

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Нижегородский государственный технический университет**  
**им. Р.Е. Алексеева» (НГТУ)**  
**Учебно-научный институт радиоэлектроники и информационных технологий**  
**(ИРИТ)**

(Полное и сокращенное название института, реализующего данное направление)

**УТВЕРЖДАЮ:**

Директор института:

\_\_\_\_\_ А.В. Мякинков

подпись

ФИО

“ 10 ” 06 \_\_\_\_\_ 2021 г

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.В.ДВ.3.1 Линейные операторы**

((индекс и наименование дисциплины по учебному плану))

**для подготовки бакалавров**

Направление подготовки: 01.03.02. Прикладная математика и информатика

Направленность: Математическое моделирование и компьютерные технологии

Форма обучения: очная

Год начала подготовки      2021

Выпускающая кафедра      ПМ

Кафедра-разработчик      ПМ

Объем дисциплины      144/4  
часов/з.е.

Промежуточная аттестация      зачет с оценкой

Разработчик: Рязанцева И.П., д.ф.-м.н., профессор

Нижний Новгород, 2021

Рецензент : Ерофеева Л.Н., к.ф.-м.н., доцент, зав. кафедрой «Высшая

математика» НГТУ им. Р.Е. Алексеева

(ФИО, ученая степень, ученое звание)

(подпись)

«03» 06 2021г.

Рабочая программа дисциплины: разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО 3++) по направлению подготовки 01.03.02. Прикладная математика и информатика, утвержденного приказом МИНОБРНАУКИ РОССИИ от 10 января 2018 года № 9 на основании учебного плана принятого УМС НГТУ протокол от 10.06.2021 № 6.

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры протокол от 4.06.2021 № 9/1

Зав. кафедрой д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_ А.А. Куркин

(подпись)

Программа рекомендована к утверждению учебно-методическим советом института ИРИТ, Протокол № 1 от 10.06.2021 г.

Рабочая программа зарегистрирована в УМУ регистрационный № \_\_\_\_ 01.03.02\_П-46

Начальник МО \_\_\_\_\_

Заведующая отделом комплектования НТБ

\_\_\_\_\_  
(подпись)

Н.И. Кабанина

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) .....	4
2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ.....	4
3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ).....	5
4. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОП ВО.....	7
5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....	9
6. ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ .....	20
7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ .....	23
8. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ .....	24
9. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОВЗ.....	26
10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ, НЕОБХОДИМОЕ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ .....	27
11. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ОБУЧАЮЩИМСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ.....	28
12. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.....	30
13. ЛИСТ АКТУАЛИЗАЦИИ.....	42
14. РЕЦЕНЗИЯ.....	43

## **1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **1.1. Целью (целями) освоения дисциплины является:**

- знать определения линейного функционала и линейного оператора;
- знать определения нормы линейного функционала и линейного оператора и её свойства;
- знать виды линейных функционалов в основных пространствах;
- знать определения сопряжённого и самосопряжённого пространства, отношения двойственности и его свойства;
- знать определения сопряжённого, самосопряжённого, обратного и вполне непрерывного оператора и их свойства;
- знать теорему Хана-Банаха и следствия из неё;
- уметь устанавливать линейность заданного функционала и оператора;
- уметь находить оператор, сопряжённый к заданному линейному оператору, доказывать самосопряжённость линейного оператора;
- уметь находить обратный оператор для заданного линейного оператора и его норму;
- иметь навыки применения функционального анализа при постановке линейных прикладных задач в рамках изучаемых пространств;
- владеть методикой анализа свойств линейного оператора уравнения при исследовании разрешимости задачи в рамках банаховых и гильбертовых пространств.

Данная дисциплина готовит к решению профессиональной задачи по научно-исследовательскому виду деятельности (основной).

### **1.2. Задачи освоения дисциплины (модуля):**

получение и использование навыков определения типа пространства, включая метрические, нормированные и гильбертовы пространства, при постановке реальных практических линейных задач, установление класса линейных операторов, которому принадлежит оператор, описывающий задачу.

## **2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ**

Учебная дисциплина по выбору «Линейные операторы» включена в перечень вариативной части дисциплин по выбору, направленной на углубление уровня освоения компетенций. Дисциплина реализуется в соответствии с требованиями ФГОС, ОП ВО и УП по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Дисциплина базируется на следующих дисциплинах: математический

анализ, функциональный анализ, высшая алгебра, дифференциальные уравнения. Предшествующими курсами, на которых непосредственно базируется дисциплина «Линейные операторы», являются математический анализ и функциональный анализ.

Результаты обучения, полученные при освоении дисциплины, необходимы при изучении следующих дисциплин: численные методы, интегральные уравнения, теория операторов монотонного типа, методы оптимизации и при выполнении выпускной квалификационной работы.

Рабочая программа дисциплины «Линейные операторы» для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья разрабатывается индивидуально с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся.

### 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Таблица 1 – Формирование компетенций по дисциплинам

Наименование дисциплин, формирующих компетенцию совместно	Семестры, формирования дисциплины Компетенции берутся из Учебного плана по направлению подготовки бакалавра /специалиста/магистра»							
	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>Код компетенции ПКС-3</i>								
Линейные операторы						*		
Операционные системы					*			
Распределённые вычислительные системы							*	
Классическая механика			*					
Сигналы и системы			*					
Искусственный интеллект					*			
Архитектура компьютеров			*					
Виртуальные машины			*					
Подготовка к сдаче и сдача государственного Экзамена								*

Технологическая (проектно- технологическая) практика			*					
Технологическая (проектно- технологическая) практика					*			
Преддипломная практика								*
Выполнение и защита ВКР								*

#### 4. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ, СООТНЕСЕННЫХ С ПЛАНИРУЕМЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ ОСВОЕНИЯ ОП ВО

Таблица 2 – Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине			Оценочные средства	
					Текущего Контроля	Промежуточной аттестации
ПКС-3. Способен анализировать и оценивать существующие системы на соответствие требованиям	ИПКС-3.1. Анализирует и оценивает существующие математические и информационные модели	<b>Знать:</b> - понятия нормы оператора, сопряжённого и обратного оператора, сходимости операторов	<b>Уметь:</b> - вычислять нормы функционалов и операторов; - пользоваться основными понятиями и теоремами изучаемого курса для вывода тех или иных свойств и закономерностей математических структур; - формулировать в операторном виде математические задачи	<b>Владеть:</b> - понятийным аппаратом курса «Линейные операторы», используемого в современных математических моделях и задачах; - навыками применения абстрактного математического аппарата для решения задач из различных разделов математики,	Вопросы для письменного опроса. Варианты РГР	Зачёт с оценкой по накопительной системе

				физики и других наук		
--	--	--	--	----------------------	--	--

Код ПС\* и ТФ\*

06.022, С/07.6

Трудовые действия: координирование и проведение оценки готовых систем



## 5. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 5.1. Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ по семестрам

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 4 зачётных единицы - 144 часа, распределение часов по видам работ и семестрам представлено в таблице 3.

