655); • OpenOffice 4.1.1 (свободное ПО, лицензия Apache License 2.0) • Adobe Acrobat Reader (FreeWare); • 7-zip для Windows (свободно распространяемое ПО, лицензия GNU LGPL); Dr.Web (Сертификат № EL69-RV63-YMBJ-N2G7 от 14.05.19).
	<b>6543</b> компьютерный класс - помещение для СРС, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), г. Нижний Новгород, Казанское ш., 12)	• Проектор Acer – 1шт; • ПК на базе Intel Core Duo 2.93 ГГц, 2 Гб ОЗУ, 320 Гб HDD, монитор Samsung 19” – 11 шт.. ПК подключены к сети «Интернет» и обеспечивают доступ в электронную информационно-образовательную среду университета	• Microsoft Windows 7 (подписка DreamSpark Premium, договор № Tr113003 от 25.09.14); • Microsoft Office (лицензия № 43178972); • Adobe Design Premium CS 5.5.5 (лицензия № 65112135); • Adobe Acrobat Reader (FreeWare); • 7-zip для Windows (свободно распространяемое ПО, лицензия GNU LGPL); • Dr.Web (Сертификат № EL69-RV63-YMBJ-N2G7 от 14.05.19) • КонсультантПлюс (ГПД № 0332100025418000079 от 21.12.2018); Gimp 2.8 (свободное ПО, лицензия

## 11. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ОБУЧАЮЩИМСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

### 11.1. Общие методические рекомендации для обучающихся по освоению дисциплины, образовательные технологии

Дисциплина реализуется посредством проведения контактной работы с обучающимися (включая проведение текущего контроля успеваемости), самостоятельной работы обучающихся и промежуточной аттестации.

Контактная работа может быть аудиторной, внеаудиторной, а также проводиться в электронной информационно-образовательной среде университета (далее - ЭИОС). В случае проведения части контактной работы по дисциплине в ЭИОС (в соответствии с расписанием учебных занятий), трудоемкость контактной работа в ЭИОС эквивалентна аудиторной работе.

Для оценки знаний, умений, навыков и уровня сформированности компетенции по дисциплине преподаватель может применять балльно-рейтинговую систему контроля и оценку успеваемости студентов.

По итогам текущей успеваемости студенту может быть выставлена оценка по промежуточной аттестации в соответствии за набранными за семестр баллами. Студентам, набравшим в ходе текущего контроля успеваемости по дисциплине от 61 до 100 баллов и выполнившим все обязательные виды запланированных учебных занятий, по решению преподавателя без прохождения промежуточной аттестации выставляется оценка в соответствии со шкалой оценки результатов освоения дисциплины.

**Результат обучения считается сформированным на повышенном уровне**, если теоретическое содержание курса освоено полностью. При устных собеседованиях студент исчерпывающе, последовательно, четко и логически излагает учебный материал; свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами заданий, использует в ответе дополнительный материал. Все предусмотренные рабочей учебной программой задания выполнены в соответствии с установленными требованиями, студент способен анализировать полученные результаты, проявляет самостоятельность при выполнении заданий.

**Результат обучения считается сформированным на пороговом уровне**, если теоретическое содержание курса освоено полностью. При устных собеседованиях студент последовательно, четко и логически стройно излагает учебный материал; справляется с задачами, вопросами и другими видами заданий, требующих применения знаний; все предусмотренные рабочей учебной программой задания выполнены в соответствии с установленными требованиями, студент способен анализировать полученные результаты; проявляет самостоятельность при выполнении заданий

**Результат обучения считается несформированным**, если студент при выполнении заданий не демонстрирует знаний учебного материала, допускает ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет задания, не демонстрирует необходимых умений, качество выполненных заданий не соответствует установленным требованиям, качество их выполнения оценено числом баллов ниже трех по оценочной системе, что соответствует допороговому уровню..