Таблица 3

**Распределение трудоёмкости дисциплины по видам работ по семестрам  
Для студентов очного обучения**

Вид учебной работы	Трудоёмкость в час	
	Всего час.	бсем
<b>Формат изучения дисциплины</b>	с использованием элементов электронного обучения	
<b>Общая трудоёмкость</b> дисциплины по учебному плану	<b>144</b>	<b>144</b>
<b>1. Контактная работа:</b>	<b>72</b>	<b>72</b>
<b>Аудиторная работа, в том числе:</b>	<b>68</b>	<b>68</b>
Занятия лекционного типа (Л)	<b>34</b>	<b>34</b>
занятия семинарского типа (ПЗ-семинары, практические занятия и др.)	<b>34</b>	<b>34</b>
лабораторные работы (ЛР)		
<b>Внеаудиторная, в том числе</b>	<b>4</b>	<b>4</b>
курсовая работа (проект) (КР/КП) (консультация, защита)		
текущий контроль, консультации по дисциплине	<b>4</b>	<b>4</b>
контактная работа на промежуточном контроле (КРА)		
<b>2. Самостоятельная работа (СРС)</b>	<b>72</b>	<b>72</b>
реферат/эссе (подготовка)		
расчётно-графическая работа (РГР) (подготовка)	<b>15</b>	<b>15</b>
контрольная работа	<b>7</b>	<b>7</b>
курсовая работа/проект (КР/КП) (подготовка)		
самостоятельное изучение разделов, самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, подготовка к лабораторным и практическим занятиям, коллоквиум и т.д.)	<b>25</b>	<b>25</b>
Подготовка к зачёту с оценкой (контроль)	<b>25</b>	<b>25</b>
Подготовка к экзамену (контроль)		

## 5.2. Содержание дисциплины, структурированное по темам

Таблица 4—Содержание дисциплины, структурированное по темам для студентов очного обучения

Планируемые (результаты контролируемые) освоения: код УК; ОПК; ПК и индикаторы достижения компетенций	Наименование разделов, тем	Виды учебной работы				Вид СРС	Наименование используемых активных и интерактивных образовательных технологий <sup>13</sup>	Реализация в рамках Практической подготовки (трудоемкость в часах) <sup>14</sup>
		Контактная работа			Самостоятельная работа студентов (СРС), час			
		Лекции, час	Лабораторн ые работы,	Практическ ие занятия,				
Семестр 6								
ПКС-3	Раздел 1. Непрерывные линейные функционалы. Теорема Хана-Банаха.					подготовка к лекциям 7.1.2 (с. 81-131);		
	Тема 1.1.Теорема о связи между непрерывностью линейного функционала и его ограниченностью. Норма линейного функцио-нала. Примеры вычисления норм линейных функционалов в гильбертовом пространстве $HиC[a,b]$ .	2		2	4			
	Тема 1.2.Леммы Хана-Банаха. Лемма Цорна.	2		2	4		СР: проверка аксиом нормы для линейного функционала.	

	<b>Тема 1.3.</b> Теорема Хана-Банаха, следствия из неё.	<b>2</b>		<b>2</b>	<b>4</b>			
	<b>Тема 1.4.</b> Вид линейного функционала в $R^n$ . Общий вид линейного функционала в $l_p$ . Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве.	<b>2</b>		<b>2</b>	<b>4</b>		Применение теоремы Хана-Банаха и следствий из них.	
	<b>Итого по 1 разделу</b>	<b>8</b>		<b>8</b>	<b>16</b>			
ПКС-3	<b>Раздел 2.</b> Сопряженные пространства. Слабая сходимость.					подготовка к лекциям 1.1 ( с. 132-135); 1.2 (с. 9-19);		
	<b>Тема 2.1.</b> Доказательство того, что норма функционала удовлетворяет аксиомам нормы. Терема о полноте $X^*$ . Определение отношения двойственности $\langle \varphi, x \rangle$ и описание его свойств. Самосопряженное пространство.	2		2	4			
	<b>Тема 2.2.</b> Пример самосопряженного пространства $R^n$ . Пример самосопряженного пространства $H$ (гильбертово). Пример самосопряженного пространства $l_2$ . Лемма о том, что $X$ является подмножеством в $X^*$ .	2		2	4			

	<b>Тема 2.3.</b> Рефлексивное пространство. Примеры рефлексивных пространств. Пример о том, что из слабой сходимости не следует сильная. Теорема об ограниченности слабо сходящейся последовательности.	2		1	4			
	<b>Тема 2.4.</b> Определение линейной оболочки. Теорема о достаточных условиях слабой сходимости. Теорема о совпадении в конечномерном пространстве слабой сходимости с сильной. Пример о слабой сходимости в гильбертовом пространстве. Определение слабой и $*$ – слабой сходимости в $X^*$ . Теорема о том, что из любой ограниченной последовательности элементов $X^*$ можно выделить $*$ – слабо сходящуюся подпоследовательность.	2		2	4			
	<b>Тема 2.5.</b> Замечание о том, что из любой ограниченной последовательности элементов в рефлексивном пространстве можно выделить слабо сходящуюся. Слабо компактное множество. Слабо замкнутое множество. Теорема о существовании сильно сходящейся последовательности линейных комбинаций из элементов слабо сходящейся последовательности.	2		1	4		Опрос по видам сходимостей в банаховом пространстве	

	<b>Итого по 2 разделу</b>	<b>10</b>		<b>8</b>	<b>20</b>			
ПКС-3	<b>Раздел 3.</b> Линейные операторы.					подготовка к лекциям 1.1( с. 36-49); 1.2(с. 132-137);		
	<b>Тема 3.1.</b> Пример линейного оператора, определяемого матрицей $m \times n$ . Пример линейного оператора, определяемого интегральным оператором. Пример линейного оператора, определяемого операцией дифференцирования. Пример линейного оператора, определяемого бесконечной матрицей. Утверждение о том, что любой линейный оператор из конечномерного пространства в конечномерное пространство является матричным.	2		2	4		Сдача коллоквиума с оценкой по теме «Линейные функционалы»	

ПКС-3	<p><b>Тема 3.2.</b> Определение ограниченного оператора. Определение нормы оператора. Основные свойства нормы оператора и формулы её вычисления. Примеры вычисления норм операторов в различных пространствах</p> <p>Пример неограниченного линейного оператора. Теоремы и связи непрерывности и ограниченности. Теорема 3 о продолжении линейного ограниченного оператора с многообразия. Определение пространства линейных непрерывных операторов <math>L(X, Y)</math>. Теорема о полноте пространства линейных непрерывных операторов <math>L(X, Y)</math>.</p>	2		3	6			
	<p><b>Тема 3.3.</b> Определение произведения линейных операторов. Определение равномерной ограниченности последовательности операторов на шаре. Принцип равномерной ограниченности. Теорема С.Банаха – Х.Штейнгауза.</p>	2		2	4		Самостоятельная работа на тему: «Нахождение нормы линейного оператора, проверка аксиом нормы».	

	<p><b>Тема 3.4.</b> Примеры операторов сопряженных к матричным и интегральным. Теорема о том, что оператор <math>A^*</math> является линейным, ограниченным и <math>\ A^*\  = \ A\ </math>. Определение оператора <math>A^{**}</math>. Утверждение о том, что в рефлексивном пространстве <math>A^{**} = A</math>.</p> <p>Определение самосопряженного оператора. Пример самосопряженного матричного оператора. Определение самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Теорема о пределе последовательности самосопряженных операторов. Теорема о норме самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.</p>	2		3	6			
	<b>Итого по 3 разделу</b>	8		10	20			
	<b>Раздел 4. Обратные операторы</b>					подготовка к лекциям 1.1 (с. 41-47); 1.2 (с. 138-151);		



	<p><b>Тема 4.1.</b> Теорема о линейности обратного оператора. Пример об операторе, обратном к интегральному оператору. Пример об операторе, обратном к дифференциальному оператору.</p> <p>Теорема о существовании обратного оператора к оператору, удовлетворяющему условию <math>\ Ax\  \geq m\ x\ </math>.</p> <p>Теорема о том, что если <math>\ A\  &lt; 1</math>, то <math>(E+A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k</math>.</p>	2		2	4		СР на тему: нахождение оператора, сопряжённого заданному линейному оператору	
	<p><b>Тема 4.2.</b> Лемма Бэра. Теорема Банаха о гомеоморфизме. Определение графика оператора. Определения замкнутого оператора. Теорема о замкнутости линейного непрерывного оператора.</p>	2		1	3			
	<p><b>Тема 4.3.</b> Теорема Банаха о замкнутом графике. Пример замкнутости оператора дифференцирования. Теорема о замкнутости <math>A^{-1}</math>. Теорема о замкнутости оператора <math>A^{-1}</math> в случае <math>A \in L(X, Y)</math>.</p>	2		1	3		СР на тему: нахождение оператора, обратного для заданного оператора	
	<b>Итого по 4 разделу</b>	<b>6</b>		<b>4</b>	<b>10</b>			
ПКС-3	<b>Раздел 5.</b> Вполне непрерывные операторы					подготовка к лекциям 1.1 (с. 57-68); 1.2 (с. 138-151);		

	<b>Тема 5.1.</b> Вполне непрерывные операторы. Пример вполне непрерывного оператора. Теорема о том, что всякий вполне непрерывный оператор отображает слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся.Теоремы о свойствах вполне непрерывных операторов.	2		4	6		Коллоквиум по теме:»Линейные операторы»ю	
	<b>Итого по 5 разделу</b>	2		4	6			
	<b>ИТОГО ЗА СЕМЕСТР</b>	<b>34</b>		<b>34</b>	<b>72</b>			
	Подготовка к зачёту с оценкой				25			

## 6. ТЕКУЩИЙ КОНТРОЛЬ УСПЕВАЕМОСТИ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ.

6.1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности освещены в п. 11.

Перечень вопросов, выносимых на промежуточную аттестацию в форме зачета хранятся на кафедре «Прикладная математика» ауд. 1204 по адресу Н.Новгород, ул. Минина, 24 и находятся в свободном доступе.

6.2. Описание показателей и критериев контроля успеваемости, описание шкал оценивания

Таблица 5

Шкала Оценивания	Зачет с оценкой
85-100	Отлично
70-84	Хорошо
60-69	Удовлетворительно
0-59	Неудовлетворительно

**Таблица 6 –Критерии оценивания результата обучения по дисциплине и шкала оценивания**

<b>Код и наименование компетенции</b>	<b>Код и наименование индикатора достижения компетенции</b>	<b>Критерии оценивания результатов обучения</b>			
		Оценка «неудовлетворительно» / «не зачтено» 0-59% от максимума рейтинговой оценки контроля	Оценка «удовлетворительно» / «зачтено» 60-74% от максимума рейтинговой оценки контроля	Оценка «хорошо» / «зачтено» 75-89% от максимума рейтинговой оценки контроля	Оценка «отлично» / «зачтено» 90-100% от максимума рейтинговой оценки контроля
ПКС-3. Способен анализировать и оценивать существующие системы на соответствие требованиям	ИПКС-3.1. Анализирует и оценивает существующие математические и информационные модели	Не знает основные понятия и утверждения теории линейных функционалов и теории линейных операторов.	Может неуверенно формулировать основные определения и утверждения теории линейных функционалов и теории линейных операторов.	Может формулировать определения утверждения теории линейных функционалов и теории линейных операторов, а также доказывать основные теоремы функционального анализа.	Уверенно формулирует и комментирует понятия утверждения теории линейных функционалов и теории линейных операторов, чётко доказывает и применяет утверждения, доказанные в данном курсе.



**Таблица 7 - Критерии оценивания**

<b>Оценка</b>	<b>Критерии оценивания</b>
Высокий уровень «5» (отлично)	оценку <b>«отлично»</b> заслуживает студент, освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал без пробелов; выполнивший все задания, предусмотренные учебным планом на высоком качественном уровне; практические навыки профессионального применения освоенных знаний сформированы.
Средний уровень «4» (хорошо)	оценку <b>«хорошо»</b> заслуживает студент, практически полностью освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не оценены максимальным числом баллов, в основном сформировал практические навыки.
Пороговый уровень «3» (удовлетворительно)	оценку <b>«удовлетворительно»</b> заслуживает студент, частично с пробелами освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, многие учебные задания либо не выполнил, либо они оценены числом баллов близким к минимальному, некоторые практические навыки не сформированы.
Минимальный уровень «2» (неудовлетворительно)	оценку <b>«неудовлетворительно»</b> заслуживает студент, не освоивший знания, умения, компетенции и теоретический материал, учебные задания не выполнил, практические навыки не сформированы.

## 7 . УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 7.1. Учебная литература, печатные издания библиотечного фонда

Библиотечный фонд укомплектован печатными изданиями из расчета не менее 0,25 экземпляра каждого из изданий, указанных ниже на каждого обучающегося из числа лиц, одновременно осваивающих соответствующую дисциплину (модуль).

7.1.1. Треногин В.А. Функциональный анализ: Монография / В.А. Треногин. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.

7.1.2. Рязанцева И.П. Функциональный анализ: Учебное пособие / И. П. Рязанцева. – Нижний Новгород: НГТУ, 2011. - 261 с.

### 7.2. Справочно - библиографическая литература

7.2.1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального

анализа: Учебник / А.Н. Колмогоров. – Москва: Наука, 1976. – 543 с.

7.2.2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ: Учебник / Л.В. Канторович.- Москва: Наука, 1977.- 742 с.

7.2.3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: Учебное пособие / Л.А. Люстерник. – Москва: Высшая школа, 1982.- 271 с.

### 7.3. Методические указания, рекомендации и другие материалы к занятиям

7.3.1. Треногин В.А., Писаревский Б.М. Задачи и упражнения по функциональному анализу: Учебное пособие.-2- е изд. / В.А. Треногин. – Москва: Физматлит, 2002.-240 с.

## 8. ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебный процесс по дисциплине обеспечен необходимым комплектом лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства (состав по дисциплине определен в настоящей РПД и подлежит обновлению при необходимости).