## **11.2 Методические указания для занятий лекционного типа<sup>1</sup>**

Лекционный курс предполагает систематизированное изложение основных вопросов тематического плана. В ходе лекционных занятий раскрываются базовые вопросы в рамках каждой темы дисциплины (Таблица 4). Обозначаются ключевые аспекты тем, а также делаются акценты на наиболее сложные и важные положения изучаемого материала. Материалы лекций являются опорной основой для подготовки обучающихся к практическим занятиям / лабораторным работам и выполнения заданий самостоятельной работы, а также к мероприятиям текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

В ходе лекционных занятий рекомендуется вести конспектирование учебного материала.

## **11.3. Методические указания по самостоятельной работе обучающихся**

Самостоятельная работа обеспечивает подготовку обучающегося к аудиторным занятиям и мероприятиям текущего контроля и промежуточной аттестации по изучаемой дисциплине. Результаты этой подготовки проявляются в активности обучающегося на занятиях и в качестве выполненных практических заданий и других форм текущего контроля.

При выполнении заданий для самостоятельной работы рекомендуется проработка материалов лекций по каждой пройденной теме, а также изучение рекомендуемой литературы, представленной в Разделе 7.

В процессе самостоятельной работы при изучении дисциплины студенты могут работать на компьютере в специализированных аудиториях для самостоятельной работы (указано в таблице 11). В аудиториях имеется доступ через информационно-телекоммуникационную сеть «Интернет» к электронной информационно-образовательной среде университета (ЭИОС) и электронной библиотечной системе (ЭБС), где в электронном виде располагаются учебные и учебно-методические материалы, которые могут быть использованы для самостоятельной работы при изучении дисциплины.

Для обучающихся по заочной форме обучения самостоятельная работа является основным видом учебной деятельности.

## **11.4. Методические указания для выполнения РГР**

В процессе самостоятельной работы при изучении дисциплины студенты могут работать на компьютере в специализированных аудиториях для самостоятельной работы при выполнении РГР.

По курсу дисциплины студент должен выполнить 4 РГР по следующим темам: составить таблицу основных изучаемых пространств и их свойств, используя лекционный курс, доказательство существования неподвижной точки заданного оператора в пространстве непрерывных на отрезке функций и нахождение её методом простых итераций путем численных расчётов на ЭВМ, ортогонализация заданной системы функций с заданным весом, построение отрезка ряда Фурье по полиномам Лежандра для заданной функции, сравнение полученного результата с разложением по формуле Тейлора. Теоретическая часть по этим темам излагается в лекционном курсе дисциплины, практическая часть реализуется на практических занятиях.

## 12. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Комплект оценочных средств является неотъемлемой частью ФОС и хранится на кафедре «Прикладная математика».

**Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта в ходе текущего контроля успеваемости**

### 12.1. Вопросы для устного опроса

1. Неравенство Юнга.
2. Неравенство Гёльдера для сумм.
3. Неравенство Минковского для сумм.
4. Метрические пространства. Примеры.
5. Сходимость в метрических пространствах.
6. Примеры, что означает сходимость в конкретных метрических пространствах.
7. Ограниченные множества.
8. Предельные точки.
9. Замкнутые множества.
10. Операция замыкания. Свойства операции замыкания и замкнутых множеств.
11. Открытые множества и их свойства. (теоремы 33 и 33\*)
12. Принцип двойственности и теорема 34.
13. Примеры замкнутых и открытых множеств.
14. Предельная точка множества. Всюду плотное множество.
15. Сепарабельное метрическое пространство. Примеры сепарабельных и несепарабельных пространств.
16. Фундаментальная последовательность.
17. Полнота метрических пространств.
18. Примеры полных и неполных метрических пространств.
19. Теорема К (Аналог леммы Кантора о стягивающей системе отрезков).
20. Изометрические пространства.
21. Принцип Банаха сжимающих отображений и её следствие.