### 8.1. Перечень информационных справочных систем

Перечень программных продуктов, используемых при проведении различных видов занятий по дисциплине (открытый доступ)

1. Научная электронная библиотека E-LIBRARY.ru. – Режим доступа: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>

1. КонсультантПлюс [Электронный ресурс]: Справочная правовая система. - Режим доступа: <http://www.consultant.ru/>.
2. [Электронная библиотечная система Поволжского государственного университета сервиса](http://elib.tolgas.ru/) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://elib.tolgas.ru/> - Загл. с экрана.
3. Электронно-библиотечная система Znanium.com [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://znanium.com/>. – Загл. с экрана.
4. Открытое образование [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://openedu.ru/>. - Загл с экрана.
5. *Polpred.com. Обзор СМИ. Полнотекстовая, многоотраслевая база данных (БД) [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://polpred.com/>. – Загл. с экрана.*
6. *Базы данных Всероссийского института научной и технической информации (ВИНИТИ РАН) по естественным, точным и техническим наукам [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://www.viniti.ru>. – Загл. с экрана.*
7. *Университетская информационная система Россия [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://uisrussia.msu.ru/>. – Загл. с экрана.*

## 8.2. Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства необходимого для освоения дисциплины

Таблица 8 - Перечень электронных библиотечных систем

№	Наименование ЭБС	Ссылка к ЭБС
1	Консультант студента	<a href="http://www.studentlibrary.ru/">http://www.studentlibrary.ru/</a>
2	Лань	<a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a>
3	Юрайт	<a href="https://biblio-online.ru/">https://biblio-online.ru/</a>
4	E-LIBRARY.ru	<a href="http://elibrary.ru/defaultx.asp">http://elibrary.ru/defaultx.asp</a>

Таблица 9 - Программное обеспечение

Программное обеспечение, используемое в университете на договорной основе	Программное обеспечение свободного распространения
1	2
Microsoft Windows XP, Prof, S/P3 (подписка DreamSpark Premium, договор № Tr113003 от 25.09.14)	Open Office 4.1.1 (лицензия Apache License 2.0)
Microsoft Windows 7 (подписка MSDN 4689, подписка DreamSpark Premium, договор № Tr113003 от 25.09.14)	Adobe Acrobat Reader (FreeWare)
Visual Studio 2008 (подписка DreamSpark Premium, договор № Tr113003 от 25.09.14)	
Microsoft Office Professional Plus 2007 (лицензия № 42470655)	
Microsoft Office (лицензия № 43178972)	
Windows XP лиц. № 65609340	
Office 2007 лиц. № 43178971	
Microsoft Windows XP Professional (лицензия № 43178980)	
Microsoft Office 2007 (лицензия № 44804588)	



Adobe Design Premium CS 5.5.5 (лицензия № 65112135)	
Dr. Web (договор № 31704840788 от 20.03.17)	

### 8.3. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем

В таблице 10 указан перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем, к которым обеспечен доступ (удаленный доступ). Данный перечень подлежит обновлению в соответствии с требованиями ФГОС ВО.

**Таблица 10** - Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем

№	Наименование профессиональной базы данных, информационно-справочной системы	Доступ к ресурсу (удаленный доступ с указанием ссылки/доступ из локальной сети университета)
1	2	3
1	База данных стандартов и регламентов РОССТАНДАРТ	<a href="https://www.gost.ru/portal/gost//home/standarts">https://www.gost.ru/portal/gost//home/standarts</a>
2	Единый архив экономических и социологических данных	<a href="http://sophist.hse.ru/data_access.shtml">http://sophist.hse.ru/data_access.shtml</a>
3	Базы данных Национального совета по оценочной деятельности	<a href="http://www.ncva.ru">http://www.ncva.ru</a>
4	Справочная правовая система «КонсультантПлюс»	доступ из локальной сети
5	Информационно-справочная система «Техксперт»	доступ из локальной сети

## 9. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ РЕСУРСЫ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОВЗ

В таблице 11 указан перечень образовательных ресурсов, имеющих формы, адаптированные к ограничениям их здоровья, а также сведения о наличии специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования. При заполнении таблицы может быть использована информация, размещенная в подразделе «Доступная среда» специализированного раздела сайта НГТУ «Сведения об образовательной организации» <https://www.nntu.ru/sveden/accenv/>

**Таблица 11– Образовательные ресурсы для инвалидов и лиц с ОВЗ**

<b>№</b>	<b>Перечень образовательных ресурсов, приспособленных для использования инвалидами и лицами с ОВЗ</b>	<b>Сведения о наличии специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования</b>
1	ЭБС «Консультант студента»	озвучка книг и увеличение шрифта
2	ЭБС «Лань»	специальное мобильное приложение - синтезатор речи, который воспроизводит тексты книг и меню навигации
3	ЭБС «Юрайт»	версия для слабовидящих

Адаптированные образовательные программы (АОП) в образовательной организации не реализуются в связи с отсутствием в контингенте обучающихся лиц с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ), желающих обучаться по АОП. Согласно Федеральному Закону об образовании 273-ФЗ от 29.12.2012 г. ст. 79, п.8 "Профессиональное обучение и профессиональное образование обучающихся с ограниченными возможностями здоровья осуществляются на основе образовательных программ, адаптированных при необходимости для обучения указанных обучающихся". АОП разрабатывается по каждой направленности при наличии заявлений от обучающихся, являющихся инвалидами или лицами с ОВЗ и изъявивших желание об обучении по данному типу образовательных программ.

## 10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ, НЕОБХОДИМОЕ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Учебные аудитории для проведения занятий по дисциплине оснащены оборудованием и техническими средствами обучения, состав которых определен в данном разделе.

**Таблица 11 - Оснащенность аудиторий и помещений для проведения учебных занятий и самостоятельной работы студентов по дисциплине**

<b>№</b>	<b>Наименование аудиторий и помещений для проведения учебных занятий и самостоятельной работы</b>	<b>Оснащенность аудиторий помещений и помещений</b>	<b>Перечень лицензионного программного обеспечения. Реквизиты подтверждающего документа</b>
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>

1	<b>6421</b> учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации; г. Нижний Новгород, Казанское ш., 12	Комплект демонстрационного оборудования: • ПК, с выходом на мультимедийный проектор, на базе AMD Athlon 2.8 ГГц, 4 Гб ОЗУ, 250 Гб HDD, монитор 19" – 1 шт. • Мультимедийный проектор Epson- 1 шт; • Экран – 1 шт.; Набор учебно-наглядных пособий	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Microsoft Windows7 (подписка DreamSpark Premium, договор № Tr113003 от 25.09.14)</li> <li>• Gimp 2.8 (свободное ПО, лицензия GNU GPLv3);</li> <li>• Microsoft Office Professional Plus 2007 (лицензия № 42470655);</li> <li>• OpenOffice 4.1.1 (свободное ПО, лицензия ApacheLicense 2.0)</li> <li>• Adobe Acrobat Reader (FreeWare);</li> <li>• 7-zip для Windows (свободно распространяемое ПО, лицензия GNU LGPL);</li> </ul> Dr.Web (Сертификат № EL69-RV63-YMBJ-N2G7 от 14.05.19).
	<b>6543</b> компьютерный класс - помещение для СРС, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), г. Нижний Новгород, Казанское ш., 12)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Проектор Accer – 1 шт;</li> <li>• ПК на базе Intel Core Duo 2.93 ГГц, 2 Гб ОЗУ, 320 Гб HDD, монитор Samsung 19" – 11 шт..</li> </ul> ПК подключены к сети «Интернет» и обеспечивают доступ в электронную информационно-образовательную среду университета	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Microsoft Windows 7 (подписка DreamSpark Premium, договор № Tr113003 от 25.09.14);</li> <li>• Microsoft Office (лицензия № 43178972);</li> <li>• Adobe Design Premium CS 5.5.5 (лицензия № 65112135);</li> <li>• Adobe Acrobat Reader (FreeWare);</li> <li>• 7-zip для Windows (свободно распространяемое ПО, лицензия GNU LGPL);</li> <li>• Dr.Web (Сертификат № EL69-RV63-YMBJ-N2G7 от 14.05.19)</li> <li>• КонсультантПлюс (ГПД № 0332100025418000079 от 21.12.2018);</li> <li>• Gimp 2.8 (свободное ПО, лицензия GNU GPLv3)</li> </ul>

## 11. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ОБУЧАЮЩИМСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

### 11.1. Общие методические рекомендации для обучающихся по освоению дисциплины, образовательные технологии

Дисциплина реализуется посредством проведения контактной работы с обучающимися (включая проведение текущего контроля успеваемости), самостоятельной работы обучающихся и промежуточной аттестации.

Контактная работа может быть аудиторной, внеаудиторной, а также проводиться в электронной информационно-образовательной среде университета (далее - ЭИОС). В случае проведения части контактной работы по дисциплине в ЭИОС (в соответствии с расписанием учебных занятий), трудоемкость контактной работа в ЭИОС эквивалентна аудиторной работе.

Для оценки знаний, умений, навыков и уровня сформированности компетенции по дисциплине преподаватель может применять балльно-рейтинговую систему контроля и оценку успеваемости студентов.

По итогам текущей успеваемости студенту может быть выставлена оценка по промежуточной аттестации в соответствии с набранными за семестр баллами. Студентам, набравшим в ходе текущего контроля успеваемости по дисциплине от 61 до 100 баллов и выполнившим все обязательные виды запланированных учебных занятий, по решению преподавателя без прохождения промежуточной аттестации выставляется оценка в соответствии со шкалой оценки результатов освоения дисциплины.

**Результат обучения считается сформированным на повышенном уровне**, если теоретическое содержание курса освоено полностью. При устных собеседованиях студент исчерпывающе, последовательно, четко и логически излагает учебный материал; свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами заданий, использует в ответе дополнительный материал. Все предусмотренные рабочей учебной программой задания выполнены в соответствии с установленными требованиями, студент способен анализировать полученные результаты, проявляет самостоятельность при выполнении заданий.

**Результат обучения считается сформированным на пороговом уровне**, если теоретическое содержание курса освоено полностью. При устных собеседованиях студент последовательно, четко и логически стройно излагает учебный материал; справляется с задачами, вопросами и другими видами заданий, требующих применения знаний; все предусмотренные рабочей учебной программой задания выполнены в соответствии с установленными требованиями, студент способен анализировать полученные результаты; проявляет самостоятельность при выполнении заданий.

**Результат обучения считается несформированным**, если студент при выполнении заданий не демонстрирует знаний учебного материала, допускает ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет задания, не демонстрирует необходимых умений, качество выполненных заданий не соответствует установленным требованиям, качество их выполнения оценено числом баллов ниже трех по оценочной системе, что соответствует допороговому уровню..

## **11.2 Методические указания для занятий лекционного типа**

Лекционный курс предполагает систематизированное изложение основных вопросов тематического плана. В ходе лекционных занятий раскрываются базовые вопросы в рамках каждой темы дисциплины (Таблица 4). Обозначаются ключевые аспекты тем, а также делаются акценты на наиболее сложные и важные положения изучаемого материала. Материалы лекций являются опорной основой для подготовки обучающихся к практическим занятиям и выполнения заданий самостоятельной работы, а также к мероприятиям текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по дисциплине.

В ходе лекционных занятий рекомендуется вести конспектирование учебного материала.

## **11.3. Методические указания по самостоятельной работе обучающихся**

Самостоятельная работа обеспечивает подготовку обучающегося к аудиторным занятиям и мероприятиям текущего контроля и промежуточной аттестации по изучаемой дисциплине. Результаты этой подготовки проявляются в активности обучающегося на занятиях и в качестве выполненных практических заданий и других форм текущего

контроля.

При выполнении заданий для самостоятельной работы рекомендуется проработка материалов лекций по каждой пройденной теме, а также изучение рекомендуемой литературы, представленной в Разделе 7.

В процессе самостоятельной работы при изучении дисциплины студенты могут работать на компьютере в специализированных аудиториях для самостоятельной работы (указано в таблице 11). В аудиториях имеется доступ через информационно-телекоммуникационную сеть «Интернет» к электронной информационно-образовательной среде университета (ЭИОС) и электронной библиотечной системе (ЭБС), где в электронном виде располагаются учебные и учебно-методические материалы, которые могут быть использованы для самостоятельной работы при изучении дисциплины.

Для обучающихся по заочной форме обучения самостоятельная работа является основным видом учебной деятельности.

#### **11.4. Методические указания для выполнения РГР**

В процессе самостоятельной работы при изучении дисциплины студенты могут работать на компьютере в специализированных аудиториях для самостоятельной работы при выполнении РГР.

По курсу дисциплины студент выполняет 2 РГР по следующим темам: линейные функционалы, линейные операторы. Для выполнения этих работ студент должен уметь находить норму линейного функционала и норму линейного оператора, знать методику построения оператора, сопряжённого к заданному, и уметь устанавливать самосопряжённость линейного оператора, иметь навыки построения оператора, обратного к заданному линейному оператору.

Теоретическая часть по этим темам излагается в лекционном курсе дисциплины, практическая часть реализуется на практических занятиях.

## **12. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

Комплект оценочных средств является неотъемлемой частью ФОС и хранится на кафедре «Прикладная математика».

### **12.1. Вопросы для устного опроса**

1. Теорема о связи между непрерывностью линейного функционала и его ограниченностью.
2. Норма линейного функционала.
3. Примеры вычисления норм линейных функционалов в гильбертовом пространстве и в пространстве непрерывных функций.
4. Леммы Хана-Банаха. Лемма Цорна.
5. Теорема Хана-Банаха, следствия из неё.

6. Вид линейного функционала в  $R^n$ . Общий вид линейного функционала в  $l_p$ . Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве.
7. Сопряженные пространства. Слабая сходимость.
8. Доказательство того, что норма функционала удовлетворяет аксиомам нормы. Теорема о полноте  $X^*$ .
9. Определение отношения двойственности  $\langle \varphi, x \rangle$  и описание его свойств. Самосопряженное пространство.
10. Пример самосопряженного пространства  $R^n$ . Пример самосопряженного пространства  $H$  (гильбертово). Пример самосопряженного пространства  $l_p$ .
11. Лемма о том, что  $X$  является подмножеством в  $X^*$ .
12. Рефлексивное пространство. Примеры рефлексивных пространств.
13. Пример о том, что из слабой сходимости не следует сильная. Теорема об ограниченности слабо сходящейся последовательности.
14. Определение линейной оболочки. Теорема о достаточных условиях слабой сходимости. Теорема о совпадении в конечномерном пространстве слабой сходимости с сильной.
15. Пример о слабой сходимости в гильбертовом пространстве. Определение слабой и  $*$  – слабой сходимости в  $X^*$ . Теорема о том, что из любой ограниченной последовательности элементов  $X^*$  можно выделить  $*$  – слабо сходящуюся подпоследовательность.
16. Определение линейной оболочки. Теорема о достаточных условиях слабой сходимости. Теорема о совпадении в конечномерном пространстве слабой сходимости с сильной.
17. Пример о слабой сходимости в гильбертовом пространстве. Определение слабой и  $*$  – слабой сходимости в  $X^*$ .
18. Теорема о том, что из любой ограниченной последовательности элементов  $X^*$  можно выделить  $*$  – слабо сходящуюся подпоследовательность.
19. Замечание о том, что из любой ограниченной последовательности элементов в рефлексивном пространстве можно выделить слабо сходящуюся.
20. Слабо компактное множество. Слабо замкнутое множество. Теорема о существовании сильно сходящейся последовательности линейных комбинаций из элементов слабо сходящейся последовательности.
21. Пример линейного оператора, определяемого матрицей  $m \times n$ . Пример линейного оператора, определяемого интегральным оператором. Пример линейного оператора, определяемого операцией дифференцирования. Пример линейного оператора, определяемого бесконечной матрицей. Утверждение о том, что любой линейный

оператор из конечномерного пространства в конечномерное пространство является матричным.