22. Теорема существования решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.
23. Компактность
24. Теорема Хаусдорфа о существовании конечной  $\epsilon$  - сети в компактном множестве.
25. Пример компактного множества в координатном гильбертовом пространстве.
26. Критерий компактности в пространстве  $C[a, b]$ . Теорема Арцела.
27. Теорема Вейерштрасса о компактности образа при непрерывном отображении.
28. Пример некомпактного множества, на котором теорема Вейерштрасса может оказаться неверной.
29. Линейные пространства. Примеры линейных пространств.
30. Линейная зависимость и линейная независимость. Базис.
31. Аффинное многообразие.
32. Изоморфизм линейных пространств.
33. Выпуклые множества в линейных пространствах.
34. Выпуклые функционалы.
35. Нормированные пространства. Банаховы пространства.
36. Примеры нормированных пространств.
37. Неравенства Гельдера и Минковского для интегралов.
38. Подчинённые и эквивалентные нормы.
39. Теорема о том, что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.
40. Расстояние от точки до подпространства в нормированном пространстве.
41. Лемма о том, что расстояние от точки до подпространства ненулевое, если точка не принадлежит подпространству.
42. Элемент наилучшего приближения в нормированных пространствах. Теорема о существовании элемента наилучшего приближения в конечномерных пространствах.
43. Пример, показывающий, что наилучший элемент может оказаться не единственным даже в конечномерном пространстве.
44. Строго нормированные пространства. Утверждение о том, что пространство непрерывных функций не является строго нормированным.
45. Лемма Рисса.



46. Ряды в нормированных и банаховых пространствах.
47. Теорема обратная к теореме Вейерштрасса об абсолютной сходимости.
48. Банаховы пространства со счетным базисом и сепарабельные пространства.
49. Множества I и II категории. Теорема Бэра – Хаусдорфа и её следствия.
50. Пространства со скалярным произведением.
51. Неравенство Коши-Буняковского.
52. Унитарные пространства.
53. Неравенство Коши-Буняковского в унитарном пространстве.
54. Ортогональность, ортогональные системы элементов.
55. Примеры пространств со скалярным произведением.
56. Процесс ортогонализации Шмидта.
57. Непрерывность скалярного произведения.
58. Равенство параллелограмма.
59. Определение гильбертова пространства.
60. Доказательство того, что  $l_2$  – гильбертово пространство.
61. Расстояние от точки до замкнутого выпуклого множества.
62. Расстояние от точки до подпространства.
63. Ортогональное дополнение.
64. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя.
65. Следствие о стремлении коэффициентов Фурье к нулю.
66. Полная ортогональная система.
67. Равенство Парсеваля-Стеклова.
68. Теорема о линейной оболочке ортогональной системы.
69. Равномерная сходимость и сходимость в среднем.
70. Ортогональные разложения в гильбертовом пространстве.
71. Ортогональная сумма подпространств.
72. Теорема Пифагора.

## 12. 2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта в ходе текущего контроля успеваемости

### 12.2.1. Практические задания

1. Во множестве натуральных чисел положим  $\rho(n, m) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = m \\ 1 + \frac{1}{n+m} & \text{при } n \neq m. \end{cases}$   
Доказать, что  $\rho(n, m)$  - метрика.
2. Пусть  $X$  - произвольное множество. Доказать, что  $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = y \\ 1 & \text{при } x \neq y \end{cases}$  определяет метрику на  $X$ .  
в пространстве  $l_2$  вычислить предел последовательности
3. Определить  $\rho(x, y)$  при  $x(t) = t, y(t) = t^2$  в  $C[0, 1]$ .
4. Обозначим через  $l_2^{(1)}$  множество числовых последовательностей  $x = \{\zeta_k\}$  таких, что  $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \zeta_k^2 < \infty$ . Доказать что  $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\zeta_k - \eta_k)^2}$  определяет метрику в  $l_2^{(1)}$ .
5. Показать на примере, что в метрическом пространстве шар большого радиуса может принадлежать шару меньшего радиуса.
6. Доказать теорему Кантора. Пусть дана последовательность  $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$  непустых замкнутых компактных множеств метрического пространства  $X$ . Тогда пересечение  $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$  непусто.
7. Доказать, что всякое компактное множество ограничено.
8. Пусть  $M = \{x(t)\}$  - ограниченное множество пространства  $C[a, b]$ . Доказать, что множество функций вида  $y(t) = \int_a^t x(s) ds$  компактно.
9. Пусть  $x_1, \dots, x_n$  - точки выпуклого множества  $W$  в линейном пространстве  $X$ , а  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - неотрицательные скаляры такие, что  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Тогда  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in W$ .
10. Доказать, что для любых элементов  $x, y \in X$  выполняется неравенство