22. Определение ограниченного оператора. Определение нормы оператора. Основные свойства нормы оператора и формулы её вычисления. Примеры вычисления норм операторов в различных пространствах.

23. Пример неограниченного линейного оператора. Теоремы и связи непрерывности и ограниченности. Теорема 3 о продолжении линейного ограниченного оператора с многообразия. Определение пространства линейных непрерывных операторов  $L(X, Y)$ . Теорема о полноте пространства линейных непрерывных операторов  $L(X, Y)$ .

24. Определение произведения линейных операторов. Определение равномерной ограниченности последовательности операторов на шаре. Принцип равномерной ограниченности. Теорема С. Банаха – Х. Штейнгауза.

25. Примеры операторов сопряженных к матричным и интегральным. Теорема о том, что оператор  $A^*$  является линейным, ограниченным и  $\|A^*\| = \|A\|$ . Определение оператора  $A^{**}$ . Утверждение о том, что в рефлексивном пространстве  $A^{**} = A$ .

26. Определение самосопряженного оператора. Пример самосопряженного матричного оператора. Определение самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Теорема о пределе последовательности самосопряженных операторов. Теорема о норме самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

27. Теорема о линейности обратного оператора. Пример об операторе, обратном к интегральному оператору. Пример об операторе, обратном к дифференциальному оператору.

28. Теорема о существовании обратного оператора к оператору, удовлетворяющему условию  $\|Ax\| \geq m\|x\|$ . Теорема о том, что если  $\|A\| < 1$ , то  $(E+A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k A^k$ .

29. Лемма Бэра. Теорема Банаха о гомеоморфизме. Определение графика оператора. Определения замкнутого оператора. Теорема о замкнутости линейного непрерывного оператора.

30. Теорема Банаха о замкнутом графике. Пример замкнутости оператора дифференцирования. Теорема о замкнутости  $A^{-1}$ . Теорема о замкнутости оператора  $A^{-1}$  в случае, если  $A \in L(X, Y)$ .

**12. 2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта в ходе текущего контроля успеваемости (задания для РГР)**

### **Практические задания**

#### **А) Нахождение нормы линейного функционала**

1. Доказать, что следующий функционал

$$\varphi(x) = 0,2[x(-0,1) + x(0,1) - 2x(0)]$$

в пространстве  $C[-1, 1]$  является линейным, непрерывным и найти его норму.

2. Доказать, что следующий функционал

$$\varphi(x) = \int_{-1}^1 \tau x(\tau) d\tau$$

в пространстве  $\tilde{L}_2[-1, 1]$  является линейным, непрерывным и найти его норму.

3. Доказать, что следующий функционал

$$\varphi(x) = 0,2x(-1) + 0,1x(-0,5) - x(0) + 0,3x(0,5) + 0,4x(1)$$

в пространстве  $C[-1, 1]$  является линейным, непрерывным и найти его норму.

4. Доказать, что следующий функционал

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k}, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$$

в пространстве  $l_2$  является линейным, непрерывным и найти его норму.

5. Доказать, что следующий функционал

$$\varphi(x) = \int_{-1}^1 \tau^{-1/3} x(\tau) d\tau$$

в пространстве  $\tilde{L}_2[-1, 1]$  является линейным, непрерывным и найти его норму.

6. Доказать, что следующий функционал

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k}, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$$

в пространстве  $l_2$  является линейным, непрерывным и найти его норму.

7. Доказать, что следующий функционал

$$\varphi(x) = \xi_1 + \xi_2, \quad x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$$

в пространстве  $l_2$  является линейным, непрерывным и найти его норму.

8. Доказать, что следующий функционал

$$\varphi(x) = \int_{-1}^1 \tau x(\tau) d\tau$$

в пространстве  $C[-1, 1]$  является линейным, непрерывным и найти его норму.

9. Доказать, что следующий функционал



$$\varphi(x) = \int_0^1 x(\tau) d\tau$$

в пространстве  $C[0, 1]$  является линейным, непрерывным и найти его норму.

10. Доказать, что следующий функционал

$$\varphi(x) = \int_{-1}^0 x(\tau) d\tau - \int_0^1 x(\tau) d\tau$$

в пространстве  $C[-1, 1]$  является линейным, непрерывным и найти его норму.

11. Доказать, что следующие функционалы

$$a) \varphi(x) = \int_{-1}^1 x(\tau) d\tau - x(0), \quad b) \varphi(x) = \int_{-1}^1 x(\tau) d\tau$$

в пространстве  $C[-1, 1]$  являются линейными, непрерывными и найти их нормы.

12. Доказать, что следующий функционал

$$\varphi(x) = 0,5[x(1) + x(1)]$$

в пространстве  $C[-1, 1]$  является линейным, непрерывным и найти его норму.

t

13. Доказать, что следующий функционал

$$\varphi(x) = 5[x(1) - x(0)]$$

в пространстве  $C[-1, 1]$  является линейным, непрерывным и найти его норму.

14. Будут ли ограничены в пространстве  $C[0, 1]$  следующие линейные функционалы:

$$a) \varphi(x) = \int_0^1 x(\sqrt{t}) dt, \quad b) \varphi(x) = \int_0^1 x(t^2) dt, \quad c) \varphi(x) = \int_0^1 x(t^n) dt.$$

15. Пусть функционалы  $f_n : L^2[-1, 1] \rightarrow R$  определены равенством

$$\langle f_n, x \rangle = \int_{-1}^1 x(t) \cos(n\pi t) dt.$$

Доказать, что

а)  $f_n$  – линейный ограниченный функционал;

б)  $\{f_n\}$  слабо сходится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ ;

в) верно ли, что  $f_n \rightarrow 0$ ?

## Б) Нахождение нормы линейного оператора

1. Доказать, что следующий оператор

$$A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$$

является линейным ограниченным, и найти его норму.

2. Доказать, что следующий оператор

$$A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], \quad Ax(t) = x(t^2)$$

является линейным ограниченным, и найти его норму.

3. Доказать, что следующий оператор

$$A: C[-1,1] \rightarrow C[0,1], \quad Ax(t) = tx(t)$$

является линейным ограниченным, и найти его норму.

4. Доказать, что следующий оператор

$$A: C^1[0,1] \rightarrow C[0,1], \quad Ax(t) = tx(t)$$

является линейным ограниченным, и найти его норму.