$$\|x\| \leq \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}.$$

12. Пусть  $x_n, x, y_n, y \in X$ . Доказать, что а) если  $x_n \rightarrow x$ , то  $x_n$  ограниченная последовательность; б) если  $x_n \rightarrow x, \lambda_n \rightarrow \lambda$  ( $\lambda_n, \lambda$  - числа), то  $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$ .
13. Пусть  $x_n, x, y_n, y \in X$ . Доказать, что в) если  $x_n \rightarrow x$ , то  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ ; г) если  $x_n \rightarrow x$  и  $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ , то  $y_n \rightarrow x$ .
14. Пусть  $x_n, x, y_n, y \in X$ . Доказать, что д) если  $x_n \rightarrow x$ , то  $\|x_n - y\| \rightarrow \|x - y\|$ ; е) если  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ , то  $\|x_n - y_n\| \rightarrow \|x - y\|$ .
15. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций принять за норму элемента  $x(t): |x(a)| + |x'(a)| + \|x''\|_{C[a, b]}$ ?
16. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций принять за норму элемента  $x(t): \|x''\|_{C[a, b]} + \|x\|_{\widetilde{L}_2[a, b]}$ ?
17. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций принять за норму элемента  $x(t): |x(a)| + |x(b)| + \|x''\|_{C[a, b]}$ ?
18. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций принять за норму элемента  $x(t): |x(a)| + \|x'\|_{C[a, b]} + \|x''\|_{\widetilde{L}_2[a, b]}$ ?
19. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций принять за норму элемента  $x(t): \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$ ?

20. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций принять за норму элемента  $x(t)$ :  $\max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$  ?
21. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций принять за норму элемента  $x(t)$ :  $|x(b) - x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$  ?
22. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций принять за норму элемента  $x(t)$ :  $|x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$  ?
23. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций принять за норму элемента  $x(t)$ :  $\int_a^b |x(t)| dt + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$  ?
24. Доказать, что шар в линейном нормированном пространстве не может содержать ненулевого линейного многообразия.
25. Будет ли выпуклым в пространстве  $C[0, 1]$  множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию:

$$\int_0^1 |x(t)|^2 dt \leq 1 ?$$

26. Будет ли выпуклым в пространстве  $C[0, 1]$  множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию:

$$\max_{t \in [0, 1]} |x(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |x'(t)| \leq 1 ?$$

Будет ли выпуклым в пространстве  $C[0, 1]$  множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию:

$$\int_0^1 |x(t)| dt \leq 1 ?$$

27. Будет ли выпуклым в пространстве  $C[0, 1]$  множество непрерывных функций, удовлетворяющих условию:

$$\int_0^1 |x(t)|$$

28. Пусть  $L \subset X$  - линейное многообразие,  $L \neq X$ . Доказать, что  $L$  не содержит никакого шара.
29. Пусть  $\{x_n\} \subset X$  - фундаментальная последовательность и её подпоследовательность  $\{x_{n_k}\}$  сходится. Доказать, что вся последовательность  $\{x_n\}$  сходится.
30. Пусть  $\{x_n\} \subset X$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|$  сходится. Доказать, что  $\{x_n\}$  фундаментальная последовательность
31. Пусть  $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$  - фундаментальные последовательности. Доказать, что последовательность  $\lambda_n = \|x_n - y_n\|$  сходится.
32. В линейном пространстве вещественных, непрерывно дифференцируемых на  $[a, b]$  функций положим  $\|x\| = \left\{ \int_a^b [x^2(t) + (x'(t))^2] dt \right\}^{\frac{1}{2}}$ . Проверить аксиомы нормы.
33. В пространстве  $l_2$  с нормой  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2}$  пусть  $L$  подпространство элементов вида  $x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0, 0, \dots\}$ . Найти элемент наилучшего приближения для элемента  $z = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ .
34. В пространстве  $l_2$  с нормой  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2}$  пусть  $L$  подпространство элементов вида  $x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, 0, \xi_6, \xi_7, \dots\}$ . Найти элемент наилучшего приближения для элемента  $z = \{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots\}$

35. В пространстве  $l_2$  с нормой  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2}$  пусть  $L$  подпространство элементов вида  $x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \dots\}$ :  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$ . Найти элемент наилучшего приближения для элемента  $z = \left\{1, 1, 1, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots\right\}$ .
36. Доказать, что множество решений линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения  $n$ -ого порядка  $\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x = y(t)$ , где правая часть  $y(t)$  непрерывна на  $[a, b]$ , образует  $n$ - мерное аффинное многообразие в пространстве
37. В пространстве  $C[0, 1]$  найти расстояние от элемента  $x_0(t) = t$  до подпространства многочленов нулевой степени.
38. В пространстве  $C[0, 1]$  найти расстояние от элемента  $x_1(t) = t^2$  до подпространства многочленов первой степени.
39. Доказать, что основной параллелепипед в  $l_2$  - выпуклое множество. Основной параллелепипед – совокупность точек  $x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \dots\}$ , для которых  $|\xi_i| < \frac{1}{i}$ .
40. Доказать, что параллелепипед в  $l_2$  - выпуклое множество. Параллелепипед – совокупность точек  $x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \dots\}$ , для которых  $|\xi_i| < \frac{1}{2^{i-1}}$ .
41. Доказать, что в пространстве  $\widetilde{L}_2(a, b)$  множество  $= \{x(t) \in \widetilde{L}_2(a, b) : x(a)=x(b)=0\}$  является всюду плотным.
42. Пусть  $H^1(a, b)$  это пространство со скалярным произведением  $(x(t), y(t)) = \int_a^b [x(t)y(t) + x'(t)y'(t)]dt$ .  
Доказать, что для подпространства  $H^1_0(a, b) = \{x(t) \in H^1(a, b) : x(a) = x(b) = 0\}$  Equation.3 ортогональное подпространство Equation.3  $[H^1(a, b)]^\perp$  представляет собой двумерное подпространство функций вида  $y(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t}$ .
43. Доказать, что для множества  $M = \{x(t) \in H^1(a, b) : \int_a^b x(t)dt = 0\}$  Equation.3 ортогональным дополнением в пространстве  $H^1(a, b)$  будет множество констант.
44. Доказать, что для множества  $M_0 = \{x(t) \in \widetilde{L}_2(a, b) : \int_a^b x(t)dt = 0\}$  Equation.3 ортогональным дополнением в пространстве  $\widetilde{L}_2(a, b)$  будет множество констант.
45. Доказать, что гильбертово пространство является строго нормированным.
46. Доказать, что для того, что бы элемент  $x$  гильбертова пространства  $H$  был ортогонален подпространству  $L \subset H$ , необходимо и достаточно, что бы для любого элемента  $y \in L$  имело место неравенство  $\|x\| \leq \|x - y\|$ .
47. Пусть  $M$  – замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве  $H$ . Доказать, что в  $M$  существует и единственен элемент с наименьшей нормой.
48. Рассмотреть систему функций  $\{e^{i2\pi nx}\}$  на  $[0, 1]$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Показать, что она ортогональна в скалярном произведении  $(u, v) = \int_0^1 u \bar{v} dx$ . Найти разложение функции  $u_1 = x$ . Показать, что коэффициенты Фурье этой функции принадлежат пространству  $l_2$ .
49. Рассмотреть систему функций  $\{e^{i2\pi nx}\}$  на  $[0, 1]$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Показать, что она ортогональна в скалярном произведении  $(u, v) = \int_0^1 u \bar{v} dx$ . Найти разложение функции  $u_2 = x + iy$ . Показать, что коэффициенты Фурье этой функции принадлежат пространству  $l_2$ .