5. Доказать, что следующий оператор

$$A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], \quad Ax(t) = t^2 x(0)$$

является линейным ограниченным, и найти его норму.

6. Доказать, что следующий оператор

$$A: C^1[0,1] \rightarrow C[0,1], \quad Ax(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

является линейным ограниченным, и найти его норму.

7. Доказать, что следующий оператор

$$A: C[a,b] \rightarrow C[a,b], \quad Ax(t) = \int_a^b x(s)ds$$

является линейным ограниченным, и найти его норму.

8. Доказать, что следующий оператор

$$A: C[a,b] \rightarrow C[a,b], \quad Ax(t) = \int_a^b e^{t-s} x(s)ds$$

является линейным ограниченным, и найти его норму.

9. Доказать, что следующий оператор

$$A: C[0,1] \rightarrow C[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^1 \sin \pi(t-s)x(s)ds$$

является линейным ограниченным, и найти его норму.

10. Доказать, что следующий оператор

$$A: C[a,b] \rightarrow C[a,b], \quad Ax(t) = t^2 x(a)$$

является линейным ограниченным, и найти его норму.

11. Доказать, что следующий оператор

$$A: C[a,b] \rightarrow C[a,b], \quad Ax(t) = \varphi(t)x(t), \quad \varphi(t) \in C[a,b]$$

является линейным ограниченным, и найти его норму.

12. Установить, является ли следующий оператор

$$A: C[a,b] \rightarrow C[a,b], \quad Ax(t) = t \cos x(t)$$

линейным, непрерывным, ограниченным.

13. Доказать, что следующий оператор

$$A: l^2 \rightarrow l^2, \quad Ax = \{\alpha_n x_n\}, \quad x = \{x_n\}, \quad \text{причём существует } \alpha = \sup |\alpha_n| < \infty.$$

является линейным ограниченным, и найти его норму.

14. Доказать, что следующий оператор

$$A: \tilde{L}^2[a,b] \rightarrow \tilde{L}^2[a,b], \quad Ax(t) = t \int_a^b x(\tau) d\tau$$

является линейным ограниченным, и найти его норму.

## В) Сопряжённый оператор

1. Для линейного оператора  $A: \tilde{L}^2[0,1] \rightarrow \tilde{L}^2[0,1]$ ,  $Ax(t) = tx(t)$  найти сопряжённый к нему оператор.

2. Для линейного оператора

$$A: \tilde{L}^2[0,1] \rightarrow \tilde{L}^2[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^1 tx(s)ds$$

найти сопряжённый к нему оператор.

3. Для линейного оператора

$$A: \tilde{L}^2[0,1] \rightarrow \tilde{L}^2[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^1 sx(s)ds$$

найти сопряжённый к нему оператор.

4. Для линейного оператора

$$A: \tilde{L}^2[0,1] \rightarrow \tilde{L}^2[0,1], \quad Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$$

найти сопряжённый к нему оператор.

5. Для линейного оператора

$$A: l^2 \rightarrow l^2, \quad Ax = \{x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots\}, \quad x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

найти сопряжённый к нему оператор.

6. Для линейного оператора

$$A: l^2 \rightarrow l^2, \quad Ax = \{0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}, \quad x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

найти сопряжённый к нему оператор.

7. Для линейного оператора

$$A: l^2 \rightarrow l^2, \quad Ax = \{x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}, \quad x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

найти сопряжённый к нему оператор.

8. Для линейного оператора

$$A: l^2 \rightarrow l^2, \quad Ax = \{0, 0, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}, \quad x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$$

найти сопряжённый к нему оператор.

9. Для линейного оператора

$$A: l^2 \rightarrow l^2, \quad Ax = \{\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n, \dots\}, \quad x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, |\lambda_n| \leq 1$$

найти сопряжённый к нему оператор.

10. Доказать, что  $\|A^2\| = \|A\|^2$  для самосопряжённого оператора  $A: H \rightarrow H$ .

11. Пусть  $A$  и  $B$  – самосопряжённые операторы из  $H$  в  $H$ , причём  $A$  – положительный оператор. Доказать, что  $BA B$  является положительным оператором.

## Г) Обратный оператор

1. Линейный оператор  $A: X \rightarrow Y$ , и существует  $A^{-1}$ . Доказать, что совокупности элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n; Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n$  линейно зависимы или независимы одновременно.

2. Операторы  $A$  и  $B$  действуют из  $X$  в  $X$ ,  $D(A)=D(B)=X$ , и верны равенства  $AB+A+E=0$ ,  $BA+A+E=0$ . Найти оператор, обратный к  $A$ .

3. Имеет место равенство  $AB=BA$ , где  $A$  и  $B$  - линейные операторы,  $A^{-1}$  существует. Доказать, что  $A^{-1}B=BA^{-1}$ .

4. Пусть оператор  $A: X \rightarrow X$  является линейным оператором и удовлетворяет равенству

$$E + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \dots + \lambda_n A^n = 0 \quad \lambda_k \in R, k = \overline{1, n},$$

$A^{-1}$  существует. Найти  $A^{-1}$ .

5. Найти оператор  $A^{-1}$ , если

$$Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau + x(t), \quad A: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1].$$

6. Показать ограниченность (а значит, и непрерывность) линейного оператора  $A^{-1}$ , найденного в предыдущем примере 5.

7. Оператор  $A: C[0, 1] \rightarrow C^2[0, 1]$  определяется равенством

$$Ax(t) = x''(t) + x(t).$$

Найти оператор  $A^{-1}$  и показать его ограниченность.

8. Оператор  $A: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  определяется равенством

$$Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s) ds.$$

Найти оператор  $A^{-1}$ .

9. Оператор  $A: C[0, 1] \rightarrow C^2[0, 1]$  определяется равенством

$$Ax(t) = \int_0^1 e^{-|s-t|} x(s) ds = y(t). \quad (*)$$

тор  $A^{-1}$ .

**Указание.** Поскольку

$$|s-t| = \begin{cases} s-t, & \text{if } s \geq t; \\ t-s, & \text{if } s < t \end{cases},$$

то из (\*) имеем

$$y(t) = \int_0^t e^{s-t} x(s) ds + \int_t^1 e^{t-s} x(s) ds.$$

Дифференцируя дважды это равенство, придём к уравнению, из которого без труда найдем  $x(t)$ .

Форма проведения промежуточной аттестации по дисциплине: *зачет с оценкой предполагается в устно-письменной форме по экзаменационным билетам.*

**12.2.1.**

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Нижегородский государственный технический университет**  
**им. Р.Е. Алексеева»(НГТУ)**

---

**Кафедра «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»**  
**Дисциплина «ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ» I часть**

**БИЛЕТ № 1**

1.  $\varphi : C[-1, 1] \rightarrow R, \quad \varphi(x) = 0,4[x(-0,5) + x(0,5) - 3x(0)].$   
 $\|\varphi\| = ?$
2. Общий вид линейного функционала в гильбертовом пространстве

Экзаменатор

Зав. каф.  
проф. Куркин А.А.

**12.2.2.**

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**

**высшего образования**  
**«Нижегородский государственный технический университет**  
**им. Р.Е. Алексеева» (НГТУ)**

---

Кафедра «Прикладная математика»

Дисциплина «**ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ**» И часть

**БИЛЕТ № 2**

1.  $\varphi: l^2 \rightarrow R, \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k}.$   
 $\|\varphi\| = ?$

2. Определение рефлексивного пространства. Привести примеры рефлексивных пространств.