50. Рассмотреть систему функций  $\{e^{i2\pi nx}\}$  на  $[0,1]$ ,  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Показать, что она ортогональна в скалярном произведении  $(u,v) = \int_0^1 u\bar{v}dx$ . Найти разложение функции  $u_2 = xe^{ix}$ . Показать, что коэффициенты Фурье этой функции принадлежат пространству  $l_2$ .
51. Пусть  $L$  линейная оболочка элементов  $e_1 = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$ ,  $e_2 = \{0, 1, 0, 0, \dots\}$ ,  $e_3 = \{0, 0, 1, 0, 0, \dots\}$ . С помощью многочлена Фурье найти элемент наилучшего приближения для элемента  $z = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ . Проверить, что  $z$ -у ортогонален  $L$ .
52. Пусть  $L$  линейная оболочка элементов  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_6, e_7, \dots$ . С помощью многочлена Фурье найти элемент наилучшего приближения для элемента  $x = \{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots\}$ . Проверить, что  $z$ -у ортогонален  $L$ .

### 12.2.2.Комплект типовых заданий для расчетно-графических работ

#### Задание 1. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ.

Используя принцип сжимающих отображений, доказать однозначную разрешимость заданного уравнения в  $C[a,b]$ , и найти это решение приближённо с точностью 0.01. Ответ предъявить в виде графика. На том же графике также построить начальное приближение и хотя бы ещё один график промежуточной итерации.

- 1.1.  $x(t) = \frac{2}{\exp(1 + |x(t)|)} + \cos 2t$ ,  $a = -5$ ,  $b = 5$ .
- 1.2.  $x(t) - \frac{t^2}{|x(t)| + 3} = \sin 4t$ ,  $a = -5/2$ ,  $b = 5/2$ .
- 1.3.  $\frac{t}{2}\sqrt{1 + x^2(t)} - x(t) = \cos 10t$ ,  $a = -1$ ,  $b = 1$ .
- 1.4.  $\frac{t^2 - 1}{2} \arctg |x(t)| + t = x(t)$ ,  $a = -3/2$ ,  $b = 3/2$ .
- 1.5.  $x(t) - \sin^2 \frac{x(t)}{\pi} = t$ ,  $a = -4\pi$ ,  $b = 4\pi$ .
- 1.6.  $t^2 \cos \frac{x(t)}{2\pi} = \sin 7t + x(t)$ ,  $a = -2\pi/3$ ,  $b = 2\pi/3$ .
- 1.7.  $\frac{4 \sin x(t)}{t + 5} - t = x(t)$ ,  $a = 0$ ,  $b = 7$ .
- 1.8.  $x(t) - \frac{2}{x^2(t) + 2} = t$ ,  $a = -2$ ,  $b = 2$ .
- 1.9.  $x(t) + t \cos \frac{x(t)}{6} = \cos 4t$ ,  $a = -\pi$ ,  $b = \pi$ .
- 1.10.  $\frac{3}{4} \arctg |x(t)| - x(t) = t + 1$ ,  $a = -2$ ,  $b = 2$ .
- 1.11.  $x(t) - (t + 1) \cos \frac{x(t)}{6} = \sin 3t$ ,  $a = -\pi$ ,  $b = \pi$ .
- 1.12.  $\frac{3}{4} \exp(-|x(t)|) + \cos t = x(t)$ ,  $a = -5$ ,  $b = 5$ .

- 1.13.  $t^2 \sin \frac{x(t)}{5\pi} + \cos 5t = x(t), \quad a = -\pi, \quad b = \pi.$
- 1.14.  $x(t) + 3\sqrt[3]{1 + |x(t)|} = \sqrt{t+1}, \quad a = -1, \quad b = 15.$
- 1.15.  $\frac{1}{|x(t)|+1} - \sin 15t = x(t), \quad a = -2/3, \quad b = 2/3.$
- 1.16.  $x(t) - \cos 6t = \frac{t^2 + 1}{2 + |x(t)|}, \quad a = -1, \quad b = 1.$
- 1.17.  $\sqrt{t} - x(t) = \frac{6}{|x(t)|+3}, \quad a = 0, \quad b = 8. \quad \mathbf{2}$
- 1.18.  $t \operatorname{arctg} |x(t)| + x(t) = t^2, \quad a = -2/3, \quad b = 2/3.$
- 1.19.  $t\sqrt{2 + |x(t)|} = t^2 + x(t), \quad a = -1, \quad b = 2.$
- 1.20.  $\frac{\cos x(t)}{t+2} + \sin^2 t = x(t), \quad a = 0, \quad b = 13.$
- 1.21.  $x(t) = t + \frac{1}{3} \sin^2(x(t)/4), \quad a = -1, \quad b = 1.$
- 1.22.  $x(t) = t^2 + \frac{1}{4} \sin^2(x(t)/3), \quad a = -1, \quad b = 1.$
- 1.23.  $x(t) = \cos^2 t + \frac{\sin x(t)}{t+3}, \quad a = 0, \quad b = 5.$
- 1.24.  $x(t) = (t+2) \sin \frac{x(t)}{7} + \cos 3t, \quad a = -5, \quad b = \pi.$
- 1.25.  $x(t) = \sin(t+1) + \frac{3}{8} \exp(-2|x(t)|), \quad a = -5, \quad b = 5.$
- 1.26.  $x(t) = \cos(3t) + \frac{t^2 + 2}{5 + |x(t)|}, \quad a = -1, \quad b = 2.$

## Задание 2. ПРОЦЕСС ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ШМИДТА.

Для функций  $1, t, t^2, t^3, t^4$  провести процесс ортогонализации на сегменте  $[-1, 1]$ , если скалярное произведение определяется равенством

$$(x(t), y(t)) = \int_{-1}^1 p(t)x(t)y(t)dt,$$

где  $p(t)$  – заданная весовая непрерывная функция.

- |                                  |                                  |                                 |
|----------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|
| 2.1. $p(t) = 2 + 3t^2 + t^4.$    | 2.2. $p(t) = 3 + 2t^2 + t^4/3.$  | 2.3. $p(t) = 1 + 6t^2 + t^4.$   |
| 2.4. $p(t) = 1 + 3t^2 + t^4.$    | 2.5. $p(t) = 1 + 4t^2 + 6t^4.$   | 2.6. $p(t) = 1 + 3t^2 + 8t^4.$  |
| 2.7. $p(t) = 1 + t^2/3 + t^4/2.$ | 2.8. $p(t) = 1 + t^2/2 + t^4/4.$ | 2.9. $p(t) = (1 + t^2)^2.$      |
| 2.10. $p(t) = 1 + 2t^2 + 4t^4.$  | 2.11. $p(t) = 2 + t^2 + 3t^4.$   | 2.12. $p(t) = (1 - t^2)^2.$     |
| 2.13. $p(t) = 1 + 3t^2 + t^4.$   | 2.14. $p(t) = 1 + 4t^2 + t^4.$   | 2.15. $p(t) = (1 + 2t^2)^2.$    |
| 2.16. $p(t) = 3 + 3t^2 + 2t^4.$  | 2.17. $p(t) = 2 + 5t^2 + t^4.$   | 2.18. $p(t) = (2 - t^2)^2.$     |
| 2.19. $p(t) = 5 + 2t^2 + t^4.$   | 2.20. $p(t) = 4 + t^2 + 6t^4/3.$ | 2.21. $p(t) = 1 + 6t^2 + 2t^4.$ |
| 2.22. $p(t) = 1/(1 + t^2).$      | 2.23. $p(t) = 1/(1 + 2t^2).$     | 2.24. $p(t) = 1/(1 + t^2).$     |

2.25.  $p(t) = 2 + t^2 + t^4$ .

2.26.  $p(t) = 3 + 2t^2 + t^4$ .

2.27.  $p(t) = 1 + t^2 + 6t^4$ .