Экзаменатор

Зав.кафедры Куркин А.А.

12.2.3.

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Нижегородский государственный технический университет**  
**им. Р.Е. Алексеева»(НГТУ)**

---

**Кафедра «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»**  
**Дисциплина «ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ» II часть**

**БИЛЕТ № 1**

1.  $A: C[0, 2] \rightarrow C[0, 2], \quad Ax(t) = t^2 x(1).$   
 $\|A\| = ?$

2. Доказать неравенство  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  для любых линейных ограниченных операторов из  $L(X, Y)$ .

Экзаменатор

Зав. каф.  
проф. Куркин А.А.

12.2.4.

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Нижегородский государственный технический университет**  
**им. Р.Е. Алексеева» (НГТУ)**

---

---

Кафедра «Прикладная математика»

Дисциплина «ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ» \_\_\_\_ Часть \_\_\_\_

**БИЛЕТ № 2**

1.  $A : C[0, 4] \rightarrow C[0, 4], \quad Ax(t) = \psi(t)x(t), \quad \psi(t) \in C[0, 4].$   
 $\|A\| = ?$

2. Пользуясь равенством  $AA^{-1} = E$  и свойствами сопряжённых операторов, доказать, что  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ .

Экзаменатор

Зав.кафедры Куркин А.А.



УТВЕРЖДАЮ:  
Директор института ИРИТ

“        ”        202\_\_ г.

**Лист актуализации рабочей программы дисциплины**  
**Б.1.В.ДВ.3.1 «Линейные операторы»**  
индекс по учебному плану, наименование

для подготовки бакалавров

Направление: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность: «Математическое моделирование и компьютерные технологии»

Форма обучения очная

Год начала подготовки: 2021

Курс 3

Семестр 6

а) В рабочую программу не вносятся изменения. Программа актуализирована для 20\_\_ г. начала подготовки.

б) В рабочую программу вносятся следующие изменения (указать на какой год начала подготовки):

1) .....

2) .....

3) .....

Разработчик (и): Рязанцева И.П., д.ф.-м.н., профессор

\_\_\_\_\_  
(ФИО, ученая степень, ученое звание)

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Рабочая программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры ПМ

\_\_\_\_\_ протокол № \_\_\_\_\_ от «\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Заведующий кафедрой

А.А. Куркин

**Лист актуализации принят на хранение:**

Заведующий выпускающей кафедрой \_\_\_\_\_ ПМ \_\_\_\_\_ «\_\_» \_\_\_\_\_ 2021 г.

Методический отдел УМУ: \_\_\_\_\_ «\_\_» \_\_\_\_\_ 2021\_ г.

## РЕЦЕНЗИЯ

на рабочую программу дисциплины «Линейные операторы»  
ОП ВО по направлению 01.03.02 Прикладная математика и информатика,  
направленность «Математическое моделирование и компьютерные технологии»  
(квалификация выпускника – бакалавр)

Ерофеевой Ларисой Николаевной, доцентом кафедры «Высшая математика»  
Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева, к.ф.-  
м.н.

(далее по тексту рецензент) проведена рецензия рабочей программы дисциплины  
«Линейные операторы» ОП ВО по направлению 01.03.02 Прикладная математика и  
информатика, направленность «Математическое моделирование и компьютерные  
технологии» (бакалавриат), разработанной в ФГБОУ ВО «Нижегородский  
государственный технический университет имени Р.Е. Алексеева», на кафедре  
«Прикладная математика» (разработчик – Рязанцева Ирина Прокофьевна, профессор)

Рассмотрев представленные на рецензию материалы, рецензент пришел к  
следующим выводам:

Программа соответствует требованиям ФГОС ВО по направлению 01.03.02  
Прикладная математика и информатика. Программа содержит все основные разделы,  
соответствует требованиям к нормативно-методическим документам. Представленная в  
Программе актуальность учебной дисциплины в рамках реализации ОП ВО не  
подлежит сомнению – дисциплина по выбору относится к базовой части учебного цикла –  
Б1.

Представленные в Программе цели дисциплины соответствуют требованиям ФГОС ВО  
направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

В соответствии с Программой за дисциплиной «Линейные операторы» закреплено ПКС-  
3. Дисциплина и представленная Программа способны реализовать их в объявленных  
требованиях.

**Результаты обучения**, представленные в Программе в категориях знать, уметь,  
владеть соответствуют специфике и содержанию дисциплины и демонстрируют  
возможность получения заявленных результатов.

Общая трудоёмкость дисциплины «Линейные операторы» составляет 4 зачётных единицы  
(144 часа). Информация о взаимосвязи изучаемых дисциплин и вопросам исключения  
дублирования в содержании дисциплин соответствует действительности. Дисциплина  
«Линейные операторы» взаимосвязана с другими дисциплинами ОП ВО и Учебного плана  
по направлению 01.03.02 Прикладная математика и информатика, и возможность  
дублирования в содержании отсутствует.

Представленная Программа предполагает использование современных образовательных  
технологий, используемые при реализации различных видов учебной работы. Формы  
образовательных технологий соответствуют специфике дисциплины.

Виды, содержание и трудоёмкость самостоятельной работы студентов, представленные в  
Программе, соответствуют требованиям к подготовке выпускников, содержащимся во  
ФГОС ВО направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Представленные и описанные в Программе формы текущей оценки знаний (письменный  
опрос, участие в тестировании) соответствуют специфике дисциплины и требованиям к  
выпускникам.

Форма промежуточного контроля знаний студентов, предусмотренная Программой,  
осуществляется в форме зачета с оценкой, что соответствует статусу дисциплины, как  
дисциплины базовой части учебного цикла – Б1 ФГОС ВО направления 01.03.02  
Прикладная математика и информатика.

Нормы оценки знаний, представленные в Программе, соответствуют специфике дисциплины и требованиям к выпускникам.

Учебно-методическое обеспечение дисциплины представлено: основной литературой – Знаменования, дополнительной литературой – Знаменования и соответствует требованиям ФГОСВО направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика.

Материально-техническое обеспечение дисциплины соответствует специфике дисциплины «Линейные операторы» и обеспечивает использование современных образовательных, в том числе интерактивных методов обучения.

Методические рекомендации студентам и методические рекомендации преподавателям по организации обучения по дисциплине дают представление о специфике обучения по дисциплине «Линейные операторы».

### **ОБЩИЕ ВЫВОДЫ**

На основании проведенной рецензии можно сделать заключение, что характер, структура и содержание рабочей программы дисциплины «Линейные операторы» ОП ВО по направлению 01.03.02 Прикладная математика и информатика, направленность «Математическое моделирование и компьютерные технологии» (квалификация выпускника – бакалавр), разработанная Рязанцевой И.П., профессором кафедры «Прикладная математика», соответствует требованиям ФГОС ВО, современным требованиям экономики, рынка труда и позволит при её реализации успешно обеспечить формирование заявленных компетенций.

Зав. кафедрой «Высшая математика»  
Нижегородского государственного  
технического университета им. Р.Е. Алексеева,  
к.ф.-м.н., доцент