**Задание 3. РЯДЫ ФУРЬЕ.**

Найти наилучшее приближение заданной функции  $f(x)$  в норме пространства  $\tilde{L}^2[-1,1]$  в виде многочлена третьей степени

$$y = a_0 L_0(t) + a_1 L_1(t) + a_2 L_2(t) + a_3 L_3(t) = g(t),$$

где  $L_k(t)$  ( $k = 0,1,2,3$ ) – многочлены Лежандра. В одних осях координат построить на ЭВМ графики функций  $y = f(t)$ ,  $y = g(t)$ ,  $y = \tilde{f}_3(t)$ ,  $t \in [-1,1]$ , где функция  $\tilde{f}_3(t)$  равна первым четырём членам ряда Тейлора для функции  $f(t)$  по степеням  $t$ .

ВАРИАНТ	3.1.	3.2.	3.3.	3.4.	3.5.	3.6.	3.7.	3.8.
$f(t)$	$e^{-t}$	$e^{-t/2}$	$e^{-2t}$	$e^{-3t/2}$	$e^{-3t}$	$e^{t/4}$	$e^{-t/3}$	$e^{-2t/3}$
ВАРИАНТ	3.9.	3.10.	3.11.	3.12.	3.13.	3.14.	3.15.	3.16.
$f(t)$	$e^{-3t/4}$	$e^{5t}$	$e^{-5t}$	$e^{t/2}$	$e^{2t}$	$e^{3t}$	$e^{3t/2}$	$e^{-t/4}$
ВАРИАНТ	3.17.	3.18.	3.19.	3.20.	3.21.	3.22.	3.23.	3.24.
$F(t)$	$e^{t/3}$	$e^{-2t/3}$	$e^{3t/4}$	$e^{t/5}$	$e^{-t/5}$	$e^{5t/2}$	$e^{1-2t}$	$e^{1-t}$

## 12.2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта в ходе промежуточной аттестации по дисциплине

Форма проведения промежуточной аттестации по дисциплине: **экзамен**  
предполагается в устно-письменной форме по экзаменационным билетам.

## 12.2.1.

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования**

**«Нижегородский государственный технический университет  
им. Р.Е. Алексеева»(НГТУ)**

**Кафедра «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»  
Дисциплина «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»**

**БИЛЕТ № 1**

1. Критерий Арцела (необходимость).
2. Свойства скалярного произведения: непрерывность скалярного произведения, равенство параллелограмма.

3. В пространстве  $C[a, b]$  построить элемент наилучшего приближения в подпространстве многочленов нулевой степени для функции  $x(t) = 2t$ .

Экзаменатор

Зав. каф.  
проф. Куркин А.А.

12.2.2.

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Нижегородский государственный технический университет**  
**им. Р.Е. Алексеева»(НГТУ)**

---

---

Кафедра «Прикладная математика»

Дисциплина «ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

**БИЛЕТ № 2**

1. Определение полного пространства. Доказать полноту пространства  $C[a, b]$ .
2. Определение пространства со скалярным произведением. Доказать нормируемость этого пространства.
3. Можно ли в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций определить норму равенством  
 $\|x\| = \max\{|x(t)| \mid t \in [a, b]\}$ ?

Экзаменатор

Зав.кафедры Куркин А.А.



УТВЕРЖДАЮ:  
Директор института ИРИТ

«\_\_» \_\_\_\_\_ 202\_\_ г.

**Лист актуализации рабочей программы дисциплины**

**Б.1.Б.17 «Функциональный анализ»**

индекс по учебному плану, наименование

для подготовки бакалавров

Направление: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность: «Математическое моделирование и компьютерные технологии»

Форма обучения очная

Год начала подготовки: 2021

Курс 3

Семестр 5

а) В рабочую программу не вносятся изменения. Программа актуализирована для 20\_\_ г. начала подготовки.

б) В рабочую программу вносятся следующие изменения (указать на какой год начала подготовки):

- 1) .....
- 2) .....
- 3) .....

Разработчик (и): Рязанцева И.П., д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_  
(ФИО, ученая степень, ученое звание)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Рабочая программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры ПМ

\_\_\_\_\_ протокол № \_\_\_\_\_ от «\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Заведующий кафедрой

А.А. Куркин

**Лист актуализации принят на хранение:**

Заведующий выпускающей кафедрой ПМ «\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Методический отдел УМУ: \_\_\_\_\_